Κεφάλαιο 4

Δυναμική Φορτίων - Δυναμική Δινών

Σύνοψη

Μελετάμε την κίνηση φορτίων υπό την επίδραση ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Βρίσκουμε λύσεις για την περίπτωση που τα φορτισμένα σωμάτια κινούνται σε επίπεδο κάθετο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Οι τροχιές των σωματίων είναι ιδιαίτερα διαφορετικές από τις τροχιές σωματίων που συνήθως μελετώνται στην κλασική μηχανική. Μας δίνεται η ευκαιρία να κάνουμε μελέτη των λύσεων (τροχιών κίνησης) μέσω των διατηρήσιμων ποσοτήτων των εξισώσεων κίνησης.

Ένα πρόβλημα παρόμοιο στη μαθηματική του περιγραφή με το παραπάνω είναι αυτό της κίνησης αλληλεπιδρουσών δινών. Έχουμε συνήθεις δίνες σε ρευστά, όμως δίνες εμφανίζονται και σε πολλά άλλα συστήματα, ιδιαίτερα αυτά που μελετάει η Φυσική συμπυκνωμένης ύλης, π.χ., υπερρευστά, μαγνητικά υλικά κλπ. Όταν οι δίνες θεωρηθούν σημειακές οι εξισώσεις κίνησής τους είναι σε μεγάλο βαθμό ανάλογες με τις εξισώσεις κίνησης φορτίων σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Δίνουμε τους νόμους διατήρησης και μελετάμε τις εξισώσεις κίνησης για δύο ή περισσότερες αλληλεπιδρώσες δίνες. Οι εξισώσεις κίνησης έχουν ιδιαίτερα κομψή μορφή στη χαμιλτονιανή τους μορφή, στα πλαίσια της οποίας γίνεται πιο κατανοητή η παράδοξη δυναμική των δινών.

Προαπαιτούμενη γνώση

- Διαφορικές εξισώσεις 1ης και 2ας τάξεως. Λύσεις γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.
- Έννοιες της μηχανικής: ταχύτητα, επιτάχυνση, τροχιά σωματίου, ενέργεια, εξίσωση του Νεύτωνα.
- Εξισώσεις Lagrange και Hamilton (μόνο για τις προχωρημένες παραγράφους).

4.1 Δυναμική φορτίων σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

4.1.1 Φορτίο σε ηλεκτρικό πεδίο

Θεωρούμε ένα ηλεκτρικό πεδίο το οποίο είναι ένα διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$. Η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα φορτισμένο σωμάτιο με φορτίο q δίνεται με τη βοήθεια του ηλεκτρικού πεδίου και είναι $\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E}$ (Griffiths, 1996). Αν το φορτισμένο σωμάτιο έχει μάζα m τότε η εξίσωση του Νεύτωνα έχει τη μορφή

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E}. \tag{4.1}$$

Παρατήρηση 4.1. *Είναι φανερό ότι η συνιστώσα της ταχύτητας προς την κατεύθυνση του πεδίου θα αυξάνεται, δηλαδή, το φορτίο (εάν είναι θετικό, $q > 0$) θα έχει την τάση να κινηθεί προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$.*

Οι εξισώσεις Maxwell του ηλεκτρομαγνητισμού μάς λένε ότι για το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ ισχύει $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ (αυτό πάντως ισχύει μόνο στην περίπτωση που τα μαγνητικά πεδία του περιβάλλοντος είναι ανεξάρτητα του χρόνου). Αυτό έχει ως συνέπεια ότι μπορούμε να ορίσουμε μία βαθμωτή συνάρτηση δυναμικού $\Phi = \Phi(\boldsymbol{r})$ τέτοια ώστε η κλίση του δυναμικού να δίνει το ηλεκτρικό πεδίο: $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$. Θα περιοριστούμε σε κίνηση στο επίπεδο xy, ώστε το δυναμικό είναι συνάρτηση $\Phi = \Phi(x, y)$. Οι εξισώσεις κίνησης (4.1) έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -q\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= -q\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Το δυναμικό είναι χρήσιμο και στον ορισμό της ενέργειας του συστήματος η οποία είναι

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + q\Phi(x, y). \tag{4.3}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι αυτή διατηρείται στον χρόνο. Υπολογίζουμε τη χρονική παράγωγό της, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η θέση του σωματίου (x, y) εξαρτάται από τον χρόνο. Για παράδειγμα, η ολική χρονική παράγωγος του δυναμικού είναι

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Η ολική παράγωγος της ενέργειας είναι

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial x}\dot{x} + q\frac{\partial \Phi}{\partial y}\dot{y} = \dot{x}\left(m\ddot{x} + q\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \dot{y}\left(m\ddot{y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0.$$

Το αποτέλεσμα στην τελευταία ισότητα προκύπτει με χρήση των εξισώσεων κίνησης (4.2). Εφόσον η χρονική παράγωγος της ενέργειας είναι μηδέν για κάθε δυνατή κίνηση του φορτίου προκύπτει ότι η $\mathcal{E}$ είναι μία σταθερή συνάρτηση.

4.1.2 Φορτίο σε μαγνητικό πεδίο

Θα υποθέσουμε τώρα ότι το φορτισμένο σωμάτιο μάζας m με ηλεκτρικό φορτίο q κινείται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$. Η δύναμη που του ασκείται εξαρτάται, όχι μόνο από το μαγνητικό πεδίο, αλλά και από την ταχύτητά του $\boldsymbol{v}$ και δίνεται από την (Griffiths, 1996; Goldstein, Poole Jr, & Safko, 2001)

$$\boldsymbol{F}_B = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{4.4}$$

Θα θεωρήσουμε στα παρακάτω την περίπτωση ενός σταθερού ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$, όπου B είναι σταθερά. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θέσαμε τον άξονα z στην κατεύθυνση του σταθερού μαγνητικού πεδίου. Θα περιοριστούμε επίσης στην περίπτωση που το φορτίο κινείται σε έναν *διδιάστατο χώρο*, δηλαδή στο επίπεδο xy το οποίο είναι κάθετο στο $\boldsymbol{B}$. Σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{qB}{m}\,\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{4.5}$$

Οι εξισώσεις για τις συνιστώσες της ταχύτητας $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ γράφονται σε απλούστερη μορφή ως

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega_{\rm c} v_y \\ \dot{v}_y &= -\omega_{\rm c} v_x, \end{aligned} \tag{4.6}$$

όπου έχουμε ορίσει την ποσότητα

$$\omega_{\rm c} = \frac{qB}{m} \tag{4.7}$$

η οποία λέγεται *συχνότητα κυκλότρου*.

Παρατήρηση 4.2. *Μπορούμε να δείξουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας δεν αλλάζει κατά την κίνηση φορτίου σε σταθερό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$.*

Υπολογίζουμε την παράγωγο του τετραγώνου του μέτρου της ταχύτητας $|\boldsymbol{v}|^2 = \boldsymbol{v}^2$:

$$\frac{d\boldsymbol{v}^2}{dt} = 2\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 2\boldsymbol{v}\cdot(q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = 0.$$

Στον υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε την Εξ. (4.5) για την παράγωγο της ταχύτητας και ακολούθως μία βασική ιδιότητα του τριπλού γινομένου. Το αποτέλεσμα δείχνει ότι το μέτρο της ταχύτητας $|\boldsymbol{v}|$ είναι σταθερό για κάθε κίνηση φορτίου που υπακούει τις εξισώσεις κίνησης.

Η μορφή των εξισώσεων (4.6) γίνεται σαφής αν γράψουμε τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας ως μία μιγαδική μεταβλητή

$$\tilde{v} = v_x + i v_y, \tag{4.8}$$

για την οποία, χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4.6), βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης

$$\dot{\tilde{v}} + i\omega_{\rm c}\,\tilde{v} = 0. \tag{4.9}$$

Πρόκειται για μία γραμμική εξίσωση 1ης τάξης και η λύση της είναι

$$\tilde{v}(t) = v_0\, e^{-i(\omega_{\rm c} t+\delta)} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) &= v_0\,\cos(\omega_{\rm c} t+\delta) \\ v_y(t) &= -v_0\,\sin(\omega_{\rm c} t+\delta) \end{cases} \tag{4.10}$$

όπου οι v_0, δ είναι πραγματικές σταθερές. Βλέπουμε ότι η ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ μεταβάλλεται περιοδικά και η v_0 δίνει το σταθερό μέτρο της. Η φάση δ καθορίζει την κατεύθυνση της αρχικής ταχύτητας. Για παράδειγμα, όταν $\delta = 0$ η αρχική ταχύτητα είναι $\boldsymbol{v}(t=0) = (v_0, 0)$.

Οι συντεταγμένες θέσης βρίσκονται ολοκληρώνοντας τις Εξ. (4.10) και δίνονται από τις

$$x(t) = x_0 + R\,\sin(\omega_{\rm c} t+\delta), \qquad y(t) = y_0 + R\,\cos(\omega_{\rm c} t+\delta), \qquad R = \frac{v_0}{\omega_{\rm c}}, \tag{4.11}$$

όπου x_0, y_0 είναι δύο νέες σταθερές από την ολοκλήρωση. Η κίνηση είναι κυκλική γύρω από τη θέση (x_0, y_0), την οποία μπορούμε για απλότητα να θέσουμε στην αρχή των αξόνων $(0,0)$. Η συχνότητα περιστροφής είναι $\omega_{\rm c}$ και αυτή είναι ανεξάρτητη του μέτρου της ταχύτητας v_0.

Παρατήρηση 4.3. *Η γωνιακή ταχύτητα (ή γωνιακή συχνότητα) $\omega_{\rm c}$ της κυκλικής κίνησης εξαρτάται μόνο από το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ και είναι ανεξάρτητη της ακτίνας κίνησης R.*

Παράδειγμα 4.1. Ένα σωμάτιο κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα υ_0 και κάποια στιγμή εφαρμόζεται ομογενές σταθερό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ κάθετο στο διάνυσμα της ταχύτητάς του. Θα μελετήσουμε την κίνηση που θα κάνει το σωμάτιο.

Επίλυση. Θα θωρήσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι η αρχική ταχύτητα του σωματίου είναι $\boldsymbol{\upsilon}_0 = \upsilon_0\hat{\boldsymbol{x}}$ και ότι το μαγνητικό πεδίο είναι $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$. Το σωμάτιο θα εισέλθει σε κυκλική τροχιά σύμφωνα με τις Εξ. (4.11). Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής θα είναι $\omega_c = qB/m$. Αν θέσουμε αρχική συνθήκη $(\upsilon_x(t=0), \upsilon_y(t=0)) = (\upsilon_0, 0)$ στις (4.10) παίρνουμε $\delta = 0$, ώστε η ταχύτητα του σωματίου είναι

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_0\,\cos(\omega_c t), \qquad \upsilon_y(t) = -\upsilon_0\,\sin(\omega_c t).$$

Η τροχιά του δίνεται από

$$x(t) = x_0 + \frac{\upsilon_0}{\omega_c}\,\sin(\omega_c t), \qquad y(t) = y_0 + \frac{\upsilon_0}{\omega_c}\,\cos(\omega_c t).$$

Η ακτίνα $R = \upsilon_0/\omega_c$ της κυκλικής τροχιάς εξαρτάται από την αρχική ταχύτητα. Δηλαδή, σωμάτιο με μικρή αρχική ταχύτητα κάνει κυκλική τροχιά με μικρή ακτίνα ενώ σωμάτιο με μεγάλη αρχική ταχύτητα κάνει κυκλική τροχιά με μεγάλη ακτίνα.

□

Ερώτηση κατανόησης 4.1. Πώς εξαρτάται η ακτίνα της τροχιάς του φορτίου στο προηγούμενο παράδειγμα από την ένταση του μαγνητικού πεδίου B. Σε ποιά περίπτωση το σωμάτιο θα εισέλθει σε κυκλική τροχιά με μικρή ακτίνα και σε ποιά περίπτωση θα εισέλθει σε κυκλική τροχιά με μεγάλη ακτίνα;

Παρατήρηση 4.4. *Η ακτίνα της κυκλικής κίνησης R είναι ανάλογη της ταχύτητας του σωματίου υ_0 και αντιστρόφως ανάλογη του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου B.*

Σύντομο πρόβλημα 4.1. Γράψτε την εξίσωση για τη συνιστώσα της ταχύτητας υ_z από τις Εξ. (4.5) και περιγράψτε την κίνηση στη διεύθυνση z. Σε ποιά περίπτωση η κίνηση περιορίζεται στο επίπεδο xy όπως μελετήθηκε σε αυτή την παράγραφο;

4.1.3 Φορτίο σε μαγνητικό πεδίο: Νόμοι διατήρησης

Οι δύο εξισώσεις της κίνησης (4.6) γράφονται, για τη θέση (x, y), στη μορφή

$$\frac{\ddot{x}}{\omega_c} - \dot{y} = 0, \qquad \frac{\ddot{y}}{\omega_c} + \dot{x} = 0. \tag{4.12}$$

Αυτές μπορούν να γραφούν ως αναλλοίωτες χρονικές παράγωγοι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\omega_c} - y\right) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\omega_c} + x\right) = 0, \tag{4.13}$$

άρα, οι ποσότητες στις παρενθέσεις είναι διατηρήσιμες ποσότητες της κίνησης. Θα ορίσουμε τις διατηρήσιμες ποσότητες στη μορφή

$$R_x := x + \frac{\dot{y}}{\omega_c}\,, \qquad R_y := y - \frac{\dot{x}}{\omega_c} \tag{4.14}$$

έτσι ώστε να σχετίζονται με τις συντεταγμένες της φυσικής θέσης του φορτίου. Αυτές οι ποσότητες είναι χρήσιμες για την περιγραφή της κίνησης και το διάνυσμα (R_x, R_y) λέγεται *οδηγός της κίνησης* (guiding center).

Παράδειγμα 4.2. Για την τροχιά (4.11) ο οδηγός της κίνησης μπορεί να υπολογιστεί με χρήση των Εξ. (4.10) για την ταχύτητα και (4.11) για τη θέση και είναι

$$R_x = \left[x_0 + \frac{\upsilon_0}{\omega_{\rm c}}\,\sin(\omega_{\rm c}t+\delta)\right] - \frac{\upsilon_0}{\omega_{\rm c}}\,\sin(\omega_{\rm c}t+\delta) = x_0,$$
$$R_y = \left[y_0 + \frac{\upsilon_0}{\omega_{\rm c}}\,\cos(\omega_{\rm c}t+\delta)\right] - \frac{\upsilon_0}{\omega_{\rm c}}\,\cos(\omega_{\rm c}t+\delta) = y_0.$$

Άρα ο οδηγός κίνησης (R_x, R_y) συμπίπτει με το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. □

Τέλος, σημειώνουμε ότι το σύστημα έχει ενέργεια την

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{4.15}$$

η οποία περιέχει μόνο τον κινητικό όρο, ενώ η ύπαρξη μαγνητικού πεδίου δεν προσθέτει επιπλέον όρο σε αυτήν. Η ενέργεια διατηρείται στην κίνηση, όπως αποδεικνύεται αν πάρουμε τη χρονική της παράγωγο:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} = \dot{x}(qB\dot{y}) + \dot{y}(-qB\dot{x}) = 0.$$

Στον υπολογισμό έχουμε χρησιμοποιήσει τις εξισώσεις κίνησης (4.12). Η αποσαφήνιση ότι η (4.15) δίνει πραγματικά την ενέργεια του συστήματος θα δωθεί μέσω του Λαγκρανζιανού και Χαμιλτονιανού φορμαλισμού σε επόμενη παράγραφο.

Παρατήρηση 4.5. *Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το ασυνήθιστο γεγονός ότι οι Εξ.* (4.12) *έχουν τρεις τουλάχιστον διατηρήσιμες ποσότητες και να δώσουμε λύση σε προβλήματα χωρίς να χρειαστεί να ολοκληρώσουμε και πάλι τις εξισώσεις κίνησης.*

Παράδειγμα 4.3. Ας υποθέσουμε ότι ένα σωμάτιο βρίσκεται αρχικά (για χρόνο $t = 0$) στο σημείο $x_0 := x(t=0),\ y_0 := y(t=0)$ και έχει αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 := \dot{x}(t=0) = 0,\ \dot{y}_0 := \dot{y}(t=0) = 0$. Βρείτε την τροχιά του.

Επίλυση. Θα λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μόνο τις διατηρήσιμες ποσότητες. Υπολογίζουμε τις τιμές τους για χρόνο $t = 0$:

$$\mathcal{E} = 0, \qquad R_x = x_0, \qquad R_y = y_0.$$

Επειδή η ενέργεια $\mathcal{E}$ διατηρείται στον χρόνο έχουμε ότι για κάθε t

$$\mathcal{E} = 0 \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0,\, \dot{y} = 0.$$

Επίσης, οι συνιστώσες του οδηγού κίνησης (4.14) έχουν την απλούστερη έκφραση $R_x = x$, $R_y = y$. Εφόσον αυτές διατηρούνται, οι συνιστώσες της θέσης (x, y) παραμένουν σταθερές, άρα η λύση είναι $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ για κάθε t.

□

Παράδειγμα 4.4. Ας υποθέσουμε ότι ένα σωμάτιο βρίσκεται αρχικά στο σημείο $x_0 := x(t=0) = 1,\ y_0 := y(t=0) = 0$ και έχει αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 := \dot{x}(t=0) = 0,\ \dot{y}_0 := \dot{y}(t=0) = \omega_{\rm c}$. Βρείτε την τροχιά του.

Επίλυση. Υπολογίζουμε τις τιμές των διατηρήσιμων ποσοτήτων για χρόνο $t = 0$:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) = \frac{1}{2}\,m\omega_{\rm c}^2$$
$$R_x = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega_{\rm c}} = 2, \qquad R_y = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega_{\rm c}} = 0.$$

Από τη διατήρηση του οδηγού της κίνησης προκύπτει

$$x + \frac{\dot{y}}{\omega_\mathrm{c}} = 2 \Rightarrow \dot{y} = \omega_\mathrm{c}(2-x), \qquad y - \frac{\dot{x}}{\omega_\mathrm{c}} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \omega_\mathrm{c} y.$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας $\mathcal{E}$ και με χρήση των σχέσεων που μόλις βρήκαμε έχουμε

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \omega_\mathrm{c}^2 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1.$$

Άρα το σωμάτιο κάνει κυκλική κίνηση μοναδιαίας ακτίνας και με κέντρο τον οδηγό της κίνησης $(R_x, R_y) = (2, 0)$. Αυτό το παράδειγμα παρέχει μία αιτιολογία για το όνομα “οδηγός της κίνησης” το οποίο δόθηκε στο διάνυσμα (R_x, R_y).

□

4.1.4 Φορτίο σε ομογενές ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

Θεωρούμε ένα σωμάτιο μάζας m φορτισμένο με ηλεκτρικό φορτίο q το οποίο βρίσκεται υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ και ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που το $\boldsymbol{E}$ είναι κάθετο στο $\boldsymbol{B}$, δηλαδή, είναι της μορφής $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, 0)$.

Οι εξισώσεις κίνησης του σωματίου είναι (Landau & Lifshitz, 1985)

$$\begin{aligned} m\frac{d\upsilon_x}{dt} &= qB\,\upsilon_y + qE_x \\ m\frac{d\upsilon_y}{dt} &= -qB\,\upsilon_x + qE_y \end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} \frac{d\upsilon_x}{dt} &= \omega_\mathrm{c}\,\upsilon_y + \omega_\mathrm{c}\,\frac{E_x}{B} \\ \frac{d\upsilon_y}{dt} &= -\omega_\mathrm{c}\,\upsilon_x + \omega_\mathrm{c}\,\frac{E_y}{B}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Θα μελετήσουμε την περίπτωση ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου και θα επιλέξουμε $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{x}}$, όπου το E είναι σταθερά στον χώρο και τον χρόνο. Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται ως

$$\begin{aligned} \frac{d\upsilon_x}{dt} &= \omega_\mathrm{c}\,\upsilon_y + \omega_\mathrm{c}\,\frac{E}{B} \\ \frac{d\upsilon_y}{dt} &= -\omega_\mathrm{c}\,\upsilon_x. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Χρησιμοποιούμε και πάλι μιγαδική μεταβλητή για την ταχύτητα $\tilde{\upsilon} = \upsilon_x + i\upsilon_y$, για την οποία η εξίσωση κίνησης είναι

$$\frac{d\tilde{\upsilon}}{dt} + i\omega_\mathrm{c}\tilde{\upsilon} = \omega_\mathrm{c}\,\frac{E}{B}. \tag{4.18}$$

Λύση είναι η

$$\tilde{\upsilon}(t) = \upsilon_x + i\upsilon_y = \upsilon_0\, e^{-i(\omega_\mathrm{c} t + \delta)} - i\frac{E}{B}, \tag{4.19}$$

όπου υ_0, δ είναι πραγματικές σταθερές. Αν επιλέξουμε την τιμή $\delta = -\pi/2$ (πράγμα που αντιστοιχεί σε επιλογή της αρχής του χρόνου t), έχουμε

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_0\, \sin\omega_\mathrm{c} t, \qquad \upsilon_y(t) = \upsilon_0\, \cos\omega_\mathrm{c} t - \frac{E}{B}. \tag{4.20}$$

Προσέξτε ότι η ταχύτητα στον χρόνο $t = 0$ είναι $\boldsymbol{\upsilon}(t=0) = (\upsilon_0 - E/B)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (ώστε δεν έχει μέτρο ίσο με υ_0). Μπορούμε, ως ειδική περίπτωση, να επιλέξουμε $\upsilon_0 = E/B$ οπότε θα έχουμε αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}(t=0) = 0$.

Είναι δυνατόν να δώσουμε μία πλήρη λύση του προβλήματος υπολογίζοντας τη θέση του σωματίου. Ολοκληρώνουμε τις Εξ. (4.20) και βρίσκουμε τη θέση του φορτίου

$$x(t) = x_0 + R\,(1 - \cos\omega_\mathrm{c} t), \qquad y(t) = y_0 + R\,\sin\omega_\mathrm{c} t - \frac{E}{B}t, \qquad R = \frac{\upsilon_0}{\omega_\mathrm{c}}. \tag{4.21}$$

Οι εξισώσεις αυτές, οι οποίες δίνουν την τροχιά του φορτίου, ορίζουν το *τροχοειδές*. Στην περίπτωση που επιλέξουμε αρχική ταχύτητα μηδέν, δηλαδή, $v_0 = E/B$, παίρνουμε την *κυκλοειδή* κίνηση

$$x(t) = x_0 + R\,(1 - \cos\omega_{\rm c} t), \qquad y(t) = y_0 + R\,(\sin\omega_{\rm c} t - \omega_{\rm c} t). \tag{4.22}$$

Η κίνηση στην κατεύθυνση x είναι περιοδική με κέντρο το $x = x_0 + R$ και μέγιστη απομάκρυνση R. Στην κατεύθυνση y έχουμε έναν όρο γραμμικό στον χρόνο t και σαν συνέπεια μία μονότονη αύξηση του $y(t)$.

Ο οδηγός της κίνησης βρίσκεται αφού αντικαταστήσουμε τις (4.21), (4.20) στον ορισμό (4.14):

$$R_x = x_0 + \frac{1}{\omega_{\rm c}}\left(v_0 - \frac{E}{B}\right), \qquad R_y = y_0 - \frac{E}{B}\,t. \tag{4.23}$$

Άρα το σημείο (R_x, R_y) κινείται ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα προς την αρνητική κατεύθυνση y. Στην ειδική περίπτωση $v_0 = E/B$ η αρχική θέση είναι $(R_x, R_y) = (x_0, y_0)$. Αν επιλέξουμε την αρχή των αξόνων ώστε $x_0 = 0 = y_0$ τότε το σημείο (R_x, R_y) θα κινείται επάνω στον άξονα y.

Σύντομο πρόβλημα 4.2. Ξεκινώντας από την Εξ. (4.17) ορίστε νέα αδιάστατη μεταβλητή για τον χρόνο και επαναλάβετε την λύση της εξίσωσης που δίνεται παραπάνω.

Στη συνέχεια θα δώσουμε μία συντομότερη μελέτη του προβλήματος η οποία βασίζεται στις διατηρήσιμες ποσότητες τις οποίες βρήκαμε απουσία ηλεκτρικού πεδίου, δηλαδή, στον οδηγό κίνησης (R_x, R_y). Οι εξισώσεις για τη θέση του φορτίου είναι

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega_{\rm c}\,\dot{y} + \omega_{\rm c}\,\frac{E}{B} \\ \ddot{y} &= -\omega_{\rm c}\,\dot{x} \end{aligned} \tag{4.24}$$

και μπορούν να γραφούν ως

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\omega_{\rm c}} - y\right) &= \frac{E}{B} \Rightarrow \frac{dR_y}{dt} = -\frac{E}{B} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\omega_{\rm c}} + x\right) &= 0 \Rightarrow \frac{dR_x}{dt} = 0, \end{aligned}$$

όπου εισαγάγαμε τον ορισμό (4.14) για τη θέση (R_x, R_y) του οδηγού κίνησης. Οι λύσεις αυτών των εξισώσεων βρίσκονται εύκολα και είναι

$$R_x = R_x^{(0)}, \qquad R_y = -\frac{E}{B}\,t + R_y^{(0)},$$

όπου $R_x^{(0)}, R_y^{(0)}$ είναι σταθερές που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες και δίνουν τον οδηγό της κίνησης στον χρόνο $t = 0$. Αυτές οι εξισώσεις συμπίπτουν με τις (4.23) με κατάλληλη επιλογή των σταθερών.

Σημειώστε ότι ενώ το R_x είναι διατηρήσιμη ποσότητα (όπως και στην περίπτωση όπου είχαμε μόνο μαγνητικό πεδίο), το R_y δεν είναι πλέον διατηρήσιμη ποσότητα. Βλέπουμε ότι ο οδηγός της κίνησης κάνει ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση προς την κατεύθυνση y. Η θέση του οδηγού κίνησης δεν συμπίπτει με τη θέση του σωματίου. Όμως, είναι εύλογο να υποθέσει κανείς ότι η θέση του σωματίου είναι κοντά στον οδηγό της κίνησης. Αυτή η εικόνα είναι σωστή ειδικά όταν το μαγνητικό πεδίο B είναι μεγάλο. Συμπερασματικά, η λύση που βρήκαμε υποδεικνύει ότι η κίνηση του σωματίου είναι περιορισμένη προς την κατεύθυνση x (αφού το R_x είναι σταθερό στον χρόνο), ενώ το σωμάτιο κινείται προς την κατεύθυνση y.

Σύμφωνα με όσα είμαστε συνηθισμένοι να σκεφτόμαστε, με βάση τους νόμους του Νέυτωνα, η επιτάχυνση είναι κατά την κατεύθυνση της δύναμης και άρα και η κίνηση θα περιμέναμε να ήταν προς την ίδια κατεύθυνση. Στο πρόβλημα όμως αυτού του κεφαλαίου το μαγνητικό πεδίο φαίνεται να έχει τελείως ανατρέψει αυτή τη λογική.

Παρατήρηση 4.6. *Ένα φορτίο κινείται (κατά μέσο όρο) κάθετα στη διεύθυνση της ηλεκτρικής δύναμης $\boldsymbol{F}_E = qE\hat{\boldsymbol{x}}$, όταν είναι παρόν το μαγνητικό πεδίο $B\hat{\boldsymbol{z}}$. Η κίνηση αυτή είναι παράδοξη σε σύγκριση με τα συνήθη προβλήματα κλασικής νευτώνειας δυναμικής.*

Μπορούμε να εισαγάγουμε το ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi(x, y)$ για να περιγράψουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$. Για την περίπτωση του σταθερού πεδίου $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$ το δυναμικό είναι

$$\Phi(x) = Ex \tag{4.25}$$

και μπορούμε άμεσα να επιβεβαιώσουμε ότι $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$. Η *ενέργεια* του σωματίου προκύπτει όταν στην έκφραση (4.15) προστεθεί η ενέργεια του δυναμικού του ηλεκτρικού πεδίου (4.25):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2}\, m\, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + q\Phi(x, y) \Rightarrow \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2}\, m\, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - qEx. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Αυτή η ενέρεια συμπίπτει με την ενέργεια (4.3) για φορτίο το οποίο βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο μόνο.

4.1.5 Λαγκρανζιανή περιγραφή

Δεδομένου ότι το σύστημα του φορτίου σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο διατηρεί την ενέργεια, θα ήταν προτιμότερο να το περιγράψουμε με τον λαγκρανζιανό φορμαλισμό. Για να γράψουμε τη Λαγκρανζιανή χρειαζόμαστε το δυναμικό $\Phi(x, y)$ του φορτίου το οποίο οφείλεται στο ηλεκτρικό πεδίο. Για το μαγνητικό πεδίο δεν έχουμε συνάρτηση δυναμικής ενέργειας, όμως θα πρέπει να εισαχθεί ένας όρος στη Λαγκρανζιανή έτσι ώστε το πεδίο $\boldsymbol{B}$ να παράγεται στις εξισώσεις κίνησης.

Η Λαγκρανζιανή για το πρόβλημά μας μπορεί να γραφεί ως (Goldstein et al., 2001)

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 - q(\Phi - \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}) \tag{4.27}$$

όπου επιλέξαμε διανυσματικό συμβολισμό με $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}$. Το $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y)$ είναι διανυσματική συνάρτηση των συντεταγμένων (x, y), λέγεται διανυσματικό δυναμικό και θα το επιλέξουμε αργότερα.

Παράδειγμα 4.5. Για την περίπτωση ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{x}}$ και μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y} - q\Phi. \tag{4.28}$$

Από αυτή μπορούμε να εξαγάγουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = qB\,\dot{y} - q\,\partial_x \Phi \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = -qB\,\dot{y} - q\,\partial_y \Phi \end{aligned}$$

οι οποίες πραγματικά συμπίπτουν με τις Εξ. (4.16). □

Ας δούμε τις εξισώσεις τις οποίες δίνει η Λαγκρανζιανή (4.27). Από τον όρο που περιέχει το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{A}$ θα προκύψει στις εξισώσεις Lagrange η ολική χρονική παράγωγος $d\boldsymbol{A}/dt$. Αυτή δίνεται με τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης, για παράδειγμα, έχουμε

$$\frac{dA_x}{dt} = \dot{x}\,\partial_x A_x + \dot{y}\,\partial_y A_x,$$

όπου υποθέτουμε ότι το $\boldsymbol{A}$ δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από τον χρόνο, δηλαδή, $\partial \boldsymbol{A}/\partial t = 0$ (μία όμοια σχέση προκύπτει για την dA_y/dt). Για την πρώτη εξίσωση Lagrange έχουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + qA_x\right) = q\,\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\partial_x \boldsymbol{A} - q\,\partial_x \Phi \Rightarrow m\ddot{x} + q\frac{dA_x}{dt} = q(\dot{x}\,\partial_x A_x + \dot{y}\,\partial_x A_y) - q\,\partial_x \Phi.$$

Τελικά παίρνουμε

$$m\ddot{x} = q\dot{y}\left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right) - q\,\partial_x \Phi. \tag{4.29}$$

Βλέπουμε ότι αν επιλέξουμε $\boldsymbol{A}$ τέτοιο ώστε

$$\partial_x A_y - \partial_y A_x = B \tag{4.30}$$

τότε πραγματικά η Λαγκρανζιανή παράγει τις Εξ. (4.24). Φθάνουμε ακριβώς στο ίδιο συμπέρασμα αν εξάγουμε και την εξίσωση για τη συντεταγμένη y, η οποία είναι

$$m\ddot{y} = -q\dot{x}\left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right) - q\,\partial_y \Phi.$$

Για την περίπτωση του φορτίου στο παράδειγμα 4.5 η Λαγκρανζιανή (4.28) λαμβάνεται με την επιλογή $\boldsymbol{A} = B(0, x, 0)$. Για αυτό το $\boldsymbol{A}$ πραγματικά ικανοποιείται η (4.30) και δίνει ένα σταθερό B. Μία διαφορετική επιλογή για το διανυσματικό πεδίο είναι η $\boldsymbol{A} = B(-y, 0, 0)$, για την οποία επίσης ικανοποιείται η Εξ. (4.30). Έχουμε λοιπόν μία διαφορετική αλλά ισοδύναμη μορφή για τη Λαγκρανζιανή η οποία είναι η

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - q(\Phi + y\dot{x}).$$

Μία τρίτη, πιο συμμετρική μορφή, προκύπτει από την επιλογή $\boldsymbol{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$, η οποία επίσης ικανοποιεί την Εξ. (4.30). Η συμμετρική στις συντεταγμένες x, y Λαγκρανζιανή που προκύπτει είναι

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - q\Phi. \tag{4.31}$$

4.1.6 Χαμιλτονιανή περιγραφή

Οι συζυγείς κανονικές ορμές για τη θέση (x, y) του φορτίου θα πρέπει να υπολογιστούν από τον γενικό τύπο (Goldstein et al., 2001)

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{qB}{2}y, \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{qB}{2}x, \tag{4.32}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συμμετρική μορφή της Λαγκρανζιανής (4.31). Άρα, η συνήθης ορμή, την οποία θα ονομάσουμε $\boldsymbol{\pi} = (m\dot{x}, m\dot{y})$, διαφέρει από την κανονική ορμή $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)$ στην Εξ. (4.32). Αυτό περιπλέκει αρκετά την περιγραφή του συστήματος, ταυτοχρόνως όμως το κάνει ιδιαίτερα ενδιαφέρον.

Η Χαμιλτονιανή που προκύπτει από τη Λαγκρανζιανή (4.31) είναι η

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + q\Phi. \tag{4.33}$$

Οι Εξ. (4.32) δίνουν τις ταχύτητες

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\left(p_x + \frac{qB}{2}y\right), \qquad \dot{y} = \frac{1}{m}\left(p_y - \frac{qB}{2}x\right) \tag{4.34}$$

Αντικαθιστούμε τις ταχύτητες στην Χαμιλτονιανή ώστε αυτή γράφεται ως συνάρτηση των θέσεων και κανονικών ορμών, στη μορφή $H = H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$, ως

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x + \frac{qB}{2}y\right)^2 + \left(p_y - \frac{qB}{2}x\right)^2\right] + q\Phi. \tag{4.35}$$

Οι εξισώσεις Hamilton για τις συντεταγμένες συμπίπτουν με τις (4.34):

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m}\left(p_x + \frac{qB}{2}y\right), \qquad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m}\left(p_y - \frac{qB}{2}x\right). \tag{4.36}$$

Οι εξισώσεις Hamilton για τις ορμές προκύπτουν από τους γενικούς τύπους του χαμιλτονιανού φορμαλισμού ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{qB}{2m}\left(p_y - \frac{qB}{2}x\right) - q\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{qB}{2m}\left(p_x + \frac{qB}{2}y\right) - q\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Σύντομο πρόβλημα 4.3. Επιβεβαιώστε, κάνοντας τους σχετικούς υπολογισμούς, ότι οι εξισώσεις Hamilton (4.37) συμπίπτουν με τις εξισώσεις κίνησης του φορτίου (4.24).

Παράδειγμα 4.6. Γράψτε τις εξισώσεις (4.37) ως εξισώσεις κίνησης του οδηγού της κίνησης (R_x, R_y).

Επίλυση. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{qB}{2}\frac{\partial H}{\partial p_y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{qB}{2}\frac{\partial H}{\partial p_x} + q\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Ώστε οι εξισώσεις Hamilton δίνουν

$$\begin{aligned} -\dot{p}_x &= -\frac{qB}{2}\,\dot{y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{qB}{2}\,y - p_x\right) = q\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ -\dot{p}_y &= \frac{qB}{2}\,\dot{x} + q\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{qB}{2}\,x + p_y\right) = -q\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Οι ποσότητες στην ολική παράγωγο σχετίζονται με τις συντεταγμένες του οδηγού της κίνησης: $\frac{qB}{2}\,x + p_y = m\omega_c\, R_x,\ \frac{qB}{2}\,y - p_x = m\omega_c\, R_y$. Ώστε παίρνουμε για τον οδηγό της κίνησης

$$\frac{dR_x}{dt} = \frac{1}{B}\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{dR_y}{dt} = -\frac{1}{B}\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

□

4.1.7 Κίνηση ζεύγους φορτίων σε μαγνητικό πεδίο

Γιά να περιγράψουμε περισσότερα από ένα φορτισμένα σωμάτια τα οποία βρίσκονται σε μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ θα πρέπει να γενικεύσουμε τη Λαγκρανζιανή (4.31). Θεωρούμε N σωμάτια με ίδια μάζα m, φορτία q_i και διανύσματα θέσης (x_i, y_i). Γράφουμε τη Λαγκρανζιανή η οποία είναι το άθροισμα όρων όπως η Λαγκρανζιανή (4.31) για το κάθε φορτίο:

$$L = \frac{1}{2}\,m\,\sum_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \frac{B}{2}\,\sum_i q_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) - V(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) \tag{4.38}$$

όπου ο δείκτης i παίρνει τις τιμές $i = 1, \ldots, N$. Έχουμε επίσης θεωρήσει έναν επιπλέον όρο ο οποίος περιγράφει αλληλεπίδραση μεταξύ των φορτίων. Αυτός είναι η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης $V(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ το οποίο θεωρούμε ότι εξαρτάται μόνο από τις αποστάσεις μεταξύ ζευγών σωματίων

$$|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}. \tag{4.39}$$

Η δυναμική ενέργεια V θα περιέχει ένα άθροισμα όρων, έναν για κάθε ζεύγος αλληλεπιδρώντων φορτίων.

Ας περιοριστούμε στην περίπτωση ενός ζεύγους φορτίων. Η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = \frac{1}{2}\, m \sum_{i=1}^{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \frac{B}{2} \sum_{i=1}^{2} q_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) - V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \tag{4.40}$$

Έχουμε τις τέσσερις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{d}{dt}\,(m\dot{x}_1 - q_1 B\, y_1) = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x_2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\,(m\dot{x}_2 - q_2 B\, y_2) = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) &= \frac{\partial L}{\partial y_1} \Rightarrow \frac{d}{dt}\,(m\dot{y}_1 + q_1 B\, x_1) = -\frac{\partial V}{\partial y_1} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2}\right) &= \frac{\partial L}{\partial y_2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\,(m\dot{y}_2 + q_2 B\, x_2) = -\frac{\partial V}{\partial y_2}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Για τη δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης έχουμε $V = V(\ell)$ όπου

$$\ell = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ισχύει

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = V'(\ell)\frac{\partial \ell}{\partial x_1} = V'(\ell)\frac{x_1 - x_2}{\ell}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = V'(\ell)\frac{\partial \ell}{\partial x_2} = V'(\ell)\frac{x_2 - x_1}{\ell},$$

άρα έχουμε $\partial V/\partial x_1 = -\partial V/\partial x_2$ και επίσης ισχύει $\partial V/\partial y_1 = -\partial V/\partial y_2$. Αν προσθέσουμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις (4.41) και τις δύο πρώτες βρίσκουμε τις εξής δύο σχέσεις

$$\frac{d}{dt}\left(x_1 + x_2 + \frac{\dot{y}_1}{\omega_1} + \frac{\dot{y}_2}{\omega_2}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(y_1 + y_2 - \frac{\dot{x}_1}{\omega_1} - \frac{\dot{x}_2}{\omega_2}\right) = 0, \qquad \omega_i := \frac{q_i B}{m}. \tag{4.42}$$

Ορίζουμε τον *οδηγό της κίνησης* (R_x, R_y) για ένα ζεύγος φορτίων ως

$$R_x := \frac{1}{2}\,(x_1 + x_2) + \frac{\dot{y}_1}{2\omega_1} + \frac{\dot{y}_2}{2\omega_2}, \qquad R_y := \frac{1}{2}\,(y_1 + y_2) - \frac{\dot{x}_1}{2\omega_1} - \frac{\dot{x}_2}{2\omega_2} \tag{4.43}$$

και οι Εξ. (4.42) αποδεικνύουν ότι αυτές οι δύο ποσότητες είναι διατηρήσιμες. Το σημείο (R_x, R_y) δίνει ένα μέτρο της μέσης θέσης του ζεύγους φορτίων το οποίο έχει την ιδιότητα ότι παραμένει σταθερό στο χρόνο απουσία εξωτερικών δυνάμεων.

Παρατήρηση 4.7. *Ένα ζεύγος σωματίων με φορτία q_1, q_2 το οποίο βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κινούνται έτσι ώστε το σημείο που ορίζει ο οδηγός της κίνησής τους* (4.43) *να παραμένει σταθερό.*

Η ενέργεια συστήματος φορτίων είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των φορτίων με την προσθήκη της ενέργειας αλληλεπίδρασης V:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, m \sum_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + V(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) \tag{4.44}$$

και είναι φυσικά μία διατηρήσιμη ποσότητα.

Σύντομο πρόβλημα 4.4. Δείξτε ότι η ενέργεια (4.44) για την περίπτωση δύο φορτίων διατηρείται από τις εξισώσεις κίνησης (4.41).

Παράδειγμα 4.7. Ας δούμε την ειδική περίπτωση όπου οι μάζες των φορτίων είναι μηδενικές, $m = 0$. Θεωρούμε μία δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης της μορφής

$$V(\ell) = -q_1 q_2 \ \ln(\ell). \tag{4.45}$$

Θα βρούμε τις εξισώσεις κίνησης.

Επίλυση. Η δυναμική ενέργεια (4.45) περιγράφει μία απωστική αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο φορτίων. Αυτό συμβαίνει διότι είναι φθίνουσα συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους, άρα η δύναμη θα τείνει να απομακρύνει τα φορτία το ένα από το άλλο (θυμηθείτε ότι η δύναμη ορίζεται σαπό τον νόμο του Νεύτωνα ως η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας με ένα αρνητικό πρόσημο).

Θα γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης για αυτήν την περίπτωση:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -q_1 q_2 \, \frac{x_1 - x_2}{\ell^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y_1} = -q_1 q_2 \, \frac{y_1 - y_2}{\ell^2} = -\frac{\partial V}{\partial y_2}.$$

Οι Εξ. (4.41) γίνονται

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{q_2}{B} \, \frac{y_1 - y_2}{\ell^2}, \qquad & \dot{x}_2 &= -\frac{q_1}{B} \, \frac{y_1 - y_2}{\ell^2}, \\ \dot{y}_1 &= -\frac{q_2}{B} \, \frac{x_1 - x_2}{\ell^2}, \qquad & \dot{y}_2 &= \frac{q_1}{B} \, \frac{x_1 - x_2}{\ell^2}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Θα δούμε σε επόμενη παράγραφο ότι αυτές οι εξισώσεις κίνησης έχουν την ίδια μορφή με τις εξισώσεις κίνησης δύο αλληλεπιδρουσών δινών.

□

4.1.8 Δύναμη τριβής στην κίνηση φορτίου

Ένα φυσικό σύστημα υπόκειται συνήθως σε αλληλεπιδράσεις οι οποίες τείνουν να μειώσουν την ενέργειά του. Αυτήν τη διαδικασία την περιγράφουμε πολλές φορές με την εισαγωγή φαινομενολογικών δυνάμεων τις οποίες ονομάζουμε *δυνάμεις τριβής*.

Παράδειγμα 4.8. Οι εξίσωση κίνησης σωματίου μάζας m το οποίο κάνει αρμονική ταλάντωση υπό την επίδραση δύναμης ελατηρίου ανάλογης της απομάκρυνσής του από θέση ισορροπίας $F = -kx$ σε μία διάσταση είναι $m\ddot{x} + kx = 0$. Αν το σωμάτιο υπόκειται σε δύναμη τριβής, αυτή παρατηρείται συνήθως ότι είναι ανάλογη της ταχύτητάς του. Η εξίσωση κίνησής του τότε είναι

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0,$$

όπου α είναι θετική σταθερά. Η κίνηση που περιγράφει αυτή η εξίσωση είναι ταλάντωση της οποίας το πλάτος μειώνεται με τον χρόνο. □

Για να μελετήσουμε την επίδραση δυνάμεων τριβής στην κίνηση φορτίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο πρέπει να προσθέσουμε έναν κατάλληλο όρο στις Εξ. (4.24). Αυτός μπορεί να έχει τη μορφή $-\alpha\dot{x}$ στο δεξιό μέλος της πρώτης εξίσωσης και $-\alpha\dot{y}$ για τη δεύτερη εξίσωση, όπου α είναι μία θετική σταθερά που ονομάζεται σταθερά τριβής. Γράφουμε τις νέες εξισώσεις ως εξής (Papanicolaou & Tomaras, 1991)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\,\dot{y} + qE - \alpha\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -qB\,\dot{x} - \alpha\dot{y}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Οι δυνάμεις τριβής θα πρέπει (εκ του ορισμού τους) να μειώνουν την ενέργεια ενός κινούμενου σωματίου. Θα δείξουμε ότι η ενέργεια (4.26) του συστήματος μειώνεται με τον χρόνο όταν ισχύουν οι Εξ. (4.47). Παίρνουμε τη χρονική παράγωγο της ενέργειας

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} - qE\dot{x}.$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \dot{x}(qB\,\dot{y} + qE - \alpha\dot{x}) + \dot{y}(-qB\,\dot{x} - \alpha\dot{y}) - qE\dot{x} = -\alpha(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

ώστε βρίσκουμε ότι $\mathcal{E}/dt < 0$ όταν κινείται το σωμάτιο (όταν $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0 \Leftrightarrow \dot{x} = 0 = \dot{y}$).

Παρατήρηση 4.8. *Η ενέργεια ενός κινούμενου φορτισμένου σωματίου σε μαγνητικό πεδίο στο οποίο αρκούνται δυνάμεις τριβής, όπως στις Εξ.* (4.47)*, θα μειώνεται συνεχώς ώσπου να ακινητοποιηθεί το φορτισμένο σωμάτιο.*

Μπορούμε να γράψουμε τις Εξ. (4.47) στην εξής μορφή:

$$\dot{R}_x = -\frac{\alpha}{qB}\,\dot{y}, \qquad \dot{R}_y = -\frac{E}{B} + \frac{\alpha}{qB}\,\dot{x}. \tag{4.48}$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων θα μπορούσε να λυθεί, όμως εδώ θα περιορισθούμε στη συμπεριφορά του συστήματος για μεγάλους χρόνους. Στην τελική κατάσταση (δηλαδή, για $t \to \infty$) θα υποθέσουμε ότι έχουμε $\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = 0$ και άρα έχουμε για τα $\dot{x}, \dot{y}$ τις εξής αλγεβρικές εξισώσεις

$$\dot{y} - \frac{\alpha}{qB}\,\dot{x} = -\frac{E}{B}, \qquad \dot{x} + \frac{\alpha}{qB}\,\dot{y} = 0.$$

Αυτές λύνονται με απλό τρόπο και παίρνουμε

$$\dot{x} = \frac{\alpha(qE)}{(qB)^2 + \alpha^2}, \qquad \dot{y} = -\frac{(qE)(qB)}{(qB)^2 + \alpha^2}. \tag{4.49}$$

Αυτές οι εξισώσεις δίνουν την ταχύτητα του σωματίου όταν αυτή είναι σταθερή, όπως υποθέσαμε ότι συμβαίνει για μεγάλους χρόνους.

Για λόγους ομοιομορφίας με τα αποτελέσματα των προηγουμένων παραγράφων θα μελετήσουμε τον οδηγό της κίνησης (R_x, R_y). Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα για τα $\dot{x}, \dot{y}$ στις εξισώσεις κίνησης για να βρούμε τελικά

$$\dot{R}_x = \frac{\alpha(qE)}{(qB)^2 + \alpha^2}, \qquad \dot{R}_y = -\frac{(qE)(qB)}{(qB)^2 + \alpha^2}. \tag{4.50}$$

Αυτές οι εκφράσεις συμπίπτουν με τις αντίστοιχες παραπάνω για τα $\dot{x}, \dot{y}$.

Αν θεωρήσουμε τώρα ως ταχύτητα του σωματίου το διάνυσμα $\boldsymbol{V} = (\dot{R}_x, \dot{R}_y)$ παρατηρούμε ότι το σωμάτιο κινείται υπό γωνία δ ως προς τον άξονα x, όπου

$$\tan\delta = \frac{\dot{R}_y}{\dot{R}_x} = -\frac{qB}{\alpha}. \tag{4.51}$$

Για την περίπτωση που η σταθερά τριβής είναι πολύ μικρή (θεωρούμε $\alpha \to 0$) βρίσκουμε $\delta = \pi/2$, δηλαδή κίνηση κατά τον άξονα y όπως είδαμε και σε προηγούμενη παράγραφο, στην αρχική μελέτη για κίνηση του φορτίου χωρίς τριβή. Όταν όμως έχουμε τριβή ($\alpha \neq 0$) τότε το σωμάτιο κινείται υπό γωνία $0 < \delta < \pi/2$.

4.2 Δυναμική δινών σε ρευστά και στη συμπυκνωμένη ύλη

4.2.1 Δίνες σε ρευστά και στη συμπυκνωμένη ύλη

Συνήθεις δίνες σε ρευστά

Οι δίνες είναι φυσικές οντότητες οι οποίες εμφανίζονται και παίζουν σημαντικό ρόλο σε πάρα πολλά φυσικά συστήματα. Οι πιο γνωστές δίνες είναι αυτές που εμφανίζονται στα ρευστά. Στη μηχανική ρευστών είναι γνωστό ότι οι δίνες (fluid vortices) παίζουν κεντρικό ρόλο στην περιγραφή και κατανόηση τόσο την κίνησης των ρευστών όσο και πιο περίπλοκων φαινομένων όπως η τυρβώδης ροή. Στην ατμόσφαιρα είναι γνωστοί οι στρόβιλοι οι οποίοι εμφανίζονται σε μικρές αλλά και σε εξαιρετικά μεγάλες διαστάσεις (Saffman, 1992).

Η περιγραφή της κίνησης των ρευστών και άρα και της δυναμικής των δινών βασίζεται στις εξισώσης της μηχανικής ρευστών οι οποίες είναι μη-γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Απλοποίηση της περιγραφής δινών προκύπτει στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι κάθε δίνη είναι μακριά από κάθε άλλη και άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σημαντική κεντρική περιοχή της δίνης είναι μικρού μεγέθους σε σύγκριση με την απόσταση μεταξύ τους. Τότε μπορούμε να περιγράψουμε προσεγγιστικά τη θέση κάθε δίνης με ένα σημείο. Λέμε τότε ότι έχουμε την προσέγγιση *σημειακών δινών*.

Στην περιγραφή δινών πολύ χρήσιμη είναι μία ποσότητα η οποία λέγεται *στροβιλότητα* (vorticity, γ) και της οποίας το ολοκλήρωμα στην επιφάνεια του ρευστού

$$\Gamma = \int \gamma dx dy$$

δίνει την ισχύ της δίνης. Επιπλέον, μπορεί να δειχθεί ότι για μία δίνη οι ποσότητες

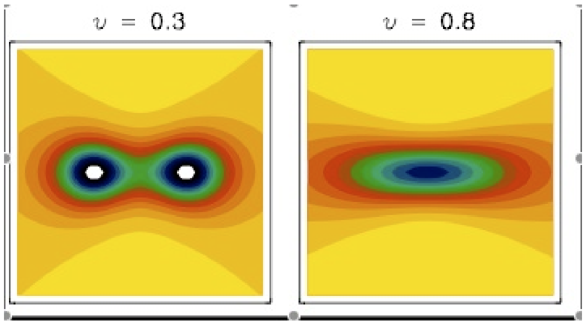
$$I_x = \int x\gamma \, dxdy, \qquad I_y = \int y\gamma \, dxdy \tag{4.52}$$

είναι διατηρήσιμες. Αυτές οι ποσότητες μπορούν να θεωρηθούν ως ένας ορισμός της θέσης μίας δίνης (μετά από κατάλληλη κανονικοποίηση). Στην περίπτωση που θεωρούμε τη δίνη σημειακή μπορούμε εύκολα να δούμε ότι τα παραπάνω ολοκληρώματα δίνουν τη θέση της σημειακής δίνης πολλαπλασιασμένη με την ισχύ της.

Δίνες σε υπερρευστά

Ορισμένα ρευστά επιδεικνύουν ασυνήθιστες ιδιότητες όταν βρίσκονται σε ιδιαίτερα χαμηλές θερμοκρασίες. Η πιο εντυπωσιακή ίσως ιδιότητα τους είναι ότι ρέουν χωρίς η κίνησή τους να επιβραδύνεται από φαινόμενα τριβής. Υγρά που παρουσιάζουν αυτή την ιδιότητά ονομάζονται *υπερρευστά*. Τα σημαντικότερα υπερρευστά είναι το στοιχείο Ήλιο σε θερμοκρασίες $T < 2.7$ Kelvin το οποίο βρίσκεται τότε σε υγρή κατάσταση. Επίσης, υπερρευστά είναι οι ατμοί αλκαλικών μετάλλων (Li, Na, K, Rb, Cs) οι οποίοι παγιδεύονται με μαγνητικά πεδία και ψύχονται σε θερμοκρασίες $T \sim 10 - 100$ nanoKelvin με οπτικά (LASER) και άλλα μέσα.

Μία επιπλέον ιδιότητα των υπερρευστών είναι ότι οι δίνες που δημιουργούνται σε αυτά έχουν ισχύ η οποία είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας βασικής ποσότητας ισχύος. Τέτοιες δίνες ονομάζονται κβαντισμένες (quantized vortices). Η ιδιότητα αυτή των δινών σχετίζεται πάντως με την ιδιότητα της ροής χωρίς τριβή. Τα υπερρευστά και οι δίνες τους μελετώνται με τη βοήθεια των νόμων της κβαντικής φυσικής. Σε ορισμένες περιπτώσεις το υπερρευστό καθώς και οι δίνες τους μπορούν να περιγραφούν από ένα μιγαδικό πεδίο $\Psi(x, y)$ το οποίο ονομάζεται *κυματοσυνάρτηση* του υπερρευστού. Η κυματοσυνάρτηση υπακούει μη-γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Οι εξισώσεις όμως αυτές διαφέρουν πολύ από εκείνες για τα συνήθη ρευστά στα οποία αναφερθήκαμε παραπάνω.



Σχήμα 4.1: Αριθμητική προσομοίωση ζευγών δινών σε υπερρευστό (ο χρωματικός κώδικας αποδίδει την πυκνότητα του υπερρευστού).

Ένα σημαντικό σημείο είναι ότι η στροβιλότητα στα υπερρευστά συνδέεται με τοπολογικά χαρακτηριστικά του πεδίου που περιγράφει το υπερρευστό, δηλαδή της κυματοσυνάρτησής του. Η ολική ισχύς $\Gamma = \int \gamma dxdy$ παίρνει διάκριτες τιμές και έχει την ερμηνεία ενός τοπολογικού αριθμού. Διατηρήσιμες ποσότητες ανάλογες των (4.52) υπάρχουν και σε αυτή την περίπτωση.

Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση των σημειακών δινών και στο παρόν σύστημα. Έτσι μπορούμε να απλοποιήσουμε σημαντικά τη μελέτη της δυναμικής τους.

Μαγνητικές δίνες

Παρά το ότι συνδέουμε συνήθως τις δίνες με τα ρευστά, η αλήθεια είναι ότι οι δίνες, ως μαθηματικές δομές διανυσματικών πεδίων, εμφανίζονται σε πολλά διαφορετικά συστήματα. Ένα παράδειγμα είναι τα μαγνητικά υλικά στα οποία έχουμε τις λεγόμενες *μαγνητικές δίνες*.

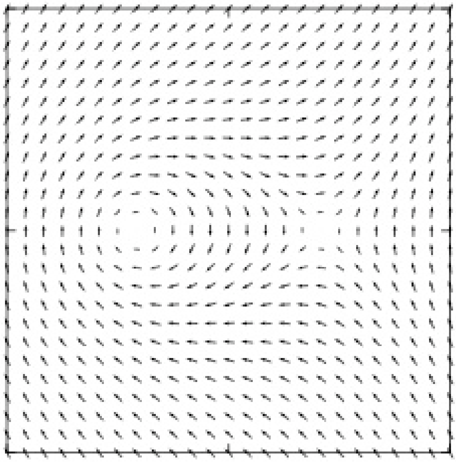
Τα μαγνητικά συστήματα τα οποία έχουν ιδαίτερο εργαστηριακό ενδιαφέρον είναι υπέρλεπτα υμένια (φιλμ) από σιδηρομαγνητικά υλικά. Η μικροσκοπική δομή σε ένα μαγνητικό υλικό περιγράφεται από ένα διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{m}(x, y)$ το οποίο παριστάνει τη μαγνήτιση του υλικού σε κάθε σημείο (x, y) του υμενίου. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι τι δομές σχηματίζει η μαγνήτιση στο υλικό και ποιά είναι η εξέλιξή τους στον χρόνο. Για παράδειγμα, αυτό το ερώτημα αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσον αφορά στον μαγνητικό δίσκο ενός υπολογιστή όπου η πληροφορία αποθηκεύεται σε κάποιες ειδικές δομές της μαγνήτισης, ενώ για τα γραφτεί ή να σβηστεί μία πληροφορία θα πρέπει οι δομές αυτές να μεταβληθούν με ελεγχόμενο τρόπο.

Μία αριθμητική προσομοίωση μαγνητικών δομών οι οποίες χαρακτηρίζονται ως *μαγνητικές δίνες* παρουσιάζονται στο σχήμα 4.2. Βλέπουμε ότι στην περίπτωση των μαγνητικών δινών δεν υπάρχει ροή πραγματικού ρευστού. Συμβαίνει όμως να μπορούμε να ορίσουμε μία ποσότητα q η οποία έχει ομοιότητες με τη στροβιλότητα (γ) στα ρευστά. Η q δίνει μεταβολές της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$ στον χώρο (χωρικές παραγώγους της $\boldsymbol{m}$) και σχετίζεται άμεσα με κάποια τοπολογικά χαρακτηριστικά της μαγνήτισης. Η ισχύς της δίνης $Q = \int q\, dxdy$ είναι ένας ακέραιος αριθμός, όπως συμβαίνει και με την ισχύ των δινών σε υπερρευστά.

Από τη θεωρία προκύπτουν διατηρήσιμες ποσότητες της μορφής

$$I_x = \int xq\, dxdy, \qquad I_y = \int yq\, dxdy \tag{4.53}$$

οι οποίες είναι απολύτως ανάλογες με τις (4.52). Μπορεί να δειχθεί ότι, στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι οι μαγνητικές δίνες είναι σημειακές, η δυναμική τους συμπεριφορά μοντελοποιείται από εξισώσεις ανάλογες με αυτές των δινών σε ρευστά.



Σχήμα 4.2: Αριθμητική προσομοίωση ζεύγους μαγνητικών δινών. Τα βελάκια αποδίδουν τον προσανατολισμό των μαγνητικών ροπών των ατόμων, δηλαδή ενός διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{m}$.

4.2.2 Δυναμική σημειακών δινών

Οι εξισώσεις κίνησης για αλληλεπιδρώσες δίνες, στην προσέγγιση που αυτές θεωρηθούν σημειακές, δόθηκαν από τον Helmholtz (Helmholtz, 1858). Στο μοντέλο που εισήγαγε ο Helmholtz θεωρεί ότι η στροβιλότητα περιορίζεται μέσα σε ορισμένες περιοχές που έχουν σχήμα ευθύγραμμων κυλίνδρων με ελάχιστη διάμετρο, οι οποίες λέγονται vortex filaments (νήματα δινών). Κάθε μία από αυτές τις δίνες χαρακτηρίζεται από την ισχύ της γ και σχετίζεται με την *κυκλοφορία* του ρευστού γύρω από το κέντρο της δίνης. Θα περιοριστούμε σε ροές σε δύο διαστάσεις, δηλαδή, θα θεωρήσουμε ότι η συμπεριφορά της δίνης (του vortex filament) μέσα στο υγρό ακολουθεί τη συμπεριφορά της δίνης την οποία παρατηρούμε στην επιφάνεια του υγρού. Σε αυτή την προσέγγιση λέμε ότι έχουμε *σημειακές δίνες*.

Κάθε σημειακή δίνη περιγράφεται πλήρως από τη θέση της στο επίπεδο (x, y), ώστε ο στόχος της μελέτης είναι η κίνηση της θέσης τους στο επίπεδο. Ξεκινάμε θεωρώντας δύο δίνες οι οποίες βρίσκονται σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους, ώστε αλληλεπιδρούν μέσω της κίνησης του ρευστού ανάμεσά τους. Οι εξισώσεις κίνησης για δύο αλληλεπιδρώσες δίνες στο επίπεδο δίνονται από τις (Kirchhoff, 1876; Aref, Rott, & Thomann, 1992)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\gamma_2 \frac{y_1 - y_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}, \qquad & \dot{x}_2 &= -\gamma_1 \frac{y_2 - y_1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}, \\ \dot{y}_1 &= \gamma_2 \frac{x_1 - x_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}, \qquad & \dot{y}_2 &= \gamma_1 \frac{x_2 - x_1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}, \end{aligned} \tag{4.54}$$

όπου $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1), \boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2)$ είναι οι θέσεις των δύο δινών στο επίπεδο, γ_1, γ_2 είναι οι ισχύες τους και

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{4.55}$$

είναι η απόσταση μεταξύ των δινών.

Θα γράψουμε την παρακάτω συνάρτηση η οποία έχει ειδική σημασία σε αυτό το σύστημα:

$$\mathcal{E}(\ell) = -\gamma_1\gamma_2 \ln|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|. \tag{4.56}$$

Η $\mathcal{E}$ εξαρτάται από τη σχετική θέση μεταξύ των δινών και έχει την ιδιότητα ότι διατηρείται κατά την κίνηση:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial y_1}\dot{y}_1 + \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial y_2}\dot{y}_2 = 0. \tag{4.57}$$

Λέμε ότι η $\mathcal{E}$ δίνει το δυναμικό αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός ζεύγους δινών και μάλιστα αποτελεί την ενέργεια του συστήματος. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι το σύστημα αυτό έχει μόνο δυναμική ενέργεια (η ενέργειά του δεν έχει κινητικό όρο) και αυτή προέρχεται από αλληλεπιδράσεις μεταξύ δινών.

Μία απομονωμένη δίνη

Ας περιοριστούμε στην περιγραφή μίας απομονωμένης δίνης. Τις εξισώσεις κίνησης μπορούμε να τις εξαγάγουμε από τις (4.54) θέτωντας $\gamma_2 = 0$ και ακολούθως (για την απλοποίηση του συμβολισμού) $x = x_1,\ y = y_1$. Οι εξισώσεις κίνησης για τις μεταβλητές x, y είναι

$$\dot{x} = 0, \qquad \dot{y} = 0. \tag{4.58}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν τη μορφή ιδιαίτερα απλών νόμων διατήρησης. Οι λύσεις τους είναι $x =$ σταθ., $y =$ σταθ. και οδηγούν στο συμπέρασμα ότι μία απομονωμένη δίνη (δηλαδή μία δίνη που δεν δέχεται δυνάμεις) είναι πάντα στάσιμη σε ένα ρευστό.

Οι απλοί αυτοί νόμοι διατήρησης βρίσκονται σε αντιστοιχία με τους νόμους διατήρησης για τα I_x, I_y στις Εξ. (4.52) για τους οποίους μιλήσαμε στη γενική εισαγωγή για τις δίνες. Αυτή είναι μία πρώτη ένδειξη ότι το μοντέλο που χρησιμοποιούμε αποδίδει βασικές δυναμικές ιδιότητες των δινών.

Σύντομο πρόβλημα 4.5. *(Μη-στατικότητα ζεύγους δινών)* Δείξτε ότι για $\gamma_1 \neq 0 \neq \gamma_2$ οι Εξ. (4.54) δεν έχουν στατικές λύσεις, δηλαδή, δεν έχουν λύσεις της μορφής $(x_1, y_1) =$ σταθ., $(x_2, y_2) =$ σταθ.

4.2.3 Ζεύγος αλληλεπιδρουσών δινών: Διατηρήσιμες ποσότητες

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4.54) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\gamma_1\dot{x}_1 + \gamma_2\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) = 0 \\
\gamma_1\dot{y}_1 + \gamma_2\dot{y}_2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2) = 0,
\end{aligned}$$

δηλαδή, οι ακόλουθες είναι διατηρήσιμες ποσότητες:

$$I_x := \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2, \qquad I_y := \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2. \tag{4.59}$$

Παρατηρούμε ότι αυτές οι ποσότητες είναι ανάλογες των ποσοτήτων (4.52) οι οποίες δίνουν τη θέση μίας δίνης στη μηχανική ρευστών και επίσης των (4.53) για τη θέση μίας μαγνητικής δίνης. Άρα η απλοποιημένη θεωρία μας δίνει ένα από τα βασικά αποτελέσματα της πλήρους θεωρίας (είτε στη μηχανική ρευστών είτε στη θεωρία για μαγνητικά υλικά, είτε και σε άλλες θεωρίες).

Μπορούμε να ορίσουμε τη μέση θέση $\boldsymbol{R} = (R_x, R_y)$ για ζεύγος δινών ως

$$R_x = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \qquad R_y = \frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \tag{4.60}$$

Αυτές είναι οι ποσότητες I_x, I_y κανονικοποιημένες ως προς την ολική ισχύ $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$:

$$R_x = \frac{I_x}{\Gamma}, \qquad R_y = \frac{I_y}{\Gamma}.$$

Ο ορισμός του είναι ανάλογος του ορισμού κέντρου μάζας για ένα σύστημα υλικών σωμάτων. Το διάνυσμα $\boldsymbol{R}$ μπορεί να ονομαστεί *οδηγός της κίνησης* (guiding center) σε αναλογία με τις αντίστοιχες ποσότητες στην περίπτωση κίνησης φορτίων σε μαγνητικό πεδίο.

Παρατήρηση 4.9. *Ο οδηγός της κίνησης για ζεύγος δινών στην Εξ.* (4.60) *είναι διατηρήσιμο μέγεθος. Βλέπουμε λοιπόν ότι ένα ζεύγος δινών κινείται έτσι ώστε η μέση θέση του συστήματος να παραμένει σταθερή.*

Παρατήρηση 4.10. *Ο νόμος διατήρησης του οδηγού κίνησης αποκλείει την περίπτωση δύο όμοιες δίνες ($\gamma_1 = \gamma_2$) να κινούνται σε ελεύθερη κίνηση προς την ίδια κατεύθυνση.*

Ο ορισμός (4.60) του οδηγού της κίνησης είναι αποδεκτός μόνο όταν $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$. Η αστοχία του ορισμού για τον οδηγό κίνησης όταν $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ δείχνει ότι αυτή είναι μιά ειδική περίπτωση και θα πρέπει να μετεληθεί χωριστά. φυσικά, σε αυτήν την περίπτωση δεν ισχύουν τα συμπεράσματα που αναφέραμε στις παραπάνω παρατηρήσεις.

Για το μοντέλο που μελετάμε είναι επίσης γνωστό ότι η ποσότητα

$$M = \frac{\gamma_1}{2}\left(x_1^2 + y_1^2\right) + \frac{\gamma_2}{2}\left(x_2^2 + y_2^2\right) \tag{4.61}$$

είναι διατηρήσιμη και είναι γνωστό ότι αυτή αντιστοιχεί στη στροφορμή του συστήματος δινών. Ο νόμος διατήρησης αποδεικνύεται με άμεσο υπολογισμό

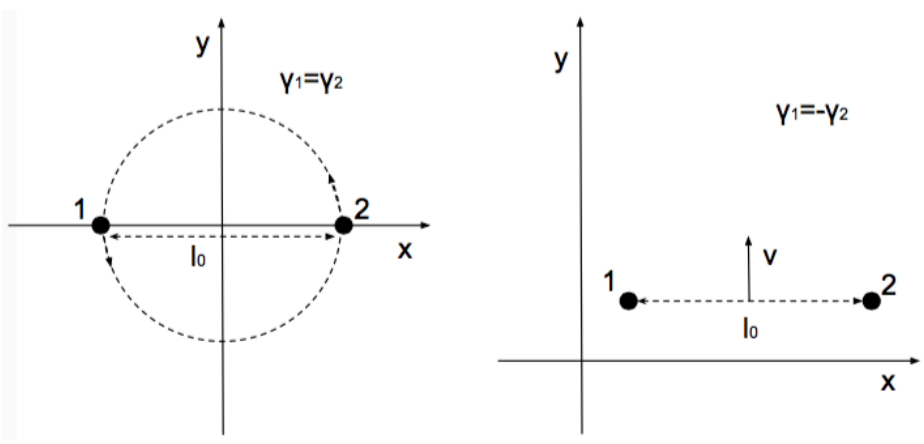
$$\frac{dM}{dt} = \gamma_1(x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1) + \gamma_2(x_2\dot{x}_2 + y_2\dot{y}_2) = 0$$

όπου για τις χρονικές παραγώγους χρησιμοποιήσαμε τις Εξ. (4.54).

Στα επόμενα θα μελετήσουμε δύο ειδικές περιπτώσεις χρησιμοποιώντας τις διατηρήσιμες ποσότητες τις οποίες είδαμε σε αυτήν την παράγραφο.

Ερώτηση κατανόησης 4.2. Εάν υπάρξει εξωτερική δύναμη τότε είναι δυνατόν να μην διατηρείται ο οδηγός της κίνησης και ενδεχομένως να έχουμε συνολική μετατόπιση του συστήματος των δινών. Πώς θα μπορούσαν να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης ώστε να περιλαμβάνουν μία εξωτερική δύναμη;

4.2.4 Ζεύγος αλληλεπιδρουσών δινών: Τροχιές



Σχήμα 4.3: (Αριστερά) Ένα ζεύγος δινών με $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ κάνει κυκλική κίνηση (σημειώνεται με διακεκομμένη γραμμή) με γωνιακή συχνότητα $\omega = 2/l_0^2$. (Δεξιά) Ένα ζεύγος δινών με $\gamma_1 = -\gamma_2 = 1$ κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $v = 1/l_0$. (l_0 είναι η απόσταση μεταξύ των δινών.)

Περίπτωση $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$

Θεωρούμε δύο δίνες οι οποίες είναι όμοιες, δηλαδή έχουν την ίδια ισχύ και για απλότητα παίρνουμε $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Οι διατηρήσιμες ποσότητες όπως δίνονται στις εξισώσεις (4.56), (4.59), (4.61) είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= -\frac{1}{2}\ln\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right] \\
I_x &= x_1 + x_2 \\
I_y &= y_1 + y_2 \\
M &= \frac{1}{2}\,(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Παρατήρηση 4.11. *Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την ύπαρξη ενός ασυνήθιστα μεγάλου αριθμού διατηρήσιμων ποσοτήτων και να μελετήσουμε το πρόβλημα της κίνησης των δινών χωρίς να χρειαστεί να λύσουμε και πάλι τις εξισώσεις κίνησης.*

Οι I_x και I_y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και επίσης η τιμή τους μπορεί να αλλάξει με απλή μετάθεση της αρχής του συστήματος συντεταγμένων. Εκλέγουμε λοιπόν την αρχή του συστήματος συντεταγμένων έτσι ώστε $I_x = 0,\ I_y = 0$. Ώστε ισχύουν οι

$$x_2 = -x_1, \qquad y_2 = -y_1. \tag{4.63}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$\mathcal{E} = -\ln\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right] \Rightarrow (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = \ell_0^2 \tag{4.64}$$

Βλέπουμε ότι η απόσταση μεταξύ των δινών παραμένει σταθερή και στη σταθερή τιμή της δώσαμε το σύμβολο ℓ_0. Με τη βοήθεια των (4.63) η απόσταση μεταξύ των δύο δινών γράφεται

$$\ell_0 = 2\sqrt{x_1^2+y_1^2} = 2\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

Παράδειγμα 4.9. Δείξτε ότι η διατήρηση της στροφορμής M δεν δίνει επιπλέον αποτελέσματα από αυτά που ήδη πετύχαμε με τις $\mathcal{E}, I_x, I_y$.

Επίλυση. Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4.63) γράφουμε τη στροφορμή ως

$$M = x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{4}\,\ell_0^2.$$

Άρα ο νόμος διατήρησης της M μας δίνει το αποτέλεσμα που ήδη γνωρίζουμε από τον νόμο διατήρησης της $\mathcal{E}$.

□

Συμπερασματικά, η Εξ. (4.63) δείχνει ότι οι δίνες βρίσκονται (για όλους τους χρόνους) σε αντιδιαμετρικές θέσεις ως προς ένα σημείο το οποίο έχει εκλεγεί ως αρχή των αξόνων. Η Εξ. (4.64) δείχνει ότι βρίσκονται σε σταθερή μεταξύ τους απόσταση $\ell_0/2$ σε κάθε χρονική στιγμή. Άρα οι δίνες κινούνται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και διάμετρο ℓ_0.

Για να βρούμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής θα πρέπει να ανατρέξουμε στις εξισώσεις κίνησης, αφού οι διατηρήσιμες ποσότητες δεν περιέχουν τον χρόνο. Θεωρούμε τις δύο από τις Εξ. (4.54) οι οποίες δίνουν τις χρονικές παραγώγους των μεταβλητών x_1, y_1 και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (4.63), (4.64) τις οποίες βρήκαμε από τους νόμους διατήρησης. Έτσι, βρίσκουμε για τη θέση (x_1, y_1) τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\gamma_2\,\frac{y_1-y_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^2} \Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{2y_1}{\ell_0^2} \\
\dot{y}_1 &= \gamma_2\,\frac{x_1-x_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^2} \Rightarrow \dot{y}_1 = \frac{2x_1}{\ell_0^2}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Παίρνοντας τη χρονική παράγωγο της πρώτης και χρησιμοποιώντας τη δεύτερη βρίσκουμε

$$\ddot{y}_1 = \frac{2}{\ell_0^2}\dot{x}_1 \Rightarrow \ddot{y}_1 + \frac{4}{\ell_0^4}y_1 = 0. \tag{4.66}$$

Μία ανάλογη εξίσωση μπορούμε να εξάγουμε και για την x_1, καθώς επίσης και για τις x_2, y_2. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν περιοδική κίνηση με γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \frac{2}{\ell_0^2}. \tag{4.67}$$

Παρατήρηση 4.12. *Δύο δίνες με $\gamma_1 = \gamma_2$ κινούνται σε κυκλική τροχιά με γωνιακή συχνότητα αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της σταθερής μεταξύ τους αποστάσεως.*

Σύντομο πρόβλημα 4.6. Ποία είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ζεύγους για $\gamma_1 \neq 1$;

Ερώτηση κατανόησης 4.3. Το ζεύγος δινών αυτής της παραγράφου περιστρέφεται αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα; Για ποιό ζεύγος δινών θα ήταν δυνατόν να έχουμε περιστροφή αντίθετης φοράς;

Περίπτωση $\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = -1$

Θεωρούμε δύο δίνες οι οποίες έχουν ίση και αντίθετη ισχύ και για απλότητα παίρνουμε $\gamma_1 = -\gamma_2 = 1$. Οι διατηρήσιμες ποσότητες όπως δίνονται στις εξισώσεις (4.56), (4.59), (4.61) είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \ln\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right]\\
I_x &= x_1 - x_2\\
I_y &= y_1 - y_2\\
M &= \frac{1}{2}\left[(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)\right].
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Με κατάλληλη στροφή του συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να εκλέξουμε τον άξονα x να είναι παράλληλος στην ευθεία που περνάει από τις δύο δίνες (στην αρχική τους θέση). Επίσης, παίρνουμε τον άξονα y έτσι ώστε να διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δύο δίνες. Άρα, αν ℓ_0 είναι η απόσταση μεταξύ των δινών τότε αυτές βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $(-\ell_0/2, 0), (\ell_0/2, 0)$. Έτσι έχουμε επιτύχει να ισχύει

$$y_1 = y_2 \Rightarrow I_y = 0. \tag{4.69}$$

Αφού η I_y διατηρείται, θα έχουμε ότι $y_1 = y_2$ για κάθε χρονική στιγμή. Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = I_x^2 + I_y^2,$$

άρα η απόσταση μεταξύ των δινών είναι σταθερή και θέτουμε $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = \ell_0^2$. Η διατηρήσιμη ποσότητα $\mathcal{E}$ είναι ισοδύναμη με την πρόταση που μόλις δείξαμε, ότι η απόσταση ℓ_0 παραμένει σταθερή. Άρα η διατηρήσιμη ποσότητα $\mathcal{E}$ περιέχεται στις I_x, I_y. Ειδικότερα, αφού έχουμε εκλέξει $I_y = 0$ έχουμε

$$\ell_0^2 = I_x^2.$$

Για την τελευταία διατηρήσιμη ποσότητα, τη στροφορμή M, έχουμε

$$M = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{2}(x_1-x_2)(x_1+x_2) = \frac{I_x}{2}(x_1+x_2),$$

ώστε συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα $x_1 + x_2$ είναι επίσης διατηρήσιμη ποσότητα. Συγκεντρώνοντας το τελευταίο αποτέλεσμα και τη διατήρηση του I_x έχουμε

$$x_1 - x_2 = \text{σταθ.},\quad x_1 + x_2 = \text{σταθ.} \Rightarrow x_1 = \text{σταθ.},\quad x_2 = \text{σταθ.} \tag{4.70}$$

δηλαδή, οι συντεταγμένες x_1, x_2 παραμένουν αμετάβλητες κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Συμπερασματικά, η Εξ. (4.70) δείχνει ότι οι δίνες δεν κινούνται κατά τη διεύθυνση του άξονα x (δηλαδή, κατά τη διεύθυνση της ευθείας που τις συνδέει). Είναι δυνατόν να κινούνται μόνο κατά τη διεύθυνση y (δηλαδή, κάθετα στην ευθεία που τις συνδέει).

Για να βρούμε την ταχύτητα κίνησης του ζεύγους θα πρέπει να ανατρέξουμε στις εξισώσεις κίνησης. Παρατηρούμε ότι οι ταχύτητες των δύο δινών είναι ίσες (αφού $y_1 = y_2$ για κάθε χρονική στιγμή) και θέτουμε $\upsilon = \dot{y}_1 = \dot{y}_2$. Οπότε από τη δεύτερη Εξ. (4.54) έχουμε

$$\dot{y}_2 = \gamma_1 \frac{x_2 - x_1}{\ell^2} \Rightarrow \upsilon = -\frac{I_x}{\ell_0^2} \Rightarrow \upsilon = -\frac{1}{I_x}.$$

Στην περίπτωση που μελετάμε είναι $I_x = -\ell_0$, ώστε οι δίνες έχουν ταχύτητα

$$\upsilon = \frac{1}{\ell_0}$$

με φορά προς τον θετικό άξονα y.

Παρατήρηση 4.13. *Δύο δίνες με $\gamma_1 = -\gamma_2$ κινούνται με την ίδια ταχύτητα κάθετα στο ευθύγραμμο τμήμα που τις συνδέει. Η ταχύτητά τους είναι σταθερή και αντιστρόφως ανάλογη της σταθερής απόστασης μεταξύ των δινών.*

Η κατεύθυνση της ταχύτητας εξαρτάται από το πρόσημο του $I_x = x_1 - x_2$. Αν αντιστρέψουμε τις θέσεις των δινών αντιστρέφεται και η φορά της κίνησης.

Σύντομο πρόβλημα 4.7. Ποία είναι η ταχύτητα του ζεύγους για $\gamma_1 = -\gamma_2 \neq 1$;

Γενική περίπτωση $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$

Θεωρούμε δύο δίνες με ισχύες $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ και $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$. Θα θέλαμε να βρούμε την τροχιά τους χρησιμοποιώντας μόνο τις διατηρήσιμες ποσότητες. Θεωρούμε τις I_x, I_y ως σταθερές και γράφουμε τις

$$x_2 = \frac{I_x}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} x_1, \qquad y_2 = \frac{I_y}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} y_1. \tag{4.71}$$

Επίσης, από τη διατήρηση της ενέργειας $\mathcal{E} = -\gamma_1\gamma_2 \ln(|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|)$ προκύπτει ότι $|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = \ell_0$, όπου ℓ_0 είναι η σταθερή απόσταση μεταξύ των δύο δινών και μπορούμε να γράψουμε

$$\ell_0^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \tag{4.72}$$

Αντικαθιστούμε τις Εξ. (4.71) στην τελευταία και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&\left[\left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) x_1 - \frac{I_x}{\gamma_2}\right]^2 + \left[\left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) y_1 - \frac{I_y}{\gamma_2}\right]^2 = \ell_0^2 \Rightarrow \\
&[(\gamma_1 + \gamma_2)x_1 - I_x]^2 + [(\gamma_1 + \gamma_2)y_1 - I_y]^2 = \gamma_2^2\, \ell_0^2 \Rightarrow \\
&\left[x_1 - \frac{I_x}{\gamma_1 + \gamma_2}\right]^2 + \left[y_1 - \frac{I_y}{\gamma_1 + \gamma_2}\right]^2 = \left(\frac{\gamma_2\, \ell_0}{\gamma_1 + \gamma_2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τον ορισμό του οδηγού κίνησης (4.60), θέτουμε την *ολική ισχύ* του συστήματος

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

και έχουμε την τροχιά της δίνης γ_1 σε πιο συμπαγή μορφή:

$$(x_1 - R_x)^2 + (y_1 - R_y)^2 = \left(\frac{\gamma_2\, \ell_0}{\Gamma}\right)^2. \tag{4.73}$$

Δηλαδή, έχουμε για τη δίνη γ_1 κίνηση επάνω σε κύκλο με κέντρο τον οδηγό κίνησης και ακτίνα $A_1 = \gamma_2\ell_0/\Gamma$. Ομοίως, για τη δίνη γ_2 βρίσκουμε

$$(x_2 - R_x)^2 + (y_2 - R_y)^2 = \left(\frac{\gamma_1\,\ell_0}{\Gamma}\right)^2, \tag{4.74}$$

Παρατήρηση 4.14. *Δύο δίνες για τις οποίες $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$ κάνουν κυκλική κίνηση με κέντρο τον κοινό οδηγό κίνησης (R_x, R_y) αλλά με διαφορετικές ακτίνες. Ο λόγος των ακτίνων των διαγραφόμενων κύκλων είναι $|\gamma_2/\gamma_1|$, όπου η ισχυρότερη δίνη (αυτή με το μέγιστο $|\gamma|$) διαγράφει κύκλο με μικρότερη ακτίνα.*

Για να βρούμε τη συχνότητα περιστροφής χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα ότι $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \ell_0$ και αντικαθιστούμε τις Εξ. (4.71) στις εξισώσεις κίνησης. Βρίσκουμε ότι το σημείο (x_1, y_1) κάνει κυκλική κίνηση με κέντρο τον οδηγό κίνησης και γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \frac{\Gamma}{\ell_0^2}. \tag{4.75}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι το (x_2, y_2) κινείται με την ίδια γωνιακή συχνότητα.

Ερώτηση κατανόησης 4.4. Πώς συνδέεται το γενικό αποτελέσματα για τη γωνιακή συνχότητα περιστροφής δινών (4.75) με το αντίστοιχο ειδικότερο αποτέλεσμα (4.67);

Σύντομο πρόβλημα 4.8. Σχεδιάστε τις τροχιές για δύο δίνες με $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2$.

4.2.5 Σύστημα N αλληλεπιδρουσών δινών

Θα θεωρήσουμε ένα σύστημα από N δίνες με ισχύες $\gamma_i,\ i = 1, \ldots, N$, οι οποίες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η θέση κάθε δίνης είναι $(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, N$, ώστε χρειαζόμαστε $2N$ μεταβλητές για την πλήρη περιγραφή του συστήματος. Θεωρούμε ότι οι δίνες αλληλεπιδρούν κατά ζεύγη με δυναμικό της μορφής (4.56). Ώστε, για το πλήρες σύστημα, θα έχουμε ενέργεια αλληλεπίδρασης η οποία είναι γενίκευση της (4.56) (Newton, 2001):

$$\mathcal{E} = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1,\,j<i}^{N} \gamma_i\gamma_j\ \ln(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|), \tag{4.76}$$

όπου $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ είναι η απόσταση μεταξύ δύο τυχόντων δινών i και j. Στο παραπάνω διπλό άθροισμα έχουμε επιλέξει να αθροίσουμε σε όλα τα $i = 1, \ldots, N$, όμως αθροίζουμε μόνο στα $j < i$. Αυτό εξασφαλίζει δύο συνθήκες: κάθε ζεύγος i, j λαμβάνεται υπόψιν μία φορά στο άθροισμα και επίσης εξαιρείται ο όρος για $i = j$ (δεν υπάρχει αλληλεπίδραση κάθε δίνης με τον εαυτό της).

Οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν σε αναλογία με το σύστημα εξισώσεων (4.54) για ζεύγος δινών. Έχουμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\sum_{j=1,j\neq i}^{N} \gamma_j \frac{y_i - y_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2} \\ \dot{y}_i &= \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \gamma_j \frac{x_i - x_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2} \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{4.77}$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων μας λέει ότι κάθε δίνη i αλληλεπιδρά με κάθε μία από τις άλλες δίνες κατά τον τρόπο που περιγράψαμε στην περίπτωση ζεύγους δινών και οι αλληλεπιδράσεις προστίθενται.

Μπορούμε να δείξουμε ότι γενικεύσεις των διατηρήσιμων ποσοτήτων που είδαμε για την περίπτωση δύο δινών αποτελούν διατηρήσιμες ποσότητες στο σύστημα των N δινών. Αυτές είναι η ενέργεια (4.76), επίσης οι

$$I_x = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i x_i, \qquad I_y = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i y_i \tag{4.78}$$

και τέλος η ποσότητα (η οποία μπορεί να δειχθεί ότι έχει την έννοια της στροφορμής)

$$M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i (x_i^2 + y_i^2). \tag{4.79}$$

Σύντομο πρόβλημα 4.9. Δείξτε ότι οι ποσότητες (4.78) διατηρούνται στον χρόνο από τις εξισώσεις κίνησης (4.77).

4.2.6 Σύστημα τριών δινών

Θα μελετήσουμε ένα σύστημα τριών δινών με ισχύες $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (Gröbli, 1877; Aref et al., 1992). Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι δίνες βρίσκονται στις κορυφές τριγώνου στις θέσεις $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1),\ \boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2),\ \boldsymbol{r}_3 = (x_3, y_3)$. Οι εξισώσεις κίνησης είναι οι (4.77) τις οποίες θα εφαρμόσουμε για $N = 3$, ώστε παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -\gamma_2 \frac{y_1 - y_2}{C_3^2} + \gamma_3 \frac{y_3 - y_1}{C_2^2}, &\qquad \frac{dy_1}{dt} &= \gamma_2 \frac{x_1 - x_2}{C_3^2} - \gamma_3 \frac{x_3 - x_1}{C_2^2}, \\
\frac{dx_2}{dt} &= -\gamma_3 \frac{y_2 - y_3}{C_1^2} + \gamma_1 \frac{y_1 - y_2}{C_3^2}, &\qquad \frac{dy_2}{dt} &= \gamma_3 \frac{x_2 - x_3}{C_1^2} - \gamma_1 \frac{x_1 - x_2}{C_3^2}, \\
\frac{dx_3}{dt} &= -\gamma_1 \frac{y_3 - y_1}{C_2^2} + \gamma_2 \frac{y_2 - y_3}{C_1^2}, &\qquad \frac{dy_3}{dt} &= \gamma_1 \frac{x_3 - x_1}{C_2^2} - \gamma_2 \frac{x_2 - x_3}{C_1^2}.
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό

$$C_1 = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3|, \quad C_2 = |\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1|, \quad C_3 = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| \tag{4.81}$$

για το μήκος των πλευρών του τριγώνου.

Προκύπτει ότι το σύστημα (4.80) για τις τρεις δίνες είναι πλήρως ολοκληρώσιμο, δηλαδή, όλες οι λύσεις του μπορούν να δωθούν σε κλειστή μορφή (Gröbli, 1877; Aref, 2007). Δεν θα δώσουμε εδώ την πλήρη ολοκλήρωση του συστήματος, όμως θα αναφερθούμε σε κάποιες εξισώσεις και λύσεις οι οποίες έχουν ιδιαίτερα απλές μορφές.

Η πρώτη σημαντική απλοποίηση των έξι εξισώσεων (4.80) προκύπτει αν γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης για τα μήκη των πλευρών του τριγώνου C_1, C_2 και C_3. Παραγωγίζουμε λοιπόν τις ποσότητες στις Εξ. (4.81) και χρησιμοποιούμε τις πλήρεις εξισώσεις (4.80), ώστε τελικά βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(C_1^2) &= 4\gamma_1 A \left(\frac{1}{C_2^2} - \frac{1}{C_3^2} \right) \\
\frac{d}{dt}(C_2^2) &= 4\gamma_2 A \left(\frac{1}{C_3^2} - \frac{1}{C_1^2} \right) \\
\frac{d}{dt}(C_3^2) &= 4\gamma_3 A \left(\frac{1}{C_1^2} - \frac{1}{C_2^2} \right).
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Η ποσότητα A είναι η επιφάνεια του τριγώνου την οποία θεωρούμε με θετικό πρόσημο αν οι δίνες $(1, 2, 3)$ εμφανίζονται αριστερόστροφα στο επίπεδο ενώ τη θεωρούμε με αρνητικό πρόσημο αν εμφανίζονται δεξιόστροφα. Γνωρίζουμε από την Γεωμετρία ότι το μέτρο της επιφάνειας A δίνεται ως

$$|A| = [C(C - C_1)(C - C_2)(C - C_3)]^{1/2}, \qquad C := \frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3), \tag{4.83}$$

δηλαδή, εκφράζεται χρησιμοποιώντας μόνο τα μήκη των πλευρών του τριγώνου. Έχουμε το σημαντικό αποτέλεσμα για τη δυναμική των τριών δινών, ότι οι εξισώσεις (4.82) είναι ένα κλειστό σύστημα ως προς C_1, C_2, C_3 δηλαδή περιέχουν μόνο αυτές τις τρεις ποσότητες (τις αποστάσεις μεταξύ των δινών),.

Το αρχικό σύστημα εξισώσεων περιέχει συνολικά έξι ποσότητες και βέβαια η θέση στον χώρο του συστήματος τριών δινών δεν μπορούν να προσδιορισθούν μόνο από τη γνώση των πλευρών του τριγώνου C_1, C_2, C_3. Θα χρειαζόμασταν επιπλέον τη θέση του τριγώνου στον χώρο και γωνίες για να προσδιορίσουμε τον προσανατολισμό του.

Όμως, οι εξισώσεις (4.82) δείχνουν ότι μπορούμε να μελετήσουμε τη χρονική εξέλιξη του τριγώνου με τρόπο ανεξάρτητο από την κίνηση ή περιστροφή του στον χώρο. Αυτό μπορεί να μας βοηθήσει ιδιαίτερα να βρούμε ειδικές λύσεις για το σύστημα. Μία τέτοια λύση είναι η

$$C_1 = C_2 = C_3 : \text{σταθερά}, \tag{4.84}$$

η οποία βέβαια δείχνει ότι τρεις δίνες η οποίες βρίσκονται αρχικά ($t = 0$) στις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου θα συνεχίσουν να ισαπέχουν για κάθε χρόνο $t > 0$.

Περισσότερα αποτελέσματα θα μας βοηθήσουνε να βγάλουμε οι διατηρήσιμες ποσότητες τις οποίες ήδη γνωρίζουμε ότι έχει το σύστημα. Τέτοιες διατηρήσιμες ποσότητες είναι οι (4.78) οι οποίες τώρα γράφονται

$$I_x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3, \quad I_y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3. \tag{4.85}$$

Αν θεωρήσουμε μία συνολική μετατόπιση των δινών κατά διάνυσμα (c_1, c_2), δηλαδή θεωρήσουμε ότι οι θέσεις των δινών γίνονται $(x_i, y_i) \to (x_i + c_1, y_i + c_2)$ τότε έχουμε ότι

$$I_x \to I_x + \Gamma c_1, \qquad I_y \to I_y + \Gamma c_2 \tag{4.86}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ για τη συνολική ισχύ του συστήματος των δινών. Στην περίπτωση $\Gamma \neq 0$ είναι σαφές ότι μία συνολική μετατόπιση του συστήματος δεν μπορεί να υπάρξει, αφού τότε θα παραβιάζονταν οι νόμοι διατήρησης (4.85). Ώστε, αυτό που περιμένουμε από το τρίγωνο των δινών είναι να περιστρέφεται γύρω από μία σταθερή θέση. Στην περίπτωση όμως $\Gamma = 0$ μία μετατόπιση του συστήματος των δινών δεν αποκλείεται. Μάλιστα, αυτό πραγματικά συμβαίνει λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ τους. Η περιγραφή της δυναμικής για τις τρεις δίνες που μόλις δώσαμε βρίσκεται σε πλήρη αναλογία με την περιστροφική κίνηση δύο δινών με $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$ και τη μεταφορική κίνησή τους στην περίπτωση $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ που είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο. Βέβαια, για την επιβεβαίωση των παραπάνω θα πρέπει να λύσουμε το πλήρες σύστημα των εξισώσεων (4.80) είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά.

4.2.7 Χαμιλτονιανή περιγραφή

Αν θεωρήσουμε την ενέργεια αλληλεπίδρασης των N δινών (4.76) παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις κίνησης (4.77) μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\gamma_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y_i}, \qquad \gamma_i \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i}; \quad \alpha = 1, 2, \ldots N. \tag{4.87}$$

Αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως η χαμιλτονιανή μορφή των εξισώσεων κίνησης αν θεωρήσουμε ως ζεύγη κανονικών μεταβλητών τα $(x_i, \gamma_i y_i)$.

Μπορούμε να δούμε ότι, σε συμφωνία με τον χαμιλτονιανό φορμαλισμό, το σύστημα έχει ως διατηρήσιμες ποσότητες την ολική γραμμική ορμή

$$P_x = -\sum_i \gamma_i x_i, \qquad P_y = \sum_i \gamma_i y_i \tag{4.88}$$

και την ολική στροφορμή (4.79).

4.2.8 Λαγκρανζιανή περιγραφή

Η Λαγκρανζιανή για ένα σύστημα N δινών μπορεί να γραφεί ως εξής

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{\gamma_i}{2} \left(y_i \dot{x}_i - x_i \dot{y}_i \right) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j<i}^{N} \gamma_i \gamma_j \ln |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|. \tag{4.89}$$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι αυτή η Λαγκρανζιανή περιγράφει το σύστημα δινών αφού μπορούμε να εξαγάγουμε τις εξισώσεις κίνησης ως τις εξισώσεις Euler-Lagrange για την παραπάνω Λαγκρανζιανή:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x_i} \Rightarrow \dot{y}_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \gamma_j \, \frac{x_i - x_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right) &= \frac{\partial L}{\partial y_i} \Rightarrow \dot{x}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \gamma_j \, \frac{y_i - y_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2}. \end{aligned} \tag{4.90}$$

Επίσης μπορούμε να εξαγάγουμε από τον γενικό τύπο της λαγκρανζιανής μηχανικής την ενέργεια, η οποία προκύπτει να είναι η Χαμιλτονιανή (4.76) του συστήματος.

Η Λαγκρανζιανή για την περιγραφή δινών (4.89) έχει σημαντικές ομοιότητες με τη Λαγκρανζιανή για την περιγραφή κίνησης φορτίων σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στην Εξ. (4.31). Ο κινητικός όρος της Εξ. (4.31) όμως λείπει στην Εξ. (4.31). Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να πάρει τη Λαγκρανζιανή για τις δίνες από αυτή για τα φορτία θέτοντας τη μάζα m να είναι μηδέν. Στη Λαγκρανζιανή (4.89) έχουμε περιλάβει έναν όρο που περιγράφει αλληλεπίδραση μεταξύ των δινών. Ένα εξωτερικό δυναμικό το οποίο θα επιδρούσε στις δίνες θα μπορούσε να προστεθεί στη Λαγκρανζιανή με τρόπο ανάλογο του δυναμικού αλληλεπίδρασης.

Παρατήρηση 4.15. *Η ισχύς της δίνης* Γ *έχει τώρα τον ρόλο που είχε το γινόμενο* qB *(φορτίο επί μαγνητικό πεδίο) στην περίπτωση των φορτίων.*

4.3 Μελέτη

4.3.1 Ασκήσεις

Άσκηση 4.1. *Τροχιά φορτίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο*
Ας υποθέσουμε ότι ένα φορτισμένο σωμάτιο μάζας m και φορτίου q βρίσκεται σε ομογενές σταθερό μαγνητικό πεδίο B. Έχει αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 := \dot{x}(t=0),\ \dot{y}_0 := \dot{y}(t=0)$ και βρίσκεται στο σημείο $x_0 := x(t=0),\ y_0 := y(t=0)$. Βρείτε την τροχιά του. [*Υπόδειξη*: Υπολογίστε την ποσότητα $(x-R_x)^2+(y-R_y)^2$.]

Άσκηση 4.2. *Ευθύγραμμη τροχιά φορτίου σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο*
Έστω ένα φορτισμένο σωμάτιο το οποίο βρίσκεται μέσα σε κάθετα μεταξύ τους ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο τα οποία είναι σταθερά και ομογενή. Βρείτε μια ειδική λύση (για κατάλληλες αρχικές συνθήκες) η οποία περιγράφει ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση του σωματίου.

Άσκηση 4.3. *Χαμιλτονιανή φορτίου σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο*
Ένα σωμάτιο μάζας m με φορτίο q βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο B το οποίο παράγεται από διανυσματικό δυναμικό $\boldsymbol{A}$ ως $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ και σε ηλεκτρικό πεδίο το οποίο παράγεται από βαθμωτό δυναμικό Φ ως $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$. Βρείτε ότι η Χαμιλτονιανή του δίνεται ως

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\Phi.$$

Άσκηση 4.4. *Εξισώσεις Euler-Lagrange για ζεύγος αλληλεπιδρώντων φορτίων*
Γράψτε το σύστημα των εξισώσεων (4.41) για ζεύγος φορτίων σε σταθερό μαγνητικό πεδίο θεωρώντας δυναμικό αλληλεπίδρασης

$$V = -q_1 q_2 \ln|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|.$$

(α) Ορίστε νέες παραμέτρους ώστε να γράψετε το σύστημα σε πιο απλή μορφή. (β) Γράψτε ένα ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων 1ης τάξεως.

Άσκηση 4.5. *Σύστημα N αλληλεπιδρώντων φορτίων*
Γενικεύστε τις εξισώσεις (4.41) για να περιγράψετε ένα σύστημα N αλληλεπιδρώντων φορτίων σε μαγνητικό πεδίο. Βρείτε διατηρήσιμες ποσότητες για αυτό το σύστημα (ενέργεια, οδηγός της κίνησης). [*Υπόδειξη*: Το δυναμικό μπορεί να δίνεται από ένα άθροισμα από όρους της μορφής $V(\ell_{ij})$ όπου (i,j) είναι όλα τα δυνατά ζευγάρια φορτίων και ℓ_{ij} η αποστάσεις μεταξύ τους. Ακολούθως αρκεί να χρησιμοποιήσετε αθροίσματα στα δεξιά μέλη των εξισώσεων, για κάθε αλληλεπιδρόν ζεύγος φορτίων.]

Άσκηση 4.6. *Κίνηση φορτίου με τριβή*
Θεωρήστε την περίπτωση ενός φορτίου το οποίο βρίσκεται σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο και υπόκειται σε τριβή. Βρείτε αριθμητικά και σχεδιάστε την τροχιά του σωματίου για κάποιες συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες της επιλογής σας και για μία σταθερά τριβής $\alpha > 0$. [*Υπόδειξη*: θεωρήστε σταθερά και ομογενή πεδία κάθετα μεταξύ τους.]

Άσκηση 4.7. *Τροχιά ζεύγους δινών*
(α) Θεωρήστε δύο δίνες με ισχύες γ_1, γ_2 και $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$. Βρείτε αναλυτικά την τροχιά τους χρησιμοποιώντας τις διατηρήσιμες ποσότητες.
(β) Έστω δίνες με $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$ οι οποίες βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $(x_1, y_1) = (1, 0)$ και $(x_2, y_2) = (-1, 0)$. Βρείτε την τροχιά τους.
(γ) Έστω δίνες με $\gamma_1 = 2\gamma_2 = 2$ οι οποίες βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $(x_1, y_1) = (1, 0)$ και $(x_2, y_2) = (-1, 0)$. Βρείτε την τροχιά τους.

Άσκηση 4.8. *Τροχιά ζεύγους δινών Kelvin*
(α) Θεωρήστε δύο δίνες με ισχύες γ_1, γ_2 και $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$. Βρείτε αναλυτικά την τροχιά τους χρησιμοποιώντας τις διατηρήσιμες ποσότητες.
(β) Έστω δίνες με $\gamma_1 = -\gamma_2 = 1$ οι οποίες βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $(x_1, y_1) = (1, 0)$ και $(x_2, y_2) = (-1, 0)$. Λύστε τις εξισώσεις κίνησης και έτσι βρείτε την τροχιά τους.

Άσκηση 4.9. *Εξισώσεις κίνησης ζεύγους δινών στο μιγαδικό επίπεδο*
Γράψτε τις Εξ. (4.54) χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές μεταβλητές $z_k = x_k + iy_k, \quad k = 1, 2$.

Άσκηση 4.10. *Εξισώσεις κίνησης ζεύγους δινών πολικές συντεταγμένες*
Γράψτε τις Εξ. (4.54) σε πολικές συντεταγμένες για $\gamma_1 = \gamma_2$. Βρείτε τη γωνιακή συχνότητα περιστροφής του ζεύγους.

Άσκηση 4.11. *Δίνη σε εξωτερικό πεδίο*
(α) Γράψτε τη (γενική) Λαγκρανζιανή για μία δίνη σε εξωτερικό πεδίο το οποίο δίνεται από δυναμικό. (β) Θεωρήστε παραβολικό δυναμικό το οποίο να παγιδεύει τη δίνη και γράψτε την (ειδικότερη) Λαγκρανζιανή. (γ) Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις κίνησης. (δ) Γράψτε κώδικα ο οποίος να λύνει τις εξισώσεις κίνησης για ένα γενικό δυναμικό. Σχεδιάστε λύσεις για ένα δυναμικό της επιλογής σας. [*Υπόδειξη*: Προσθέσθε έναν νέο κατάλληλο όρο δυναμικού στην ενέργεια είτε στη Λαγκρανζιανή και εξαγάγεται τις νέες εξισώσεις κίνησης.]

Άσκηση 4.12. *Δύναμη τριβής για δίνες*
(α) Γράψτε την (γενική) Λαγκρανζιανή για μία δίνη σε εξωτερικό δυναμικό. (β) Θεωρήστε δυναμικό το οποίο να δίνει μία σταθερή δύναμη και γράψτε την (ειδικότερη) Λαγκρανζιανή. Βρείτε την τροχιά της δίνης. (γ) Ακολούθως, θεωρήστε δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας και γράψτε τις εξισώσεις κίνησης. (δ) Δώστε λύσεις των εξισώσεων κίνησης και βρείτε την τροχιά της δίνης (δηλαδή, $y = y(x)$).

Άσκηση 4.13. *Εξισώσεις κίνησης για τρεις δίνες*
Εξάγετε τις εξισώσεις κίνησης (4.80) για τρεις αλληλεπιδρώσες δίνες.

Άσκηση 4.14. *Τρεις δίνες: Δυναμική πλευρών τριγώνου*
Εξάγετε τις δυναμικές εξισώσεις (4.82) για τις αποστάσεις μεταξύ τριών αλληλεπιδρουσών δινών (δηλαδή, για τις πλευρές του τριγώνου που σχηματίζουν οι τρεις δίνες).

4.3.2 Εργασίες

Εργασία 4.1. *Κίνηση φορτίου σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο*
Κατασκευάστε αριθμητικό κώδικα στον οποίο θα δίνονται οι αρχικές συνθήκες και θα παράγεται η τροχιά ενός σωματίου με φορτίο q και μάζα m το οποίο βρίσκεται σε σταθερά και ομογενή ηλεκτρικό $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, 0)$ και μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$. Σχεδιάστε (α) την τροχιά του φορτίου και (β) την τροχιά του οδηγού κίνησης. (γ) Εξετάστε ειδικές περιπτώσεις. [*Υπόδειξη*: Θεωρήστε ότι τα πεδία είναι κάθετα μεταξύ τους και δείτε τις Εξ. (4.16). Θεωρήστε την περίπτωση στην οποία το σωμάτιο παραμένει στο επίπεδο το κάθετο στο μαγνητικό πεδίο.]

Βιβλιογραφία: (Landau & Lifshitz, 1985)

Εργασία 4.2. *Ζεύγος φορτίων σε μαγνητικό πεδίο*
Θεωρήστε ένα σύστημα δύο φορτίων q_1, q_2 σε ομογενές μαγνητικό πεδίο και το δυναμικό αλληλεπίδρασης μεταξύ τους

$$V = -q_1 q_2 \ln |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|.$$

(α) Γράψτε κώδικα ο οποίος να επιλύει το πρόβλημα αρχικών τιμών για το σύστημα των εξισώσεων. (β) Σχεδιάστε τις τροχιές του συστήματος αφού επιλέξετε ένα ζεύγος φορτίων q_1, q_2 και αρχικές συνθήκες. (γ) Σχεδιάστε τις συντεταγμένες κάθε φορτίου με τον χρόνο. (δ) Ελέγξτε ότι στον αριθμητικό σας υπολογισμό οι ποσότητες οι οποίες είναι θεωρητικά διατηρήσιμες, πραγματικά διατηρούνται.

Εργασία 4.3. *Κίνηση ζεύγους δινών*
Θεωρήστε ένα σύστημα δύο αλληλεπιδρουσών δινών γ_1, γ_2 με δυναμικό αλληλεπίδρασης

$$V = -\gamma_1 \gamma_2 \ln |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|.$$

(α) Γράψτε κώδικα ο οποίος να επιλύει το πρόβλημα αρχικών τιμών για το σύστημα των εξισώσεων. (β) Σχεδιάστε τις τροχιές του συστήματος για μία περίπτωση όπου $|\gamma_1| \neq |\gamma_2|$. (γ) Σχεδιάστε τις συντεταγμένες κάθε δίνης με τον χρόνο. (δ) Ελέγξτε ότι στον αριθμητικό σας υπολογισμό οι ποσότητες οι οποίες είναι θεωρητικά διατηρήσιμες, πραγματικά διατηρούνται.

Βιβλιογραφία: (Aref, 2007).

Εργασία 4.4. *Εξισώσεις κίνησης μαγνητικών δινών*
Στην περίπτωση μαγνητικών δινών η ισχύς γ παίρνει μόνο ακέραιες (και ορισμένες φορές ημιακέραιες) τιμές και το δυναμικό αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός ζεύγους δινών έχει τη μορφή

$$V = -\kappa_1\kappa_2 \ln|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|.$$

όπου κ_1, κ_2 είναι ακέραιοι αριθμοί (οι οποίοι σχετίζονται με ειδικότερα χαρακτηριστικά της δομής κάθε δίνης) για τους οποίους ισχύει $\gamma_i = \pm\kappa_i,\ i = 1, 2$. Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί είναι από φυσική άποψη πραγματοποιήσιμοι, άρα υπάρχουν τέσσερις δυνατές περιπτώσεις για δύο μαγνητικές δίνες με δεδομένα γ_1, γ_2. (α) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή και εξάγετε εξισώσεις κίνησης. (β) Δώστε τον ορισμό του οδηγού κίνησης. (γ) Μελετήστε την τροχιά ενός ζεύγος μαγνητικών δινών το οποίο δεν είναι δυνατόν να προγματοποιηθεί για συνήθεις δίνες.

Βιβλιογραφία: (Komineas & Papanicolaou, 2010).

Εργασία 4.5. *Τρεις δίνες*
Θεωρήστε ένα σύστημα τριών δινών $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. (α) Γράψτε την Λαγκρανζιανή και τις εξισώσεις κίνησης. (β) Λύστε αριθμητικά το σύστημα των εξισώσεων (4.80) για τρεις δίνες με $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ και επιβεβαιώστε τις εξισώσεις (4.81). (γ) Για την ειδική λύση που οι δίνες βρίσκονται στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου δείτε από τις εξισώσεις ότι το σύστημα βρίσκεται σε περιστροφική κίνηση, επιβεβαιώστε αριθμητικά αυτή τη λύση και βρείτε την εξάρτηση της γωνιακής συχνότητας περιστροφής από την ολική ισχύ $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. (δ) Μετετήστε άλλες ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα, μελετήστε αριθμητικά τις τροχιές για την περίπτωση στην οποία δύο δίνες με $\gamma_1 = -\gamma_2$ βρίσκονται αρχικά κοντά ενώ η τρίτη δίνη $\gamma_3 = \gamma_1$ βρίσκεται σε μία απόσταση από το ζεύγος.

Βιβλιογραφία: (Aref et al., 1992).

Εργασία 4.6. *Τρεις μαγνητικές δίνες*
Θεωρήστε τρεις μαγνητικές δίνες όπως στην Εργασία 4.4. Μελετήστε το πρόβλημα ανάλογα με την Εργασία 4.5. Επίσης, εντοπίστε και μελετήστε μία ειδική περίπτωση η οποία δεν θα ήταν πραγματοποιήσιμη για τρεις συνήθεις δίνες.

Βιβλιογραφία: (Komineas & Papanicolaou, 2010).

Εργασία 4.7. *N δίνες*
Θεωρήστε ένα σύστημα N δινών $\gamma_i,\ i = 1, 2, \ldots, N$. (α) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή για ένα τυχόν δυναμικό αλληλεπίδρασης. (β) Εξάγετε τις εξισώσεις κίνησης αν οι δίνες αλληλεπιδρούν ανά ζεύγη με δυναμικό $V = -\gamma_i\gamma_j \ln|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$, όπου $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ είναι η απόσταση μεταξύ ζεύγους (i, j). (γ) Δείξτε ότι οι

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i, \qquad I_y = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i,$$

είναι διατηρήσιμες ποσότητες και ορίστε τον οδηγό κίνησης. (δ) Βρείτε τη διατηρήσιμη ποσότητα που δίνει την ενέργεια του συστήματος. (ε) Γράψτε κώδικα ο οποίος να δίνει τις τροχιές των δινών. Σχεδιάστε τις τροχιές για ένα ζεύγος δινών και επιβεβαιώστε αριθμητικά τη διατήρηση του οδηγού κίνησης. (στ) Δείτε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, π.χ., θεωρήστε ένα σύστημα δύο ζευγών δινών για τις οποίες $\gamma_1 = -\gamma_2,\ \gamma_3 = -\gamma_4$. [*Υπόδειξη:* Δείτε την Λαγκρανζιανή (4.89).]

Βιβλιογραφία: (Aref, 2007).

Βιβλιογραφία

Aref, H. (2007). Point vortex dynamics: A classical mathematics playground. *J. Math. Phys.*, *48*, 065401.

Aref, H., Rott, N., & Thomann, H. (1992). Gröbli's solution of the three-vortex problem. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, *24*, 1. doi: 10.1146/annurev.fl.24.010192.000245

Goldstein, H., Poole Jr, C. P., & Safko, J. L. (2001). *Classical mechanics* (3rd ed.). Pearson.

Griffiths, D. (1996). *Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Gröbli, W. (1877). *Spezielle probleme über die bewegung geradliniger paralleler wirbelfäden*. Zürich: Zürcher und Furrer.

Helmholtz, H. (1858). über integrale der hydrodynamischen gleichungen, welche den wirbelbewegungen entsprechen. *J. Reine Angew. Math.*, *55*, 33.

Kirchhoff. (1876). *Vorlesungen über mathematische physik. mechanik*. Leipzig: Teubner.

Komineas, S., & Papanicolaou, N. (2010). Gröbli solution for three magnetic vortices. *Journal of Mathematical Physics*, *51*(4). Retrieved from `http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/51/4/10.1063/1.3393506` doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.3393506

Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1985). *The classical theory of fields* (Fourth ed.). Pergamon Press.

Newton, P. K. (2001). *The n-vortex problem*. Springer.

Papanicolaou, N., & Tomaras, T. N. (1991). Dynamics of magnetic vortices. *Nucl. Phys. B*, *360*, 425.

Saffman, P. G. (1992). *Vortex dynamics*. Cambridge University Press.