

Παράρτημα

Σύνοψη

Στο παράρτημα αυτό θα παρουσιαστούν βασικές έννοιες των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου απαραίτητες για την κατανόηση της λειτουργίας των υδραυλικών και πνευματικών συστημάτων. Οι έννοιες αυτές είναι απαραίτητες για τον επιτυχημένο σχεδιασμό αλγορίθμων ελέγχου για δυναμικά συστήματα που περιλαμβάνουν υδραυλικούς και πνευματικούς ενεργοποιητές. Επίσης στο παράρτημα αυτό θα παρουσιαστούν βασικές εντολές για την προσομοίωση, τη συστημική ανάλυση γραμμικών δυναμικών συστημάτων και τη ανάπτυξη αλγορίθμων ελέγχου με το λογισμικό MATLAB και το λογισμικό MATHEMATICA.

Προαπαιτούμενη γνώση

Η προαπαιτούμενη γνώση για τη κατανόηση του κεφαλαίου είναι οι βασικές γνώσεις των Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου και λογισμικών προσομοίωσης ([1]-[8]).

Παράρτημα - Ανάλυση Έλεγχος και Προσομοίωση Δυναμικών Συστημάτων

A.1. Συστημική ανάλυση δυναμικών συστημάτων

A.1.1. Συστήματα ανοικτού βρόχου

Ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί με διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x(t), u(t), \xi(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x(t), u(t), \xi(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x(t), u(t), \xi(t))\end{aligned}\tag{A.1}$$

ή ισοδύναμα περιγράφεται στο χώρο κατάστασης ως εξής

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \xi(t))\tag{A.2}$$

όπου $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ είναι το διάνυσμα καταστάσεων του συστήματος, $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ είναι το

διάνυσμα εισόδων του συστήματος και $\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_c(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{c \times 1}$ είναι το διάνυσμα των διαταραχών. Η

συνάρτηση f μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική συνάρτηση. Για τις περιγραφές της μορφής (A.1) ο αναγνώστης μπορεί να βρει πληροφορίες για την ανάλυση και τη σχεδίαση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου στις αναφορές [1]-[3]. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις f είναι γραμμικές, οι διαφορικές εξισώσεις (A.1) μπορούν να γραφούν ισοδύναμα στο χώρο κατάστασης ως ακολούθως

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D\xi(t)\tag{A.3}$$

$$y(t) = Cx(t)\tag{A.4}$$

όπου $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ είναι το διάνυσμα εξόδων του συστήματος, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ο πίνακας του

συστήματος, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ είναι ο πίνακας της εισόδου, $D \in \mathbb{R}^{n \times c}$ είναι ο πίνακας των διαταραχών και $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ είναι ο πίνακας των εξόδων του συστήματος. Για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων θα πρέπει να είναι γνωστές οι αρχικές συνθήκες του συστήματος, δηλαδή θα πρέπει να είναι γνωστό το διάνυσμα

$$x(0^-) = \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \\ \vdots \\ x_n(0^-) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

καθώς και τα διανύσματα των εισόδων και των διαταραχών του συστήματος.

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace και τα δυο μέλη των εξισώσεων (A.3) και (A.4) (για τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace βλ. Πίνακα 9.1) προκύπτει η ακόλουθη περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας

$$X(s) = \left[(sI_n - A)^{-1} B \mid (sI_n - A)^{-1} D \right] \begin{bmatrix} U(s) \\ \Xi(s) \end{bmatrix} + (sI_n - A)^{-1} x(0^-) \quad (\text{A.6})$$

όπου $X(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του διανύσματος κατάστασης, $U(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του διανύσματος εισόδου και $\Xi(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του διανύσματος διαταραχών. Η σχέση (A.6) οδηγεί στον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου $Y(s)$ ως εξής

$$Y(s) = \left[C(sI_n - A)^{-1} B \mid C(sI_n - A)^{-1} D \right] \begin{bmatrix} U(s) \\ \Xi(s) \end{bmatrix} + C(sI_n - A)^{-1} x(0^-) \quad (\text{A.7})$$

Μηδενίζοντας τις αρχικές συνθήκες προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ανοικτού βρόχου

$$H_{op}(s) = \left[C(sI_n - A)^{-1} B \mid C(sI_n - A)^{-1} D \right] \quad (\text{A.8})$$

Πίνακας A.1. Βασικοί Μετασχηματισμοί Laplace

Συνεχής χρόνος	Μιγαδική συχνότητα
$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$\dot{f}(t)$	$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0^-)$
$f^{(n)}(t)$	$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$
$u_\beta(t)$	$\mathcal{L}\{u_\beta(t)\} = \frac{1}{s}$
e^{-at}	$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$
$\frac{1}{a} \sin(at)$	$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{a} \sin(at)\right\} = \frac{1}{s^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$

$$f(t) + g(t) \quad \mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = F(s) + G(s)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος ανοικτού βρόχου ορίζεται ως εξής

$$p_{op}(s) = \det(sI_n - A) \quad (\text{A.9})$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ονομάζονται πόλοι του συστήματος.

Ορισμός A.1. Το σύστημα ανοικτού βρόχου που περιγράφεται από το χώρο κατάστασης (A.3) και (A.4) είναι ευσταθές αν όλοι οι πόλοι συστήματος ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\operatorname{Re}\{\rho_i\}_{i=1,2,\dots,n} < 0 \quad (\text{A.10})$$

όπου ρ_i είναι οι πόλοι του συστήματος. Με $\operatorname{Re}\{\bullet\}$ συμβολίζεται το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού.

□

Ορισμός 9.2: Το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ του συστήματος είναι ελέγξιμο αν υπάρχει τμηματικά συνεχής είσοδος $u[t_0, t_f]$ που θα οδηγήσει το διάνυσμα κατάστασης από την αρχική του τιμή $x(t_0)$ στην τελική του τιμή $x(t_f)$ σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $t_f - t_0 > 0$.

□

Η ιδιότητα της ελεγχιμότητας μπορεί να ελεγχθεί με το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα A.1: Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες

- I. Το διάνυσμα $x(t)$ του συστήματος είναι ελέγξιμο
- II. Ο βαθμός του πίνακα ελεγχιμότητας $U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ είναι n .

■

Ορισμός 9.3: Το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ του συστήματος είναι παρατηρήσιμο στο διάστημα $[t_0, t_f]$ όταν γνωρίζοντας τα διανύσματα εισόδου $u[t_0, t_f]$ και εξόδου $y[t_0, t_f]$ το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών $x(t_0)$ μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως

□

Η ιδιότητα της παρατηρησιμότητας μπορεί να ελεγχθεί με το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα A.2: Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες

- I. Το διάνυσμα $x(t)$ του συστήματος είναι παρατηρήσιμο

Π. Ο βαθμός του πίνακα παρατηρησιμότητας $V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ είναι n .

■

A.1.1 Συστήματα κλειστού βρόχου με στατική ανατροφοδότηση εξόδου

Έστω το σύστημα ανοικτού βρόχου μιας εισόδου και μιας εξόδου που περιγράφεται με τις ακόλουθες εξισώσεις στο χώρο κατάστασης

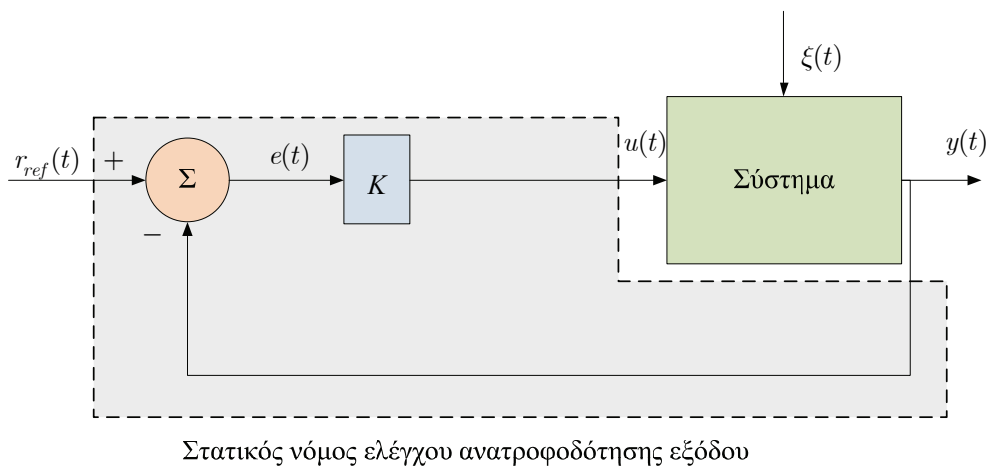
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{A.11})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{A.12})$$

Στο σύστημα (A.11), (A.12) ($m = p = 1$) εφαρμόζεται ο ακόλουθος στατικός νόμος ανατροφοδότησης εξόδου (βλ. Σχήμα A.1)

$$u(t) = -Ky(t) + r_{ref}(t) \quad (\text{A.13})$$

όπου $K \in \mathbb{R}$ και όπου $r_{ref}(t)$ είναι η εξωτερική εντολή ελέγχου.



Σχήμα A.1. Σύστημα κλειστού βρόχου με στατική ανατροφοδότηση εξόδου

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace και τα δυο μέλη των εξισώσεων (A.3), (A.4) και (A.13) και μετά από αλγεβρικές πράξεις προκύπτει η ακόλουθη περιγραφή του συστήματος κλειστού βρόχου στο πεδίο της συχνότητας

$$X(s) = (sI_n - A + BCK)^{-1} BU(s) + (sI_n - A + BCK)^{-1} x(0^-) \quad (\text{A.14})$$

Η σχέση (A.14) οδηγεί στον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου $Y(s)$ ως ακολούθως

$$Y(s) = C(sI_n - A + BCK)^{-1} BU(s) + C(sI_n - A + BCK)^{-1} x(0^-) \quad (\text{A.15})$$

Μηδενίζοντας τις αρχικές συνθήκες προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου

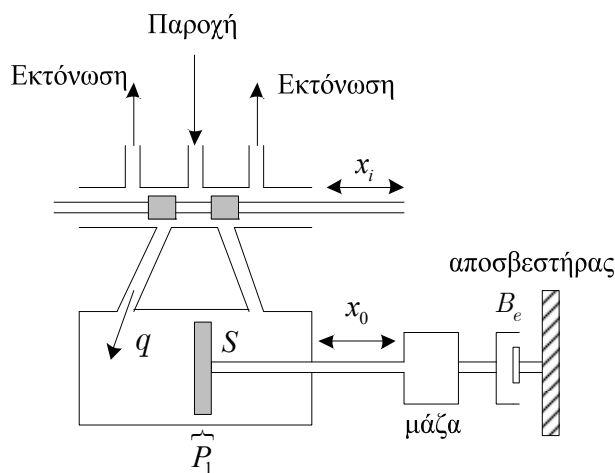
$$H_{cl}(s) = C(sI_n - A + BCK)^{-1}B \quad (\text{A.16})$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου και υπολογίζεται από τον τύπο

$$p_{cl}(s) = \det(sI_n - A + BCK) \quad (\text{A.17})$$

Το στατικό κέρδος K μπορεί να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας το **κριτήριο Ruth** έτσι ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ευσταθές.

Παράδειγμα Α.1. Έστω ο υδραυλικός ενεργοποιητής (βαλβίδα – έμβολο) που παρουσιάζεται στο Σχήμα Α.2



Σχήμα Α.2. Υδραυλικός ενεργοποιητής (βαλβίδα – έμβολο)

Η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{Q_0}{s \left\{ \frac{VM}{B_m S} s^2 + \left(\frac{K_L M}{S} + \frac{VB_e}{B_m S} \right) s + \left(\frac{S^2 + K_L B_e}{S} \right) \right\}} = \frac{K_0 \omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)}$$

όπου $\omega_n^2 = \frac{B_m S^2 + B_m K_L B_e}{VM}$, $\zeta = \frac{\left(\frac{K_L M B_m}{VM} + V \right)}{2\omega_n}$, $K_0 = \frac{Q_0 B_m S}{VM \omega_n^2}$ και V είναι ο όγκος του ρευστού μέσα στον

κύλινδρο, S η επιφάνεια του εμβόλου, B_m είναι η σταθερά Bulk module του ρευστού, K_L είναι ο συντελεστής που συνδέει την διαφορά πίεσης στον κύλινδρο με την ροή διαρροής, Q_0 είναι ο συντελεστής που συνδέει την ροή από την βαλβίδα με την μετατόπιση του εμβόλου της βαλβίδας, B_e ο συντελεστής απόσβεσης της μάζας και M είναι η μάζα που είναι συνδεδεμένη με το έμβολο.

Ένας μικρός υδραυλικός ενεργοποιητή που χρησιμοποιείται κυρίως σε αεροσκάφη έχει τις ακόλουθες τιμές

$$\omega_n = 500 \text{ rad / sec} , \quad \zeta = 0.45 , \quad K_0 = 125 .$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου με στατική αρνητική ανατροφοδότηση εξόδου είναι

$$H_{cl}(s) = \frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{H(s)K}{1+H(s)K} = \frac{K_0 K \omega_n^2}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + K_0 \omega_n^2 K}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου είναι

$$p_{cl}(s) = s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + K_0 K \omega_n^2$$

Για να τον υπολογισμό του κέρδους K του ελεγκτή έτσι ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ευσταθές κατασκευάζεται ο πίνακας ROUTH του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του συστήματος κλειστού βρόχου.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & \omega_n^2 \\ s^2 & 2\zeta\omega_n & KK_0\omega_n^2 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array}$$

όπου

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & \omega_n^2 \\ 2\zeta\omega_n & KK_0\omega_n^2 \end{vmatrix}}{2\zeta\omega_n} = \omega_n^2 - \frac{KK_0\omega_n}{2\zeta}, \quad c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} 2\zeta\omega_n & KK_0\omega_n^2 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = KK_0\omega_n^2.$$

Για να είναι ευσταθές το σύστημα κλειστού βρόχου θα πρέπει η πρώτη στήλη του πίνακα Ruth να είναι θετική δηλαδή θα πρέπει

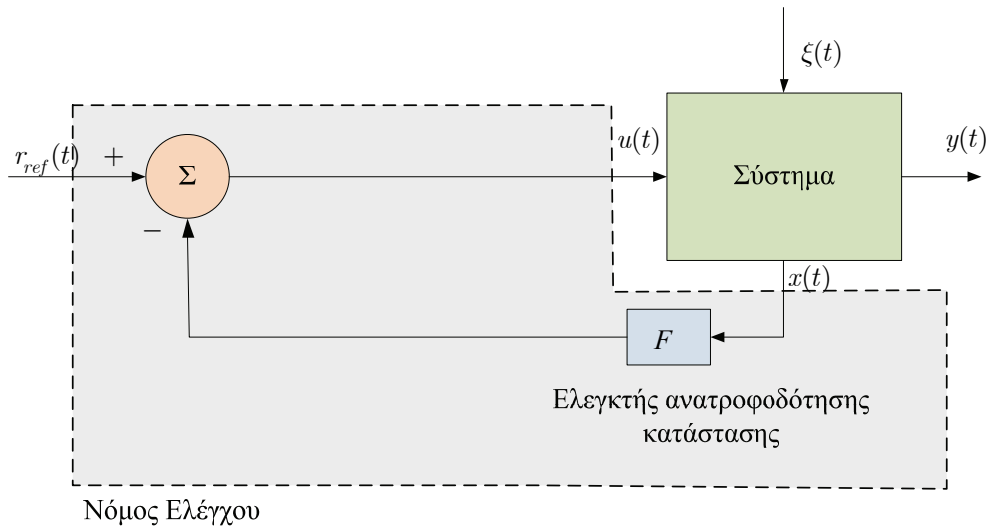
$$0 < K < \frac{2\zeta\omega_n}{K_0} = 3.6$$

A.1.2 Τοποθέτηση πόλων για συστήματα μιας εισόδου μιας εξόδου

Έστω το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα και μιας εισόδου μιας εξόδου που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης από τις εξισώσεις (A.11) και (A.12). Στο σύστημα εφαρμόζεται στατικός νόμος ανατροφοδότησης κατάστασης της μορφής (βλ. Σχήμα A.3)

$$u(t) = -Fx(t) + w(t) \quad (\text{A.18})$$

Εάν το σύστημα είναι ελέγξιμο τότε ο πίνακας ανατροφοδότησης F που τοποθετεί τον πόλους του συστήματος κλειστού βρόχου στο επιθυμητό πολυώνυμο $q(s) = s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_n$, υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο $K = [0 \ \dots \ 0 \ 1]U^{-1}q(A)$ όπου U είναι ο πίνακας ελεγχιμότητας και όπου $q(A) = A^n + d_1 A^{n-1} + \dots + d_{n-1} A + I_n d_n$.



Σχήμα Α.3. Σύστημα κλειστού βρόχου με στατική ανατροφοδότηση κατάστασης

Ο ελεγκτής ανατροφοδότησης κατάστασης μπορεί επίσης να υπολογιστεί με τον ακόλουθο αλγόριθμο

Δεδομένα: Σύστημα ανοικτού βρόχου
 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$

Βήμα 1: Υπολογισμός χαρακτηριστικού πολυωνύμου του συστήματος ανοικτού βρόχου

$$H(s) = C(sI_n - A)^{-1} B = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n s^0}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n s^0}$$

Βήμα 2: Υπολογισμός του πίνακα ελεγκσιμότητας και του κριτηρίου ελεγκσιμότητας

$$U = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Ο βαθμός της μήτρα U είναι n

Σχόλιο: Νόμος ελέγχου

$$u(t) = Fx(t) + r_{ref}(t) \quad , \quad F: \text{πίνακας ανατροφοδότησης} \quad , \quad r_{ref}(t): \text{εξωτερική είσοδος}$$

Σχόλιο: Επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο συστήματος κλειστού βρόχου

$$p_s(s) = s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_n$$

Βήμα 3: Υπολογισμός του πίνακα Μετασχηματισμού Ομοιότητας σε Κανονική Μορφή Ελεγκτή

$$x(t) = Tz(t) \quad , \quad \det[T] \neq 0 \quad , \quad T = P^{-1} \quad ; \quad P = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad q \text{ η τελευταία γραμμή του } U^{-1}$$

Βήμα 4: Υπολογισμός του Μετασχηματισμένου συστήματος ανοικτού βρόχου

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \quad , \quad y(t) = \tilde{C}z(t)$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT$$

Βήμα 5: Υπολογισμός Μετασχηματισμένου νόμου ελέγχου

$$u(t) = \tilde{F}z(t) + \omega(t), \quad \tilde{F} = [\tilde{f}_1 \quad \tilde{f}_2 \quad \cdots \quad \tilde{f}_n] = [a_n - d_n \quad a_{n-1} - d_{n-1} \quad \cdots \quad a_1 - d_1]$$

Βήμα 6: Υπολογισμός νόμου ελέγχου

$$F = \tilde{F}T^{-1}$$

Παράδειγμα Α.2. Έστω ο υδραυλικός ενεργοποιητής του παραδείγματος Α.1. Η συνάρτηση μεταφοράς του ενεργοποιητή μπορεί να πραγματοποιηθεί στο χώρο κατάστασης με τους ακόλουθους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [K_0\omega_n^2 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{A.19})$$

Έστω το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου είναι

$$p_s(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

Ο πίνακας ανατροφοδότησης του στατικού νόμου ελέγχου είναι

$$F = [-1 \quad \omega_n^2 - 3 \quad 2\zeta\omega_n - 3]$$

A.2. Προσομοίωση δυναμικών συστημάτων ανοικτού και κλειστού βρόχου

A.2.1. Ανάλυση, σχεδιασμός και προσομοίωση δυναμικών συστημάτων με το λογισμικό MATLAB

Έστω ο υδραυλικός ενεργοποιητής που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης με τους πίνακες που παρουσιάζεται στη σχέση (A.19). Ο ορισμός των πινάκων στο MATLAB γίνεται με τις ακόλουθες εντολές

```
wn=500
z=0.45
K0=125
A=[0 1 0;0 0 1;-wn*2 -2*z*wn]
B=[0;0;1]
D=0
C=[K0*wn 0 0]
```


Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται χρήσιμες συναρτήσεις για την ανάλυση και τον σχεδιασμό ελεγκτών στο χώρο κατάστασης

Συναρτήσεις συστημάτων στο χώρο κατάστασης – Συναρτήσεις πινάκων	
poly(A)	Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος ανοικτού βρόχου
eig(A)	Ιδιοτιμές του πίνακα A
sys=ss(A,B,C,D)	Δημιουργία σήματος (sys) στο χώρο κατάστασης
ss2tf(sys)	Υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος sys
pole(sys)	Υπολογισμός των πόλων του συστήματος sys
zero(sys)	Υπολογισμός των μηδενικών του συστήματος sys
ctrb(A,B)	Υπολογισμός του πίνακα ελεγχιμότητας
obsv(A,C)	Υπολογισμός του πίνακα παρατηρησιμότητας
A'	Ανάστροφος του πίνακα A
inv(A)	Αντίστροφος του πίνακα A
rank(A)	Βαθμός του πίνακα A
A*B	Πολλαπλασιασμός πινάκων
step(sys)	Βηματική απόκριση του συστήματος sys
dcgain(sys)	Υπολογισμός του κέρδους στη μόνιμη κατάσταση του συστήματος sys
impz(sys)	Κρουστικής απόκρισης του συστήματος sys
lsim(sys,U,T)	Απόκριση του συστήματος sys σε τιμές που καθορίζονται από το διάνυσμα U στο χρόνο που καθορίζεται στο διάνυσμα T
place(A,B,P)	Υπολογισμός ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης του συστήματος με πίνακες A, B στο επιθυμητό πολυώνυμο που καθορίζεται από το διάνυσμα P (ισχύει και για πολυμεταβλητά συστήματα)
acker(A,B,P)	Υπολογισμός ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης με το τύπο του Ackermann για το σύστημα πίνακες A, B και επιθυμητό πολυώνυμο που καθορίζεται από το διάνυσμα P (ισχύει για μονομεταβλητά συστήματα)
damp(sys)	Υπολογισμός φυσικής ιδιοσυχνότητας και απόσβεσης του συστήματος sys

Για τον υδραυλικό ενεργοποιητή που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης με τους πίνακες που δίνονται στη σχέση (A.19) ο κώδικας που υπολογίζει τα συστημικά χαρακτηριστικά του συστήματος ανοικτού βρόχου, το σύστημα κλειστού βρόχου και εκτελεί προσομοιώσεις της απόκρισης του συστήματος ανοικτού και κλειστού βρόχου είναι

```
% Ορισμός πινάκων του υδραυλικού ενεργοποιητή
wn=500
z=0.45
K0=125
A=[0 1 0;0 0 1;0 -wn^2 -2*z*wn]
B=[0;0;1]
D=0
C=[K0*wn 0 0]

% Δημιουργία συστήματος στο χώρο κατάστασης
```

```

sys=ss(A,B,C,D)
% Ανάλυση του συστήματος ανοικτού βρόχου
pole(sys)
zero(sys)
dcgain(sys)
V=ctrb(A,B)
Q=obsv(A,C)
rank(V)
rank(Q)
% Προσομοίωση της απόκρισης του συστήματος ανοικτού βρόχου
figure(1)
step(sys)
figure(2)
impulse(sys)
% Ορισμός επιθυμητού πολυωνύμου για πόλους (s+1)^3
pd=conv(conv([1 1],[1 1]),[1 1])
P=[-1 -1 -1]
% Υπολογισμός ελεγκτή
F=acker(A,B,P)
% Δημιουργία συστήματος κλειστού βρόχου στο χώρο κατάστασης
syscl=ss(A-B*F,B,C,D)
% Προσομοίωση της απόκρισης του συστήματος κλειστού βρόχου
figure(3)
step(syscl)
figure(4)
impulse(syscl)

```

Τα αποτελέσματα του παραπάνω κώδικα είναι τα ακόλουθα

```

wn =
    500
z =
    0.4500
K0 =

```

```

125
A =
    0     1     0
    0     0     1
    0 -250000 -450

```

```

B =
    0
    0
    1

```

```

D =
    0

```

```

C =
    31250000     0     0

```

```

sys =

```

```

a =

```

	x1	x2	x3
x1	0	1	0
x2	0	0	1
x3	0	-2.5e+05	-450

```

b =

```

```

    u1
x1  0
x2  0
x3  1

```

```

c =

```

	x1	x2	x3
y1	3.125e+07	0	0

```

d =

```

```

    u1
y1  0

```

Continuous-time state-space model.

```

ans =

```

```

    1.0e+02 *
    0
-2.2500 + 4.4651i
-2.2500 - 4.4651i

```

```

ans =

```

```

Empty matrix: 0-by-1

```

```

ans =

```

```

Inf

```

```

V =

```

0	0	1
0	1	-450
1	-450	-47500

```

Q =

```

```

31250000    0    0
  0 31250000    0
  0    0 31250000

ans =
  3

ans =
  3

pd =
  1  3  3  1

P =
  -1  -1  -1

F =
  1  -249997  -447

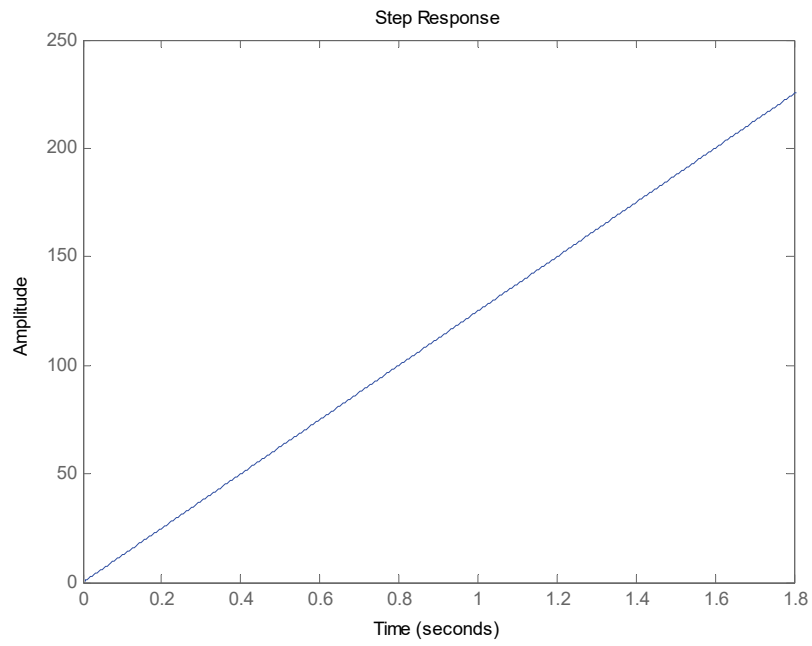
syscl =
  a =
    x1 x2 x3
x1  0  1  0
x2  0  0  1
x3 -1 -3 -3

b =
  u1
x1  0
x2  0
x3  1

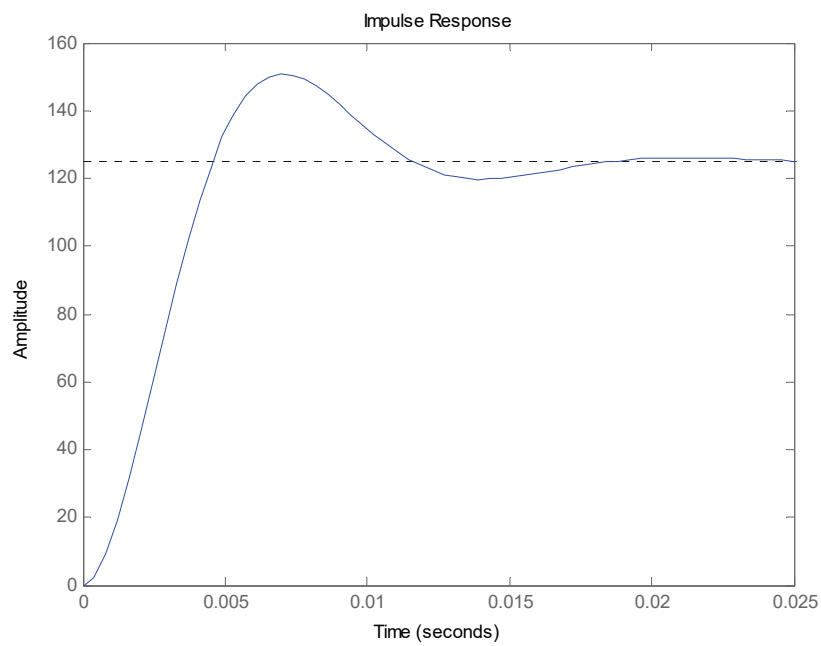
c =
    x1    x2    x3
y1 3.125e+07    0    0

d =
  u1
y1  0
Continuous-time state-space model.

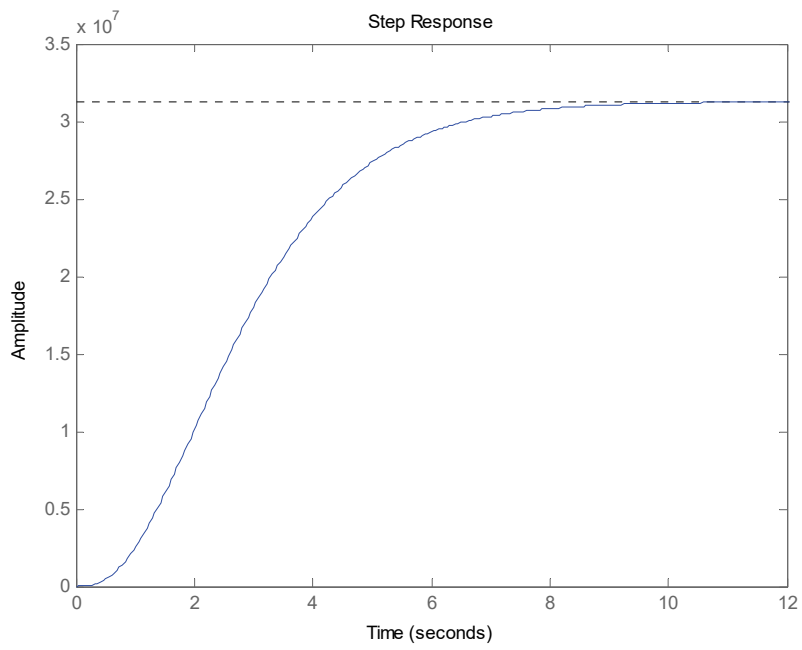
```



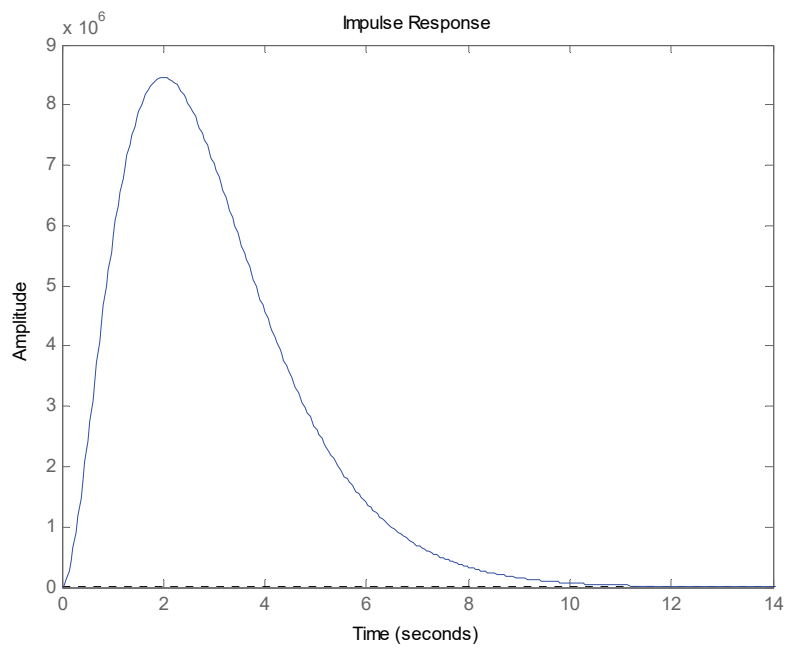
Σχήμα Α.4. Βηματική απόκριση συστήματος ανοικτού βρόχου



Σχήμα Α.5. Κρουστική απόκριση συστήματος ανοικτού βρόχου



Σχήμα Α.6. Βηματική απόκριση συστήματος κλειστού βρόχου



Σχήμα Α.7. Κρουστική απόκριση συστήματος κλειστού βρόχου

A.2.2. Ανάλυση, σχεδίαση και προσομοίωση δυναμικών συστημάτων με το λογισμικό MATHEMATICA

Το λογισμικό Mathematica χρησιμοποιείται κυρίως για συμβολικούς υπολογισμούς. Έστω ο υδραυλικός ενεργοποιητής που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης με τους πίνακες που δίνονται στη σχέση (A.19). Ο ορισμός, η ανάλυση, η σχεδίαση και η προσομοίωση στο MATHEMATICA γίνεται με τις ακόλουθες εντολές

```
(*Ορισμός πινάκων συστήματος*)
A = {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {0, -ωn2, -2*ζ*ωn}}
B = {{0}, {0}, {1}}
Cc = {{K0*ωn2, 0, 0}}

(*Ορισμός χώρου κατάστασης συστήματος ανοικτού βρόχου*)
sys = StateSpaceModel[{A, B, Cc}]

(*Υπολογισμός συνάρτησης μεταφοράς συστήματος ανοικτού βρόχου*)
Hop = TransferFunctionModel[sys]

(*Υπολογισμός χαρακτηριστικού πολυωνύμου συστήματος ανοικτού βρόχου*)
pol = CharacteristicPolynomial[A, s]

(*Υπολογισμός πόλων και μηδενικών συστήματος ανοικτού βρόχου*)
TransferFunctionPoles[sys]
TransferFunctionZeros[sys]

(*Βηματική απόκριση συστήματος ανοικτού βρόχου*)
yb = OutputResponse[sys, UnitStep[t], t] // FullSimplify

(*Ορισμός επιθυμητών πόλων*)
pd = {-1, -1, -1}

(*Υπολογισμός ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης *)
F = StateFeedbackGains[sys, pd]

(*Ορισμός χώρου κατάστασης συστήματος κλειστού βρόχου*)
syscl = SystemsModelStateFeedbackConnect[sys, F]

(*Υπολογισμός συνάρτησης μεταφοράς συστήματος κλειστού βρόχου*)
Hcl = TransferFunctionModel[syscl]

(*Υπολογισμός χαρακτηριστικού πολυωνύμου συστήματος κλειστού βρόχου*)
pcl = CharacteristicPolynomial[A - B.F, s]

(*Υπολογισμός πόλων και μηδενικών συστήματος κλειστού βρόχου*)
TransferFunctionPoles[syscl]
TransferFunctionZeros[syscl]

(*Βηματική απόκριση συστήματος κλειστού βρόχου*)
ybcl = OutputResponse[syscl, UnitStep[t], t] // FullSimplify

(*Προσομοίωση συστήματος ανοικτού και κλειστού βρόχου*)
ωn = 500
ζ = 0.45
K0 = 125
Plot[yb, {t, 0, 10}]
Plot[ybcl, {t, 0, 10}]
```

Ο παραπάνω κώδικας παράγει τα ακόλουθα αποτελέσματα

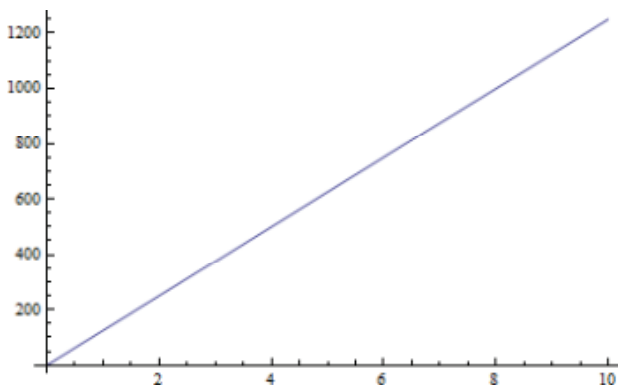
$$\begin{aligned} & \{\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, -\omega_n^2, -2 \zeta \omega_n\}\} \\ & \{\{0\}, \{0\}, \{1\}\} \\ & \{\{K_0 \omega_n^2, 0, 0\}\} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\omega_n^2 & -2 \zeta \omega_n & 1 \\ \hline K_0 \omega_n^2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)^s \\ & \left(-\frac{K_0 \omega_n^2}{-s^3 - 2 \zeta s^2 \omega_n - s \omega_n^2} \right)^r \\ & -s^3 - 2 s^2 \zeta \omega_n - s \omega_n^2 \\ & \{\{\{0, -\zeta \omega_n - \sqrt{-\omega_n^2 + \zeta^2 \omega_n^2}, -\zeta \omega_n + \sqrt{-\omega_n^2 + \zeta^2 \omega_n^2}\}\}\} \\ & \{\{\{\}\}\} \\ & \frac{1}{\left(2 \omega_n \sqrt{-1 + \zeta^2} \omega_n^2\right)} \left\{ e^{-\zeta \omega_n t + \sqrt{-1 + \zeta^2} \omega_n t} K_0 \left(2 \left(1 + e^{2 \zeta \omega_n t + \sqrt{-1 + \zeta^2} \omega_n t} - 2 e^{\zeta \omega_n t + \sqrt{-1 + \zeta^2} \omega_n t} \right) \zeta \sqrt{-1 + \zeta^2} \omega_n^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \omega_n \left(\left(-1 + e^{2 \zeta \omega_n t + \sqrt{-1 + \zeta^2} \omega_n t} \right) (-1 + 2 \zeta^2) + 2 e^{\zeta \omega_n t + \sqrt{-1 + \zeta^2} \omega_n t} t \sqrt{-1 + \zeta^2} \omega_n^2 \right) \right) \text{UnitStep}[t] \right\} \end{aligned}$$

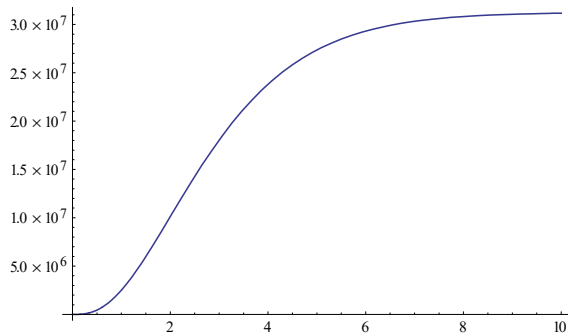
$$\begin{aligned} & \{-1, -1, -1\} \\ & \{\{1, 3 - \omega_n^2, 3 - 2 \zeta \omega_n\}\} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & 1 \\ \hline K_0 \omega_n^2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)^s \\ & \left(-\frac{K_0 \omega_n^2}{-1 - 3 s - 3 s^2 - s^3} \right)^r \\ & -1 - 3 s - 3 s^2 - s^3 \\ & \{\{\{-1, -1, -1\}\}\} \\ & \{\{\{\}\}\} \\ & \left\{ \frac{1}{2} e^{-t} (-2 + 2 e^t - t (2 + t)) K_0 \omega_n^2 \text{UnitStep}[t] \right\} \end{aligned}$$

500

0.45`

125





Βιβλιογραφία/Αναφορές

- [1] Φ. Ν. Κουμπουλής, *Βιομηχανικός έλεγχος*, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα, 1999.
- [2] Dorf-Bishop, *Σύγχρονα Συστήματα Αυτομάτου Έλεγχου*, 9η Έκδοση, Εκδ. ΤΖΙΟΛΑ
- [3] Π. Ν. Παρασκευόπουλος, *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου , θεωρία & Εφαρμογές. Τόμος Α' ΣΑΕ Συνεχούς Χρόνου*, 2007
- [4] W. Messner and D. Tilbury, *Control Tutorial for MATLAB and SIMULINK*
- [5] R.-H. Bishop, *Modern Control Systems Analysis and Design Using MATLAB and SIMULINK* , Addison Wesley Publishing Company; Supplement edition (December 1996).
- [6] D. K. Frederick and J. Chow, *Feedback Control Problems Using MATLAB and the Control System Toolbox (Bookware Companion Series)*, Cengage Learning; 1 edition (August 31, 1999)
- [7] E. B. Magrab, *An Engineer's Guide to Mathematica*, Wiley, 2014
- [8] H. Moore, *MATLAB for Engineers (4th Edition)*, Prentice Hall, 4 edition, 2014