Ανατοκισμός

Σύνοψη
Οι βασικές έννοιες αυτού του κεφαλαίου είναι

- Αρχικό κεφάλαιο ή παρούσα αξία (συμβολισμός K_o ή PV)

-Τελικό κεφάλαιο ή μελλοντική αξία (συμβολισμός K_n ή FV)

-Επιτόκιο (συμβολισμός i ή r)

-Χρόνος (συμβολισμός n Ακέραιες περιόδους, μ/ρ κλάσμα χρονικών περιόδων)

-Συντελεστής ανατοκισμού ή κεφαλαιοποίησης

-Συντελεστής προεξόφλησης

-Εύρεση τιμών με παρεμβολή

ΣΤΟΧΟΙ

-Κατανόηση και χρησιμοποίηση του τύπου υπολογισμού τελικού κεφαλαίου με ανατοκισμό.

-Διάκριση της χρονικής περιόδου ανατοκισμού και εφαρμογή του τύπου.

-Μεταβολή επιτοκίου ή χρόνου, ώστε να μπορεί να εφαρμοσθεί ο τύπος υπολογισμού, όταν το επιτόκιο ή ο χρόνος εκφράζονται σε διαφορετική χρονική περίοδο από την περίοδο του ανατοκισμού.

-Εύρεση παρούσας αξίας, όταν γνωρίζουμε τη μελλοντική αξία κεφαλαίου.

-Εύρεση χρόνου ή επιτοκίου, για να φθάσουμε στο τελικό κεφάλαιο που επιθυμούμε.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Διαθέτουμε κεφάλαιο 2.000 ευρώ και θέλουμε να αγοράσουμε ένα μηχάνημα αξίας 3.000 ευρώ. Θα πρέπει να δανειστούμε 1.000 ευρώ με επιτόκιο 6% ή να καταθέσουμε το κεφάλαιο μας σε αποταμιευτικό λογαριασμό με επιτόκιο 4%, και να αγοράσουμε το μηχάνημα σε δύο χρόνια, όταν η τιμή του θα είναι 2.800 ευρώ;

Με ποιο τρόπο υπολογίζουμε την αξία χρήματος με ανατοκισμό;

1 Εισαγωγή – παραγωγική αξία κεφαλαίου

Το κεφάλαιο (χρηματικό απόθεμα) έχει παραγωγική αξία, όταν χρησιμοποιείται στην Οικονομία. Στην περίπτωση που το κεφάλαιο επενδύεται σε κάποια παραγωγική διαδικασία, τότε η παραγωγική του αξία εκφράζεται με την απόδοση της επένδυσης. Συχνά το κεφάλαιο που έχει κάποιος στη διάθεσή του, δεν θέλει να το επενδύσει και να του αποφέρει απόδοση, είτε γιατί δεν ξέρει που να το επενδύσει είτε γιατί θέλει να το έχει διαθέσιμο άμεσα, όποτε το χρειαστεί. Αν όμως κρατάει το κεφάλαιο κρυμμένο, και δεν το χρησιμοποιεί στην οικονομία, αυτό δεν έχει παραγωγική αξία, αφού δεν χρησιμοποιείται.

Αν υποθετικά όλα τα μέλη μιας Οικονομίας κρατούσαν το διαθέσιμο κεφάλαιό του στα συρτάρια τους, οι παραγωγοί δεν θα μπορούσαν να βρουν διαθέσιμα κεφάλαια, ώστε να τα επενδύσουν στην παραγωγή αγαθών. Η Οικονομία αυτή δεν θα μπορούσε να παράγει και να πουλήσει αγαθά, δεν θα μπορούσαν να γίνουν ανταλλαγές αγαθών στην Οικονομία και, επομένως, δεν θα μπορούσε να λειτουργήσει.

Από πολύ νωρίς, οι άνθρωποι σκέφτηκαν ότι θα έπρεπε να βρεθεί ένας τρόπος , ώστε, από τη μια μεριά, να χρησιμοποιούνται τα χρηματικά τους αποθεματικά στην παραγωγική διαδικασία και, από την άλλη, να μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν, μόλις τα χρειαστούν.

Ο ευκολότερος τρόπος, να γίνει αυτό, είναι μέσω των αποταμιευτικών λογαριασμών στις τράπεζες. Αποταμιεύονται χρήματα στην Τράπεζα, η τράπεζα τα δανείζει σε όσους θέλουν να τα επενδύσουν και, παράλληλα, έχει χρήματα διαθέσιμα, ώστε να τα επιστρέψει, μόλις κάποιος τα χρειαστεί. Η τράπεζα λοιπόν αγοράζει και πουλάει χρήματα, σαν να ήταν ένα οικονομικό αγαθό. Η αγοροπωλησία αυτή αποφέρει κέρδος στην Τράπεζα, αλλά και στους αποταμιευτές, που παραχωρούν τα χρήματά τους σ' αυτή.

Όσοι λοιπόν αποταμιεύουν τα χρήματά τους, απολαμβάνουν ένα επιπλέον ποσό για κάθε χρηματική μονάδα, το οποίο ονομάστηκε «τόκος». Η λέξη αυτή προέρχεται από το ρήμα «τίκτω» που σημαίνει γεννάω.

Όσοι δανείζονται χρήματα από την Τράπεζα θα πρέπει να πληρώσουν επιπλέον ποσό για κάθε χρηματική μονάδα, το οποίο ονομάζεται «τόκος για το δανεισμό».

Φυσικά το ποσό που πληρώνεται ως τόκος δανεισμού είναι μεγαλύτερο από το ποσό που παίρνει ο αποταμιευτής ως τόκο αποταμίευσης, και η διαφορά των δύο τόκων είναι το όφελος της Τράπεζας.

Ο τόκος είναι ανάλογος του ποσού των χρημάτων και, επιπλέον, ανάλογος του χρόνου κατά τον οποίο τα χρήματα χρησιμοποιούνται.

2 Απλός και σύνθετος τόκος

Για τον υπολογισμό του τόκου χρησιμοποιείται το «επιτόκιο». Επιτόκιο είναι ο τόκος μιας χρηματικής μονάδας σε μια χρονική περίοδο, συνήθως σε ένα έτος. Το επιτόκιο, συνήθως, εκφράζεται σε ποσοστό, και εκφράζει με τον τόκο 100 χρηματικών μονάδων σε ένα έτος.

Έτσι έχουμε εκφράσεις όπως: επιτόκιο καταθέσεων 4%, ή επιτόκιο δανεισμού 9% ή επιτόκιο πίστωσης 2% το μήνα, κλπ.

Αν το αρχικό κεφάλαιο που κατατίθεται δεν αλλάζει, αλλά παραμένει το ίδιο σ' όλη τη χρονική περίοδο, ο τόκος εισπράττεται κάθε φορά από τον καταθέτη, και ονομάζεται απλός τόκος.

Αν το αρχικό κεφάλαιο που κατατίθεται αλλάζει σε τακτά χρονικά διαστήματα, όταν ο τόκος δεν εισπράττεται κάθε φορά από τον καταθέτη, αλλά ενσωματώνεται στο κεφάλαιο και επανα-τοκίζεται, ονομάζεται σύνθετος τόκος ή ανατοκισμός.

Στην περίπτωση του ανατοκισμού ένα κεφάλαιο όσο περισσότερο χρονικό διάστημα τοκισθεί, τόσο περισσότερο αυξάνει, και, επειδή και ο τόκος του κεφαλαιοποιείται και ανατοκίζεται, μπορεί να μεγαλώσει γρήγορα.

3 Ορισμοί εννοιών

Αρχικό κεφάλαιο συμβολίζεται με K_o ή PV και είναι το κεφάλαιο στην αρχή μέτρησης των χρονικών περιόδων.

Τελικό κεφάλαιο συμβολίζεται με K_n ή FV και είναι το κεφάλαιο στο τέλος των χρονικών περιόδων του ανατοκισμού.

Επιτόκιο συμβολίζεται με i ή r και εκφράζει τον τόκο που αποφέρει κεφάλαιο μιας χρηματικής μονάδας (ή 100 μονάδων όταν εκφράζεται με ποσοστό), σε μια χρονική περίοδο.

Τόκος συμβολίζεται με I και εκφράζει τον τόκο που αποφέρει το συνολικό κεφάλαιο σε όλη τη μελετώμενη χρονική περίοδο.

Ισχύει η εξίσωση $K_n = K_o + I$

Χρόνος συμβολίζεται με n για ακέραιες χρονικές περιόδους ή με μ/ρ για κλάσμα χρονικών περιόδων και εκφράζει το χρονικό διάστημα για το οποίο ένα κεφάλαιο αποφέρει τόκο.

4 Υπολογισμός του τελικού κεφαλαίου στον ανατοκισμό

Ας υποθέσουμε ότι ένα αρχικό κεφάλαιο K_0 τοκίζεται για n ακέραιες χρονικές περιόδους με επιτόκιο i.

Στο τέλος της πρώτης χρονικής περιόδου το κεφάλαιο γίνεται K_1, δηλαδή αυξάνει κατά τον τόκο μιας χρονικής περιόδου που είναι K_0*i*1.

Ισχύει $K_1=K_0+K_0*i=K_0\ (1+i)$

Στο τέλος της δεύτερης χρονικής περιόδου το κεφάλαιο γίνεται K_2, δηλαδή αυξάνει κατά τον τόκο μιας χρονικής περιόδου που είναι K_1*i*1.

Ισχύει $K_2=K_1+K_1*i=K_1\ (1+i)$

και, αντικαθιστώντας το K_1 έχουμε $K_2=K_0\ (1+i)*\ (1+i)$.

Στο τέλος της τρίτης χρονικής περιόδου το κεφάλαιο γίνεται K_3, δηλαδή αυξάνει κατά τον τόκο μιας χρονικής περιόδου που είναι K_2*i*1.

Ισχύει $K_3=K_2+K_2*i=K_2\ (1+i)=K_0\ (1+i)*(1+i)*((1+i)$

Και, συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο τον υπολογισμό του τόκου και αντικαθιστώντας,

το τελικό κεφάλαιο K_n στο τέλος των n χρονικών περιόδων θα είναι

$K_n=K_{n-1}+K_{n-1}*i*1=\ldots\ldots=K_0\ (1+i)^n$

$$\boxed{K_n= K_0\ (1+i)^n}$$

Ο τελευταίος αυτός τύπος είναι ο γενικός τύπος του ανατοκισμού. Εκφράζει την ισοδυναμία μεταξύ του αρχικού ποσού κεφαλαίου και του τελικού ποσού μετά από n χρονικές περιόδους.

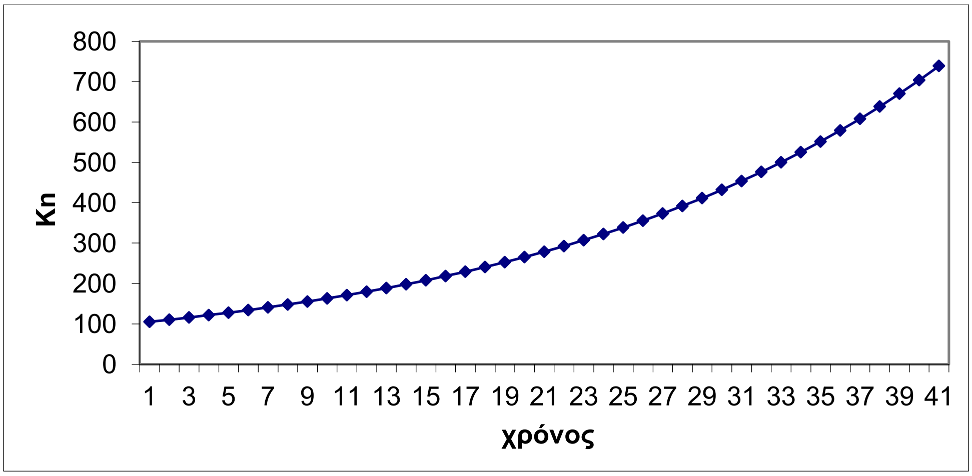
Θυμίζουμε τον τύπο τελικού κεφαλαίου με απλό τόκο που είναι $K_n= K_0\ (1+i*n)$. Στον ανατοκισμό, επειδή ο χρόνος είναι στον εκθέτη το τελικό κεφάλαιο αυξάνει πολύ πιο γρήγορα απ' ό,τι στον απλό τόκο.

4.1 Σημεία προσοχής

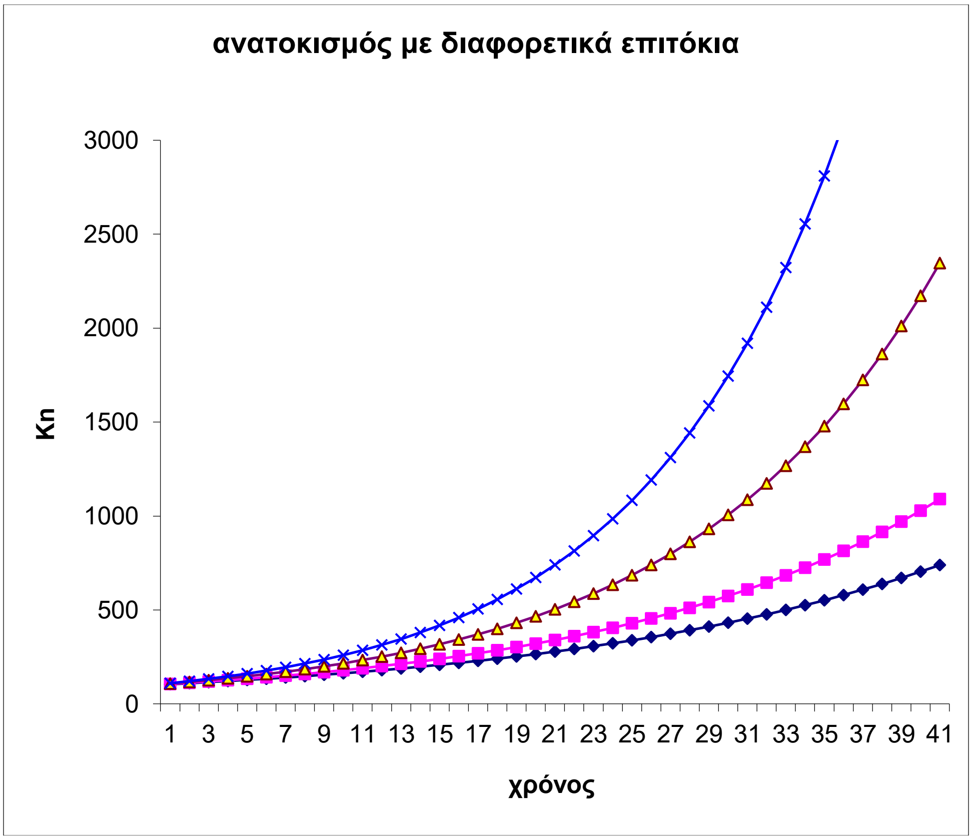
Συνήθως το n εκφράζεται σε έτη και το επιτόκιο είναι ετήσιο και γράφεται σε δεκαδική μορφή (όχι σε %). Αν ο ανατοκισμός είναι εξαμηνιαίος, τριμηνιαίος, μηνιαίος κλπ., θα πρέπει το επιτόκιο να εκφράζεται σε εξάμηνο, τρίμηνο, μήνα αντίστοιχα και οι χρονικές περίοδοι σε εξάμηνα, τρίμηνα, μήνες αντίστοιχα. Γενικά θα πρέπει η περίοδος υπολογισμού του ανατοκισμού να συμπίπτει με τις περιόδους μέτρησης του χρόνου και με την περίοδο μέτρησης του επιτοκίου.

5. Γραφική παράσταση

Αν θέλουμε να παρουσιάσουμε γραφικά την μεταβολή του κεφαλαίου σε σχέση με το χρόνο, δημιουργούμε τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα 4.1. (Αλεξανδρόπουλος κ.α., 2004).



Σχήμα 4.1 *Μεταβολή κεφαλαίου 100 ευρώ στο χρόνο*



Σχήμα 4.2. *Μεταβολή κεφαλαίου 100 ευρώ στο χρόνο με διαφορετικά επιτόκια*

Όσο μετακινούμαστε δεξιά στη γραμμή του χρόνου, τόσο το κεφάλαιο αυξάνει προς τα επάνω στο σχήμα, με γρήγορο ρυθμό. Ο ρυθμός αυτός αύξησης εξαρτάται από το επιτόκιο ανατοκισμού, όπως μπορούμε να δούμε στο σχήμα 4.2, όπου παρουσιάζεται η αύξηση του ίδιου κεφαλαίου, αλλά με διαφορετικό κάθε φορά επιτόκιο.

6 Συντελεστής ανατοκισμού

Ο συντελεστής $(1+i)^n$ του τύπου του ανατοκισμού, ονομάζεται συντελεστής ανατοκισμού και εκφράζει το ισοδύναμο ποσό μιας χρηματικής μονάδας μετά από n χρονικές περιόδους. Επειδή ο συντελεστής αυτός χρησιμοποιείται σε πολλούς υπολογισμούς, για την ακρίβεια των υπολογισμών, θα πρέπει να χρησιμοποιείται με πολλά δεκαδικά ψηφία και να μη στρογγυλοποιείται. Για λόγους ευκολίας, υπάρχει πίνακας υπολογισμού (βλέπε αρχείο excel) με τις διάφορες τιμές του συντελεστή για διαφορετικές τιμές του χρόνου n και του επιτοκίου i.

Έτσι, προκειμένου να υπολογίσουμε το τελικό κεφάλαιο, πολλαπλασιάζουμε το αρχικό κεφάλαιο με την τιμή του συντελεστή ανατοκισμού που προκύπτει από τον πίνακα για επιτόκιο i και ακέραια χρονική περίοδο n.

7 Παραδείγματα εφαρμογής τύπου ανατοκισμού

Παράδειγμα 4.7.1.

Πόσο θα γίνει κεφάλαιο 10.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 3%;

<u>Λύση</u>

Τα δεδομένα μας είναι:

K_o=10.000

i=3%=0,03

n=5 έτη

Το ζητούμενο είναι το K_n, το οποίο θα υπολογισθεί από τον τύπο:

$K_n=K_o\ (1+i)^n=10.000*\ (1+0,03)^5= =10.000*1,15927=11.592,7$

Παράδειγμα 4.7.2.

Πόσο θα γίνει κεφάλαιο 10.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 5 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%;

Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:

$K_o=10.000$

$i=3\%=0,03$

n=5 έτη =10 εξάμηνα

(μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα, για να συμπίπτει με το χρόνο ανατοκισμού)

Το ζητούμενο είναι το K_n, το οποίο θα υπολογισθεί από τον τύπο:

$K_n=K_o\ (1+i)^n=10.000*\ (1+0,03)^{10}= 10.000*1,343916=13.439,16$

8 Χρονική περίοδος και ανατοκισμός

Ερώτηση: Μετά από δύο έτη, ο ανατοκισμός 100 ευρώ κάθε εξάμηνο θα είναι προτιμότερος από τον ανατοκισμό κάθε έτος; Υποθέστε ότι το επιτόκιο είναι 2,5% κάθε εξάμηνο και 5% κάθε έτος.

Το τελικό κεφάλαιο με τον ανατοκισμό ανά εξάμηνο, εφόσον τα δύο έτη αντιστοιχούν σε τέσσερα εξάμηνα, θα είναι:

$K_{εξαμηνα}=100(1+0,025)^4= 110,38$

Το τελικό κεφάλαιο με τον ανατοκισμό ανά έτος θα είναι:

$K_{ετη}= 100(1+0,05)^2=110,25$

Παρατηρούμε ότι υπερέχει λίγο (0,13 ευρώ) το τελικό κεφάλαιο με τον ανατοκισμό ανά εξάμηνο από ό,τι με τον ανατοκισμό ανά έτος. Αν όμως αντί για 100 ευρώ το κεφάλαιο μας ήταν 100.000 ευρώ, θα υπήρχε μια διαφορά 130 ευρώ.

Επομένως θα πρέπει να θυμόμαστε ότι:

Ο ανατοκισμός που γίνεται σε πιο σύντομες χρονικές περιόδους, αποφέρει μεγαλύτερο τόκο, για το ίδιο κεφάλαιο στον ίδιο χρόνο με αντίστοιχο επιτόκιο.

Ως καταθέτες μας συμφέρει ο ανατοκισμός να γίνεται σε όσο το δυνατό μικρότερο χρονικό διάστημα. Ως δανειζόμενοι μας συμφέρει να γίνεται σε όσο το δυνατό μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, ώστε να μην αυξάνει υπέρμετρα το χρέος μας.

Έχει επικρατήσει στις Τράπεζες και τα Ταμιευτήρια, ο ανατοκισμός να γίνεται κάθε εξάμηνο.

9 Ανατοκισμός όταν ο χρόνος δεν αντιστοιχεί σε ακέραιες περιόδους

Στην πραγματική οικονομία, σπάνια ο χρόνος μετριέται σε ακέραιο αριθμό ετών ή εξαμήνων. Συνήθως μετριέται με αριθμό ετών, μηνών και ημερών.

Μέτρηση χρόνου σε:	**n**	**μ**	**ρ**
Έτη	έτη	μήνες	12
Έτη	έτη	μέρες	360 ή 365
Εξάμηνα	εξάμηνα	μήνες	6
Έτη	εξάμηνα	μέρες	180 ή 182,5
Τρίμηνα	τρίμηνα	μήνες	3
Τρίμηνα	τρίμηνα	μέρες	90
Έτη εξάμηνα τρίμηνα		Μήνες και μέρες => Μετατρέπουμε όλα σε μέρες	360 (έτη) ή 180 (εξάμηνα) ή 90 (τρίμηνα)

Πίνακας 4.1 *Χρονική έκφραση του κλάσματος του μ/ρ*

Έστω ότι ο χρόνος μετριέται με ακέραιο αριθμό n ετών και κλασματική χρονική περίοδο μ/ρ, όπου συνήθως μ είναι οι μήνες και ρ=12. Θα μπορούσε ακόμη, αν ο χρόνος μετριέται σε ημέρες, να είχαμε ν/ρ, όπου ν ο αριθμός ημερών και ρ=360.

Γενικά το κλάσμα μ/ρ μπορεί να μετράει μήνες έτους, μέρες έτους, μήνες εξαμήνου, μέρες εξαμήνου κλπ, όπως φαίνεται στον πίνακα 4.1.

Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχουν δύο τρόποι υπολογισμού του τελικού κεφαλαίου με ανατοκισμό. Ο εκθετικός τρόπος και ο μεικτός ανατοκισμός.

9.1 Εκθετικός τρόπος

Χρησιμοποιώντας τον εκθετικό τρόπο υπολογισμού, στον εκθέτη εκτός από τον ακέραιο αριθμό μέτρησης του χρόνου προσθέτουμε και τον κλασματικό αριθμό.

Ο υπολογισμός της δύναμης, με εκθέτη κλασματικό αριθμό, γίνεται με χρήση επιστημονικού υπολογιστή.

$K_n=K_o\ (1+i)^{n+\mu/\rho}$

9.2 Μεικτός ανατοκισμός

Με τον τρόπο αυτό, υπολογίζεται το τελικό κεφάλαιο με ανατοκισμό για τον ακέραιο αριθμό περιόδων, ενώ για τον κλασματικό αριθμό περιόδων χρησιμοποιείται ο τύπος του απλού τόκου. Έτσι ο τύπος του τελικού κεφαλαίου θα είναι ο εξής:

$K_n=K_o\ (1+i)^n *(1+\mu/\rho*i)$

Ο μεικτός ανατοκισμός εφαρμόζεται σε Τράπεζες και Ταμιευτήριο, σε <u>βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις</u>, δηλαδή, γίνεται ανατοκισμός του κεφαλαίου για τον ακέραιο χρόνο, και υπολογίζεται απλός τόκος για το υπόλοιπο κλασματικό μέρος του χρόνου, ο οποίος προστίθεται στο κεφάλαιο.

Ο απλός τόκος υπολογίζεται με τον τύπο $I=\ K_o*(1+i)^n*\mu/\rho*i$.

Προσθέτοντας με το κεφάλαιο του ακέραιου ανατοκισμού προκύπτει:

$K_n=K_o\ (1+i)^n + K_o*(1+i)^n*\mu/\rho*i = K_o\ (1+i)^n *(1+\mu/\rho*i)$

Παράδειγμα 4.9.2.1

Πόσο θα γίνει κεφάλαιο 10.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 5 έτη και 3 μήνες με ετήσιο επιτόκιο 3%;

<u>Λύση</u>

Τα δεδομένα μας είναι:

Ko=10.000

i=3%=0,03

n=5 έτη και 3 μήνες

Ο χρόνος γράφεται (5+3/12) έτη

Το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με δύο τρόπους:

Εκθετικός ανατοκισμός

$K_n=K_o\ (1+i)^{n+\mu/\rho}$=10.000* (1+0,.03)$^{5+3/12}$= 10.000*1,1678=11.678 ευρώ

Μεικτός ανατοκισμός

$K_n=K_o\ (1+i)^n\ *(1+\mu/\rho*i)$ =10000* (1+0,03)^5*(1+3/12*0,03)= =10.000*1,15927*1,0075= 11.679,6 ευρώ

Παρατηρούμε ότι με το μεικτό ανατοκισμό, έχουμε ελαφρώς μεγαλύτερο τελικό κεφάλαιο από ό,τι με τον εκθετικό τρόπο υπολογισμού.

10. Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου (παρούσας αξίας)

Πολλές φορές επιθυμούμε να υπολογίσουμε το κεφάλαιο που θα πρέπει να καταθέσουμε στο παρόν, ώστε με τον ανατοκισμό να σχηματισθεί δεδομένο μελλοντικό κεφάλαιο. Ξέρουμε, δηλαδή, το τελικό κεφάλαιο που θα σχηματισθεί, και μας ενδιαφέρει να βρούμε ποιο αρχικό κεφάλαιο θα πρέπει να καταθέσουμε στην Τράπεζα, ώστε, με δοσμένο επιτόκιο, για δεδομένο χρόνο, να σχηματισθεί το επιθυμητό μελλοντικό κεφάλαιο. Στην περίπτωση αυτή, το ζητούμενο αρχικό κεφάλαιο, επειδή είναι ισοδύναμο με το μελλοντικό κεφάλαιο, ονομάζεται και παρούσα αξία του μελλοντικού κεφαλαίου.

Παρούσα αξία ενός χρηματικού κεφαλαίου ονομάζεται η οικονομική αξία που έχει την παρούσα στιγμή που γίνεται ο υπολογισμός. **Μελλοντική αξία** ονομάζεται η αξία που έχει στο μέλλον. Αρκετές φορές, κυρίως στις περιπτώσεις γραμματίων και συναλλαγματικών, γνωρίζουμε την αξία τους στο μέλλον και ζητάμε την παρούσα αξία τους. Στη συνέχεια ονομάζουμε την μελλοντική αξία **τελική αξία**, ενώ την παρούσα αξία την ονομάζουμε και **αρχική αξία**.

Αν γνωρίζουμε την τελική αξία ενός χρηματικού ποσού, το επιτόκιο ανατοκισμού και το χρόνο, μπορούμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία του Κο. Χρησιμοποιούμε το βασικό τύπο του ανατοκισμού. (Καραπιστόλης, 2012).

$Kn=Ko\ (1+i)^n$

Μετασχηματίζουμε τον τύπο αυτό, διαιρώντας με τον όρο $(1+i)^n$ και έχουμε:

$K_0=Kn\ /\ (1+i)^n$

Συμβολίζοντας τον όρο $1/(1+i)^n$ με U^n ,ο τύπος γίνεται: $K_0=Kn\ U^n$

Ο αριθμός $1/(1+i)^n$, (ο αντίστροφος του συντελεστή ανατοκισμού) συμβολίζεται με U^n και ονομάζεται συντελεστής προεξόφλησης.

όπου

$$U^n = \frac{1}{(1+i)^n}$$

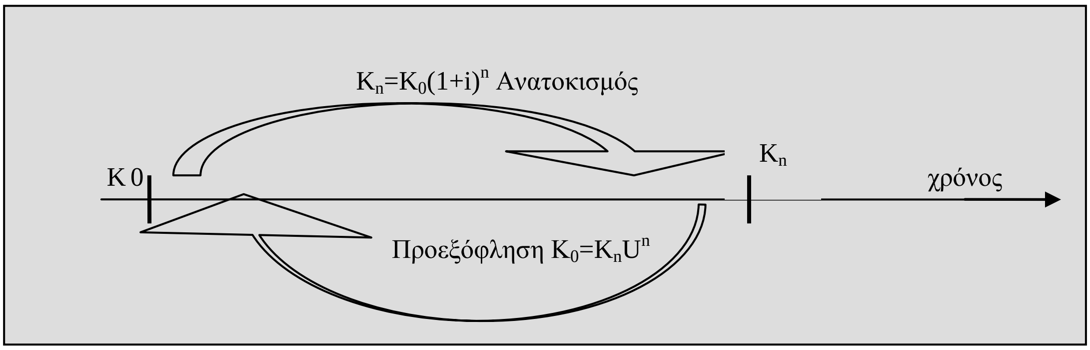
Ο συντελεστής προεξόφλησης U^n υπολογίζεται από πίνακες και μας δίνει την αρχική αξία ποσού που πρέπει να καταθέσουμε σήμερα, ώστε μετά από n χρονικές περιόδους να γίνει 1 νομισματική μονάδα, όταν το επιτόκιο είναι i. Πήρε το όνομά του από το γεγονός ότι προεξοφλούμε μελλοντική αξία κεφαλαίου, βρίσκοντας την τωρινή ισοδύναμή του αξία. Οι τιμές του συντελεστή προεξόφλησης είναι πάντα μικρότερες από τη μονάδα, αφού ο παρανομαστής του κλάσματος είναι πάντα μεγαλύτερος του 1. Από οικονομική ερμηνεία, η μελλοντική ισοδύναμη αξία κεφαλαίου είναι μεγαλύτερο μέγεθος από την παρούσα αξία. Έτσι, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία, θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τη μελλοντική αξία με αριθμό μικρότερο της μονάδας.

Ο τύπος $K_0=K_n *U^n$ ονομάζεται και τύπος προεξόφλησης

Ο όρος $U^n =1/(1+i)^n$ ονομάζεται συντελεστής προεξόφλησης.

Υπάρχει πίνακας με τις διάφορες τιμές του συντελεστή προεξόφλησης ανάλογα με την τιμή του επιτοκίου και της χρονικής περιόδου n.

Επομένως η τιμής της παρούσας αξίας υπολογίζεται εύκολα, πολλαπλασιάζοντας την τελική αξία με την τιμή του συντελεστή προεξόφλησης. (σχήμα 4.3).



Σχήμα 4.3. *Ισοδυναμία κεφαλαίων K_0 και K_n στο χρόνο*

Στην περίπτωση που ο χρόνος μετριέται σε ακέραιες χρονικές περιόδους n και κλασματικές περιόδους μ/ρ, χρησιμοποιείται ο μεικτός ανατοκισμός.

Ο τύπος υπολογισμού της παρούσας αξίας (τύπος προεξόφλησης) είναι:

$K_0=K_n *U^n / (1+\mu/\rho*i)$

10.1 Παράδειγμα εφαρμογής τύπου προεξόφλησης

Πόσο κεφάλαιο πρέπει να καταθέσουμε σήμερα το οποίο ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 3% και γίνεται 15.000 ευρώ;

Λύση
Το τελικό κεφάλαιο είναι Kn=15.000
Το ετήσιο επιτόκιο είναι i=3%=0.03
Ο χρόνος ανατοκισμού είναι n=5 έτη
Ζητάμε την αρχική αξία του κεφαλαίου που πρέπει να καταθέσουμε σήμερα.
Χρησιμοποιούμε τον τύπο
$K0=Kn/(1+i)^n=15000/ (1+0.03)^5= 15.000*0.8626=12.939$
Επομένως η παρούσα αξία είναι 12.939 ευρώ.

11. Εύρεση του επιτοκίου ανατοκισμού

Αν γνωρίζουμε την τελική αξία ενός χρηματικού ποσού, την αρχική του αξία, το επιτόκιο ανατοκισμού, και θέλουμε να υπολογίσουμε το χρόνο που μεσολαβεί, χρησιμοποιούμε το βασικό τύπο του ανατοκισμού.

Τον ίδιο τύπο χρησιμοποιούμε και στην περίπτωση στην οποία ζητάμε να υπολογίσουμε το επιτόκιο, αν γνωρίζουμε την τελική αξία ενός χρηματικού ποσού, την αρχική του αξία, τον χρόνο ανατοκισμού.

Στην περίπτωση στην οποία γνωρίζουμε το αρχικό και τελικό κεφάλαιο, το χρόνο ανατοκισμού, και θέλουμε να υπολογίσουμε το επιτόκιο, μετατρέπουμε τον τύπο $K_n=K_o (1+i)^n$, ως εξής:

Ο τύπος αυτός μετασχηματίζεται, διαιρώντας με τον όρο K_0, και έχουμε:
$(1+i)^n= Kn/ K_0$

$1^{ος}$ τρόπος επίλυσης της εξίσωσης

Στην περίπτωση που άγνωστος είναι το n είτε το i, λύνουμε την παραπάνω εξίσωση, λογαριθμώντας και τα δύο μέλη, και έχουμε n log(1+i)=log Kn -log K0

Τη σχέση αυτή την επιλύουμε είτε ως προς n είτε ως προς i, και η εξίσωση παίρνει τις παρακάτω μορφές:

$i= (K_n / K_0)^{1/n} -1$

$$n=\frac{\log K_n - \log K_0}{\log(1+i)}$$

$$\log(1+i)=\frac{\log K_n - \log K_0}{n}$$

$2^{ος}$ τρόπος επίλυσης της εξίσωσης

Στην περίπτωση που άγνωστος είναι το n είτε το i, και δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε λογαρίθμους, μπορούμε να βρούμε τη λύση, χρησιμοποιώντας τον πίνακα με τις τιμές του συντελεστή ανατοκισμού ή κεφαλαιοποίησης.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα συντελεστή κεφαλαιοποίησης, μπορούμε να βρούμε σε ποιο επιτόκιο αντιστοιχεί η τιμή του κλάσματος Kn / K_0, αν γνωρίζουμε το n.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα συντελεστή κεφαλαιοποίησης, μπορούμε να βρούμε σε ποιο χρόνο αντιστοιχεί η τιμή του κλάσματος Kn / K_0 αν γνωρίζουμε το i.

11.1 Παράδειγμα

Κεφάλαιο 10000 κατατίθεται σήμερα, ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο i και γίνεται 12.170 ευρώ. Πόσο είναι το επιτόκιο;

Λύση
K_0=10.000
K_n=12.170
n=5 έτη
$(1+i)^5$= =12170/10000=1,217

Εντοπίζουμε στον πίνακα ανατοκισμού–κεφαλαιοποίησης στη γραμμή n=5 την τιμή 1,217 οπότε το επιτόκιο είναι 4%

12. Εύρεση του χρόνου ανατοκισμού

Στην περίπτωση, στην οποία γνωρίζουμε το αρχικό και τελικό κεφάλαιο, το επιτόκιο ανατοκισμού, και θέλουμε να υπολογίσουμε το χρόνο ανατοκισμού, μετατρέπουμε τον τύπο $K_n=K_o\,(1+i)^n$, ως εξής:

$(1+i)^n= K_n / K_0$
Κατόπιν, για να υπολογίσουμε το χρόνο, έχουμε δύο επιλογές:

α) Να λογαριθμήσουμε και τα δύο μέλη του τύπου και να λύσουμε ως προς n.
$n=\log(K_n / K_0)/\log(1+i)$

β) Να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα με τον συντελεστή ανατοκισμού – κεφαλαιοποίησης. Στον πίνακα αυτό εντοπίζουμε, αφού γνωρίζουμε το επιτόκιο i, σε ποιο χρόνο αντιστοιχεί η τιμή του κλάσματος K_n / K_0.

13. Εύρεση του επιτοκίου ανατοκισμού ή του χρόνου με παρεμβολή

Πολλές φορές, όμως, δεν υπάρχει ακριβώς η ίδια τιμή του κλάσματος Kn / K_0 στον πίνακα κεφαλαιοποίησης. Σε αυτή την περίπτωση, βρίσκουμε τις δύο κοντινότερες τιμές (μικρότερη και μεγαλύτερη) και εφαρμόζουμε τη μέθοδο της παρεμβολής.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα συντελεστή κεφαλαιοποίησης, δεν βρίσκουμε πάντα με ακρίβεια την τιμή κλάσματος K_n/K_0. Τότε εντοπίζουμε τις τιμές τις κοντινότερες στην τιμή του κλάσματος $y=K_n/K_0$, έστω y_1 και y_2, οι οποίες αντιστοιχούν σε επιτόκια ή σε χρόνο x_1 και x_2. Το ζητούμενο επιτόκιο ή ο χρόνος x υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή από τη σχέση:

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1)$$

13.1 Παράδειγμα εύρεσης επιτοκίου

Κεφάλαιο 10000 κατατίθεται σήμερα, ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο i και γίνεται 12.000 ευρώ. Πόσο είναι το επιτόκιο;

Λύση
K_0=10000
K^n=12000
n=5 έτη
$(1+i)^5$= =12000/10000=1,2

Εντοπίζουμε στον πίνακα κεφαλαιοποίησης στη γραμμή n=5 την τιμή 1,2 αλλά δεν υπάρχει, οπότε εντοπίζουμε τις δύο κοντινότερες τιμές 1,188 και 1,217 που αντιστοιχούν σε επιτόκια 3,5% και 4%.

Το επιτόκιο που ψάχνουμε θα υπολογιστεί από τον τύπο παρεμβολής :

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1) =$$
$$= 0{,}035 + \frac{1{,}2 - 1{,}188}{1{,}217 - 1{,}188}(0{,}04 - 0{,}035) = 0{,}035 + \frac{0{,}012}{0{,}029}(0{,}005) = 0{,}035 + 0{,}0021 = 0{,}0371 = 3{,}71\%$$

Άρα το ζητούμενο επιτόκιο είναι 3,71%.

13.2 Παράδειγμα εύρεσης χρόνου με παρεμβολή

Κεφάλαιο 10.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για έτη με ετήσιο επιτόκιο 3%, γίνεται 14000 ευρώ. Πόσα έτη ανατοκιζόταν;

Λύση
K_o=10000
K_n=14000
i=3%=0,03
Χρησιμοποιούμε τη σχέση $(1+i)^n$= Kn / K0 =14000/10000=1,4

Προσπαθούμε να εντοπίσουμε στον πίνακα κεφαλαιοποίησης στη στήλη i=3% την τιμή 1,4 αλλά δεν υπάρχει. Επομένως οι κοντινότερες τιμές είναι 1,3842 για 11 έτη και 1,4258 για 12 έτη.

Ο χρόνος που ψάχνουμε θα υπολογιστεί από τον τύπο παρεμβολής :

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1) =$$
$$= 11 + \frac{1{,}4 - 1{,}3842}{1{,}4258 - 1{,}3842}(12 - 11) = 11 + \frac{0{,}0158}{0{,}0416} = 11 + 0{,}3798 = 11{,}3798$$

Άρα ο ζητούμενος χρόνος είναι 11,38 έτη, δηλαδή 11έτη και 38/100 του έτους.

ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ

- Πότε εφαρμόζω τον τύπο του ανατοκισμού.
- Τον τρόπο μέτρησης του χρόνου και εφαρμογής του τύπου στην περίπτωση κλασματικού αριθμού χρονικών περιόδων.
- Πώς βρίσκω το συντελεστή ανατοκισμού και το συντελεστή προεξόφλησης από πίνακα.
- Πότε εφαρμόζω τον τύπο προεξόφλησης.
- Πώς βρίσκω το χρόνο ή το επιτόκιο, όταν γνωρίζω αρχικό και τελικό κεφάλαιο.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Αλεξανδρόπουλος, Α., Παλιατσός, Α. & Σάσσαλος, Σ. (2004). Μαθηματικά για Οικονομολόγους. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.

Καραπιστόλης, Δ. (2012). Μαθηματικά για Οικονομολόγους. Θεσσαλονίκη: Αλτιντζή.

Ασκήσεις 4ου κεφαλαίου

Άσκηση 1

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 3.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 3 έτη με ετήσιο επιτόκιο 4%.

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Κο=3.000
i=4%=0,04
n=3 έτη
Το ζητούμενο είναι το τελικό κεφάλαιο Κn, το οποίο θα υπολογισθεί με τον τύπο του ανατοκισμού:
$K_n=K_o\ (1+i)^n = 3.000*(1+0,04)^3 = 3.000*1,1249 = 3.374,7$ ευρώ

Άσκηση 2

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 3.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 3 έτη με επιτόκιο τριμήνου 1%.

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Κο=3.000
i=1%=0,01 τριμηνιαίο
n=3 έτη, επειδή ο ανατοκισμός γίνεται με τριμηνιαίο επιτόκιο, τα έτη αντιστοιχούν σε 3*4=12 τρίμηνα
Το ζητούμενο είναι το Κn, το οποίο θα υπολογισθεί με τον τύπο του ανατοκισμού:
$K_n=K_o\ (1+i)^n = 3.000*(1+0,01)^{12} = 3.000*1,1268 = 3.380,4$ ευρώ

Άσκηση 3

Κεφάλαιο 4.500 ευρώ ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο, για 6 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2%.
α) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από 4 έτη;
β) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από τα 6 έτη;
γ) Αν το εξαμηνιαίο επιτόκιο ήταν 2,5% , πόση θα ήταν η διαφορά στο κεφάλαιο μετά τα 6 έτη;

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Κο=4.500
i=2%=0,02 εξαμηνιαίο
α) n=4 έτη αντιστοιχούν σε 4*2=8 εξάμηνα
Το ζητούμενο είναι το Κn, το οποίο θα υπολογισθεί με τον τύπο του ανατοκισμού:
$K_n=K_o\ (1+i)^n = 4.500*(1+0,02)^8 = 4.500*1,1717 = 5.272,65$ ευρώ
β) n=6 έτη αντιστοιχούν σε 6*2=12 εξάμηνα
Το ζητούμενο είναι το Κn, το οποίο θα υπολογισθεί με τον τύπο του ανατοκισμού:
$K_n=K_o\ (1+i)^n = 4.500*(1+0,02)^{12} = 4.500*1,2682 = 5.706,9$ ευρώ

γ) n=6 έτη αντιστοιχούν σε 6*2=12 εξάμηνα
το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι 2,5%= 0,025 και το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με τον τύπο του ανατοκισμού:
K_n=K_o $(1+i)^n$ =4.500*$(1+0,025)^{12}$ =4.500*1,3449= 6.052,05 ευρώ
Η διαφορά στο κεφάλαιο σε σχέση με το β ερώτημα είναι
6.052,05-5.706,9=345,15 ευρώ

Άσκηση 4

Συμφέρει να αγοράσουμε ένα αυτοκίνητο σήμερα, πληρώνοντας 13.000 ευρώ, ή να καταθέσουμε το ποσό αυτό στην τράπεζα με ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 2% και να αγοράσουμε το αυτοκίνητο σε δύο χρόνια όταν θα στοιχίζει 14.000 ευρώ;
(Υπόδειξη: υπολογίστε την τελική αξία του κεφαλαίου μετά τα δύο έτη και συγκρίνετε με τις 14.000 ευρώ)

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Ko=13.000
i=2%=0,02 εξαμηνιαίο
n=2 έτη = 4 εξάμηνα
Το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με τον τύπο του ανατοκισμού:
K_n=K_o $(1+i)^n$ =13.000*$(1+0,02)^4$ =13.000*1,0824= 14.071,2 ευρώ
Επειδή υπολογίζουμε ότι το αυτοκίνητο σε δύο χρόνια θα πωλείται 14.000, μας συμφέρει να βάλουμε τα χρήματα στην τράπεζα και να το αγοράσουμε μετά από δύο χρόνια κερδίζοντας 71,2 ευρώ.

Άσκηση 5

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 3.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 8 έτη με ετήσιο επιτόκιο 6%, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο.

Απάντηση/Λύση

Αφού ο ανατοκισμός υπολογίζεται κάθε τρίμηνο, μετατρέπουμε το χρόνο σε τρίμηνα και το ετήσιο επιτόκιο σε τριμηνιαίο επιτόκιο. Τα 8 έτη είναι 8*4= 32 τρίμηνα. Το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 6%:4=1,5%.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου
Kn =K_0 $(1+ i)^n$ =3.000*$(1+0,015)^{32}$=3.000*1,6102= 4.830,97 ευρώ.

Άσκηση 6

Κεφάλαιο 15.000 ευρώ κατατίθεται σε τράπεζα και ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο, για 6 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2%. Κατόπιν το επιτόκιο αλλάζει σε 2,5% το εξάμηνο και η κατάθεση διαρκεί ακόμη 5 έτη με ανατοκισμό ανά εξάμηνο.

α) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από τα 6 έτη;
β) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από τα 11 έτη;
γ) Αν το ίδιο κεφάλαιο κατατεθεί σε τράπεζα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% για 11 έτη, πόσο θα γίνει το τελικό κεφάλαιο;

Απάντηση/Λύση

α) Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 6 έτη είναι 6*2=12 εξάμηνα..
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι
Kn =K_0 $(1+ i)^n$ =15.000 *$(1+0,02)^{12}$= 15.000*1,2682 =19.023,63 ευρώ
β) Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 5 έτη είναι 5*2=10 εξάμηνα.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου που είναι η αρχική αξία (μετά τα 6 έτη είναι 19.023,63) προστιθεμένη με τον αντίστοιχο τόκο.
Kn =K_0 $(1+ i)^n$ =19.023,63*$(1+0,025)^{10}$= 19.023,63*1,2801 =24.352,15 ευρώ

γ) Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου
$Kn = K_0 (1+ i)^n = 15.000 * (1+0,03)^{11} = 15.000*1,3842 = 20.763,51$ ευρώ.

Η διαφορά από το κεφάλαιο που σχηματίστηκε στο ερώτημα β είναι 24.352,15-20.763,51 =3.588,6 ευρώ

Άσκηση 7

Υπάλληλος δανείστηκε στις 1-2-2005 από το ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων ποσό 7.000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 4%. Ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο. Τι ποσό θα πρέπει να επιστρέψει στις 1-2-2014;

Απάντηση/Λύση

Αφού ο τόκος υπολογίζεται κάθε εξάμηνο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα και το επιτόκιο σε εξαμηνιαίο. Από 1-2-2005 μέχρι 1-2-2014 μεσολαβούν 9 έτη και είναι 9*2=18 εξάμηνα. Το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι 4%:2=2%
Για να βρούμε το ποσό του δανείου, που πρέπει να επιστραφεί μαζί με τους τόκους, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου.
$Kn = K_0 (1+ i)^n = 7.000 * (1+0,02)^{18} = 7.000*1,4282 = 9.997,72$ ευρώ

Άσκηση 8

Συμφέρει να αγοράσουμε ένα οικόπεδο σήμερα, πληρώνοντας 40.000 ευρώ, ή να καταθέσουμε το ποσό αυτό στην τράπεζα με ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 3% και να αγοράσουμε το οικόπεδο σε τρία χρόνια που θα στοιχίζει 45.000 ευρώ;

Απάντηση/Λύση

Υπολογίζουμε την τελική αξία του διαθέσιμου κεφαλαίου 40.000 μετά τα τρία έτη. Αφού το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο, μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Τα 3 έτη είναι 3*2=6 εξάμηνα..
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου
$Kn = K_0 (1+ i)^n = 40.000 * (1+0,03)^6 = 40.000*1,1940 = 47.762$ ευρώ.
Μετά τα τρία χρόνια, θα μπορέσουμε να αγοράσουμε το οικόπεδο το οποίο θα στοιχίζει 45.000 ευρώ και θα μας περισσέψουν και 2.762 ευρώ.

Άσκηση 19

Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο κατάθεσης 6.000 ευρώ, το οποίο ανατοκίζεται κάθε έτος με ετήσιο επιτόκιο 4% μετά από 5 έτη και 9 μήνες.

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Ko=6.000
i=4%=0,04
n=5 έτη και 9 μήνες
Ο χρόνος γράφεται (5+9/12) έτη
Το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με δύο τρόπους, αφού έχουμε κλασματική περίοδο χρόνου:
Εκθετικός ανατοκισμός
$K_n = K_o (1+i)^{n+\mu/\rho} = 6.000* (1+0,04)^{5+9/12} = 6.000*1,2529 = 7.517,8$ ευρώ
Μεικτός ανατοκισμός
$K_n = K_o (1+i)^n *(1+\mu/\rho*i) = 6.000* (1+0,04)^5*(1+9/12*0,04) = 6.000*1,2167*1,03 = 7.519,2$ ευρώ

Άσκηση 10

Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο κατάθεσης 6.000 ευρώ, το οποίο ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο με ετήσιο επιτόκιο 4% μετά από 5 έτη και 9 μήνες.

Απάντηση/Λύση
Τα δεδομένα μας είναι:
Ko=6.000
i=4%=0,04 ετήσιο
n=5 έτη και 9 μήνες
ανατοκισμός ανά εξάμηνο με επιτόκιο 2%=0,02 εξαμηνιαίο
Ο χρόνος γράφεται (5+9/12) έτη=10 εξάμηνα + 1 εξάμηνο + 3 μήνες=11,5 εξάμηνα
Το ζητούμενο είναι το Kn, το οποίο θα υπολογισθεί με δύο τρόπους:
Εκθετικός ανατοκισμός
$K_n=K_o\ (1+i)^{n+\mu/\rho}=6.000*\ (1+0{,}02)^{11{,}5}=\ 6.000*1{,}2557=7.534{,}5$ ευρώ
Μεικτός ανατοκισμός
$K_n=K_o\ (1+i)^n\ *(1+\mu/\rho*i)\ =6.000*\ (1+0{,}02)^{11}*(1+3/6*0{,}02)=\ 6.000*1{,}2434*1{,}01=\ 7.535{,}0$ ευρώ.
Στον τύπο για τον μεικτό ανατοκισμό βάλαμε 3/6 και όχι 3/12 για τους μήνες, επειδή υπολογίζουμε τον ανατοκισμό σε εξάμηνα και το εξάμηνο έχει 6 μήνες.

Άσκηση 1 1
Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο κατάθεσης 6.000 ευρώ, το οποίο ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο με ετήσιο επιτόκιο 4% μετά από 5 έτη, 9 μήνες και 14 μέρες.

Απάντηση/Λύση

Τα δεδομένα μας είναι:
Ko=6.000
i=4%=0,04 ετήσιο
n=5 έτη και 9 μήνες και 14 μέρες
ανατοκισμός ανά εξάμηνο με επιτόκιο 2%=0,02 εξαμηνιαίο
Ο χρόνος γράφεται (5+9/12+14/360) έτη=10 εξάμηνα + 1 εξάμηνο + 3 μήνες+14 μέρες=11 εξάμηνα και 3*30+14=104 μέρες.
Χρησιμοποιώντας τον μεικτό ανατοκισμό:
$K_n=K_o\ (1+i)^n\ *(1+\mu/\rho*i)\ =6.000*\ (1+0{,}02)^{11}*(1+104/180*0{,}02)=$
$=6.000*1{,}2434*1{,}0115=\ 7.546{,}6$ ευρώ.
στο μεικτό ανατοκισμό βάλαμε 104/180 και όχι 104/365 για τις μέρες, επειδή υπολογίζουμε τον ανατοκισμό σε εξάμηνα και το εξάμηνο έχει 180 μέρες.

Άσκηση 12
Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο κατάθεσης 5.000 ευρώ, το οποίο ανατοκίζεται κάθε έτος την 1-1-2018, αν το καταθέσουμε σήμερα (27-3-2015) σε μια τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 4%.

Απάντηση/Λύση
Υπολογίζουμε τις μέρες μεταξύ 27-3-2015 και 1-1-2018 και χρησιμοποιούμε τον τύπο του τόκου για πολιτικό έτος. Οι μέρες από 1-1-15 μέχρι 1-1-16 που αντιστοιχούν σε ένα έτος είναι 365 μέρες. Δεν πρέπει όμως να μετρήσουμε τις 31 μέρες του Ιανουαρίου 2015, τις 28 μέρες Φεβρουαρίου 2015 και τις 27 μέρες Μαρτίου 2015 που είναι συνολικά 86 μέρες. Επομένως οι μέρες κατάθεσης είναι 365-86=279 μέρες.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της τελικής αξίας κεφαλαίου με τον μεικτό ανατοκισμό για 2 έτη και 279 μέρες.
$K_n=K_o\ (1+i)^n\ *(1+\mu/\rho*i)\ =5.000*\ (1+0{,}04)^2*(1+279/365*0{,}04)\ =$
$=5.000*1{,}0816*1{,}0305=\ 5.573{,}4$ ευρώ.

Άσκηση 13
Να βρεθεί η αρχική αξία κεφαλαίου το οποίο ανατοκίζεται για 8 έτη με ετήσιο επιτόκιο 6%, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο και το τελικό κεφάλαιο είναι 5.000 ευρώ.

Απάντηση/Λύση

Αφού ο ανατοκισμός είναι τριμηνιαίος, μετατρέπουμε το χρόνο σε τρίμηνα και το επιτόκιο σε τριμηνιαίο. Τα 8 έτη είναι 8*4=32 τρίμηνα. Το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 6%:4=1,5%.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας κεφαλαίου
K_0 = Kn U^n =5.000* 0,6210=3.104,96 ευρώ.

Άσκηση 14

Ποιο κεφάλαιο, αν ανατοκιστεί με ετήσιο επιτόκιο 4%, θα δώσει μετά από 5 έτη και 4 μήνες τελικό κεφάλαιο 9.000 ευρώ;

Απάντηση/Λύση

Επειδή ο χρόνος μετριέται σε έτη και μήνες, για τα έτη έχουμε ανατοκισμό ενώ για τους μήνες έχουμε απλό τόκο. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας κεφαλαίου αλλά για μεικτό ανατοκισμό, που είναι:
K_0=K_n *U^n / (1+μ/ρ*i)=9.000* 0,8219/(1+4/12*0,04)=7397,1 /1,013= 7.299,77 ευρώ.

Άσκηση 15

Κεφάλαιο κατατίθεται σήμερα σε τράπεζα και ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο, για 6 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2%. Κατόπιν το επιτόκιο αλλάζει σε 2,5% το εξάμηνο και η κατάθεση διαρκεί ακόμη 5 έτη με ανατοκισμό ανά εξάμηνο. Το κεφάλαιο τότε είναι 15.000 ευρώ.
α) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο μετά από τα 6 έτη;
β) Πόσο θα είναι το κεφάλαιο σήμερα;
γ) Αν το ίδιο αρχικό κεφάλαιο κατατεθεί σε τράπεζα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% , σε πόσα χρόνια θα γίνει 15.000 ευρώ;

Απάντηση/Λύση

α) Καταρχάς κάνουμε υπολογισμούς για τη δεύτερη περίοδο ανατοκισμού, δηλαδή για το 5 έτη με 2,5% επιτόκιο. Τα δεδομένα μας είναι:
K_{11}=15.000
i=2,5%=0,025 εξαμηνιαίο
n=5 έτη =10 εξάμηνα
ανατοκισμός ανά εξάμηνο
Το ζητούμενο είναι το K_6, το οποίο θα αντιστοιχεί στην αρχική αξία της δεύτερης περιόδου. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας κεφαλαίου που είναι:
K_0=K_n *U^n ⇔ K_6=K_{11}* U^{10}= 15.000*0,7812=11.717,97 ευρώ.

β) Το ζητούμενο σημερινό κεφάλαιο αντιστοιχεί σε αρχικό κεφάλαιο για την περίοδο ανατοκισμού των 6 ετών στο τέλος των οποίων σχηματίζεται τελικό κεφάλαιο 11.717,97 ευρώ. Τα δεδομένα μας είναι:
K_6=11.717,97
i=2%=0,02 εξαμηνιαίο
n=6 έτη =12 εξάμηνα
ανατοκισμός ανά εξάμηνο
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας κεφαλαίου που είναι:
K_0=K_6 *U^n ⇔ K_0=K_6* U^{12}= 11.717,97 *0,7885=9.239,54 ευρώ.

γ) Αν το ίδιο αρχικό κεφάλαιο 9.239,54 κατατεθεί σε τράπεζα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% θα γίνει 15.000 ευρώ αλλά τώρα το ζητούμενο είναι ο χρόνος.

Ο τύπος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι $(1+i)^n$=Kn/K_0 με άγνωστο το n.
Αντικαθιστώντας, έχουμε $(1+0,03)^n$=15.000/9.239,54 ⇔ $(1+0,03)^n$=1,6234

1^{ος} τρόπος: Χρησιμοποιώντας λογαρίθμους, υπολογίζουμε n=ln(1,6234)/ln(1,03) ⇔ n=16,39 έτη.

$2^{ος}$ τρόπος: Αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε λογαρίθμους, μπορούμε να υπολογίσουμε το n στην εξίσωση $(1+0,03)^n=1,6234$, ερευνώντας τον πίνακα με τους συντελεστές ανατοκισμού για τη στήλη με επιτόκιο 3%. Στον πίνακα αυτό βρίσκουμε τιμές κοντά στο 1,6234 για 16 έτη και για 17 έτη. Με χρήση της παρεμβολής, υπολογίζουμε χρόνο ως εξής:

n=16+(1,6234-1,6047)/(1,6528 -1,6047) * (17-16)=16,388 έτη.

Άσκηση 16

Με ποιο επιτόκιο πρέπει να καταθέσουμε κεφάλαιο 3.000 ευρώ σήμερα σε μια τράπεζα με εξαμηνιαίο ανατοκισμό, ώστε να πάρουμε 5.000 ευρώ σε 8 χρόνια;

Απάντηση/Λύση

Το ζητούμενο είναι το εξαμηνιαίο επιτόκιο. Ο χρόνος είναι 8 έτη=16 εξάμηνα.

Ο τύπος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι $(1+i)^n=Kn/K_0$ με άγνωστο το i.

Αντικαθιστώντας, έχουμε $(1+i)^{16}=5.000/3.000 \Leftrightarrow (1+i)^{16}=1,67$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το i στην παραπάνω εξίσωση, ερευνώντας τον πίνακα με τους συντελεστές ανατοκισμού για τη γραμμή με χρόνο 16. Στον πίνακα αυτό βρίσκουμε τιμές κοντά στο 1,67 για 3,5% και για 3%. Με χρήση της παρεμβολής, υπολογίζουμε επιτόκιο

i =0,03+(1,67-1,6047)/(1,7340-1,6047) * (0,035-0,03)=0,0325=3,25% .

Άσκηση 17

Μετά από πόσα χρόνια κεφάλαιο 40.000 ευρώ, ανατοκιζόμενο με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3% θα διπλασιασθεί;

Απάντηση/Λύση

Το ζητούμενο είναι ο χρόνος ο οποίος υπολογίζεται σε εξάμηνα.

Ο τύπος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι $(1+i)^n=Kn/K_0$ με άγνωστο το n.

Αντικαθιστώντας, έχουμε $(1+0,03)^n=80.000/40.000 \Leftrightarrow (1+0,03)^n=2$

$1^{ος}$ τρόπος: Χρησιμοποιώντας λογαρίθμους, υπολογίζουμε $n=\ln(2)/\ln(1,03) \Leftrightarrow n= 23,45$ εξάμηνα = 11,72 έτη.

$2^{ος}$ τρόπος: Αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε λογαρίθμους, μπορούμε να υπολογίσουμε το n στην εξίσωση $(1+0,03)^n=2$, ερευνώντας τον πίνακα με τους συντελεστές ανατοκισμού για τη στήλη με επιτόκιο 3%. Στον πίνακα αυτό βρίσκουμε τιμές κοντά στο 2 για 23 εξάμηνα και για 24 εξάμηνα.

Με χρήση της παρεμβολής, υπολογίζουμε χρόνο ως εξής:

n=23+(2-1,9736)/(2,0328-1,9736) * (24-23)= 23,45 εξάμηνα=11,7 έτη.

Άσκηση 18

Δάνειο 2.000 ευρώ ανατοκίζεται με 7% και γίνεται 3.800 ευρώ. Πόσος χρόνος μεσολάβησε;

Απάντηση/Λύση

Το ζητούμενο είναι ο χρόνος.

Ο τύπος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι $(1+i)^n=Kn/K_0$ με άγνωστο το n.

Αντικαθιστώντας, έχουμε $(1+0,07)^n=3.800/2.000 \Leftrightarrow (1+0,03)^n=1,9 \Leftrightarrow n=\ln(1,9)/\ln(1,07) \Leftrightarrow n= 9,48$ έτη.

Αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε λογαρίθμους, μπορούμε να υπολογίσουμε το n στην εξίσωση $(1+0,07)^n=1,9$, ερευνώντας τον πίνακα με τους συντελεστές ανατοκισμού για τη στήλη με επιτόκιο 7%.

Στον πίνακα αυτό βρίσκουμε τιμές κοντά στο 1,9 για 9 έτη και για 10 έτη. Με χρήση της παρεμβολής, υπολογίζουμε χρόνο ως εξής:

n=9+(1,9-1,8385)/(1,9672- 1,8385) * (10-9)= 9,47785 έτη.

Άσκηση 19

Να βρεθεί η παρούσα αξία κεφαλαίου 6.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται κάθε έτος με ετήσιο επιτόκιο 4% και προεξοφλείται 5 έτη και 9 μήνες πριν τη λήξη του.

Απάντηση/Λύση

Επειδή ο χρόνος μετριέται σε έτη και μήνες, για τα έτη έχουμε ανατοκισμό, ενώ για τους μήνες έχουμε απλό τόκο. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας κεφαλαίου αλλά για μεικτό ανατοκισμό που είναι:
$K_0=K_n *U^n / (1+\mu/\rho*i)$=9.000* 0,8219/(1+9/12*0,04)=7397,1 /1,03= 7.181,65 ευρώ.

Άσκηση 20

Έμπορος προεξοφλεί γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 8.000 ευρώ το οποίο λήγει σε 3 έτη. Το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο προεξόφλησης είναι 6%. Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, ποια θα είναι η παρούσα αξία;

Απάντηση/Λύση

Η ονομαστική αξία αντιστοιχεί στο τελικό κεφάλαιο. Επειδή ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, μετατρέπουμε το χρόνο σε τρίμηνα, 3έτη=3*4=12 τρίμηνα και το επιτόκιο σε τριμηνιαίο 6%:4=1,5%. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αρχικής αξίας κεφαλαίου
$K_0=K_n *U^n$ =8.000* U^{12} =8.000* 0,8364= 6.691 ευρώ.