

Κεφάλαιο 9

Χωρικοί φορείς

Σύνοψη

Η άσκηση 19, που περιέχεται στο κεφάλαιο αυτό, αφορά στον υπολογισμό ενός απλού χωρικού φορέα με τη μέθοδο μετακινήσεων (ΜΜ). Στόχος της είναι να δείξει ότι η διαδικασία επίλυσης ακολουθεί ακριβώς τα ίδια βήματα όπως και στους επίπεδους φορείς. Αυτός, άλλωστε, είναι και ο λόγος που η «χειρωνακτική» εφαρμογή της ΜΜ περιορίζεται, συνήθως, σε επίπεδους φορείς, οι οποίοι κατά κανόνα έχουν πολύ μικρότερο πλήθος βαθμών ελευθερίας. Με γνώμονα την αποφυγή υπερβολικά πολλών υπολογισμών, που δεν θα συνεισέφεραν κάτι παραπάνω στην κατανόηση, επιλέχθηκε εδώ προς επίλυση ένας χωρικός φορέας που, υπό τη δεδομένη φόρτιση, εμφανίζει τρεις μόνον άγνωστες μετακινήσεις.

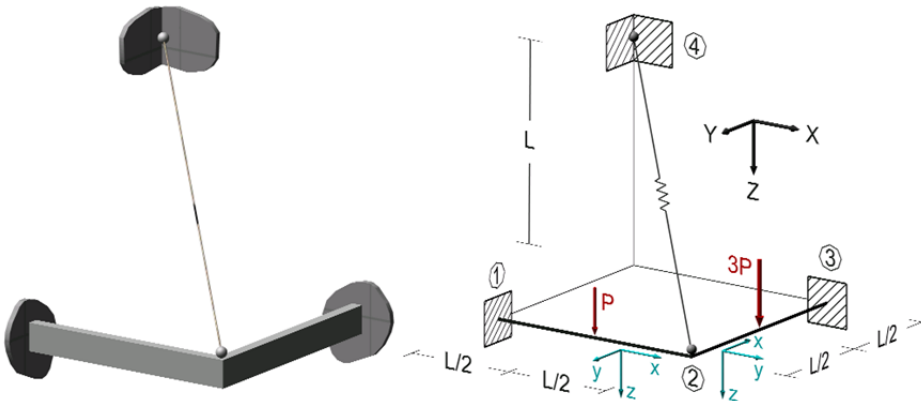
Προαπαιτούμενη γνώση

Απαραίτητη είναι η προηγούμενη κατανόηση της θεωρίας της Μεθόδου μετακινήσεων και οπωσδήποτε η μελέτη των ασκήσεων των προηγούμενων κεφαλαίων 1 έως 6. Σε κάθε περίπτωση, απαιτείται καλή γνώση της Στατικής των ισοστατικών χωρικών φορέων. Ειδικότερα, συνιστάται η μελέτη των παραγράφων 3.2.6B και 7.5.6 του [1].

Άσκηση 19

Εκφώνηση

Ο χωρικός φορέας του σχήματος 19.0 να επιλυθεί με τη ΜΜ. Να υπολογιστεί η αξονική δύναμη της ράβδου (2-4) και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ροπών κάμψης των δοκών (1-2) και (2-3) σε κατακόρυφο και οριζόντιο επίπεδο, καθώς και των ροπών στρέψης τους.



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Γεωμετρία: $L=4.00\text{m}$

Φόρτιση: $P=200\text{kN}$

Ράβδος (2-4):

Κυκλική διατομή $D=0.03\text{m}$
 $A=0.00070686\text{m}^2$
 $E_s=2.0 \cdot 10^8\text{kN/m}^2$

Δοκοί (1-2) και (2-3):

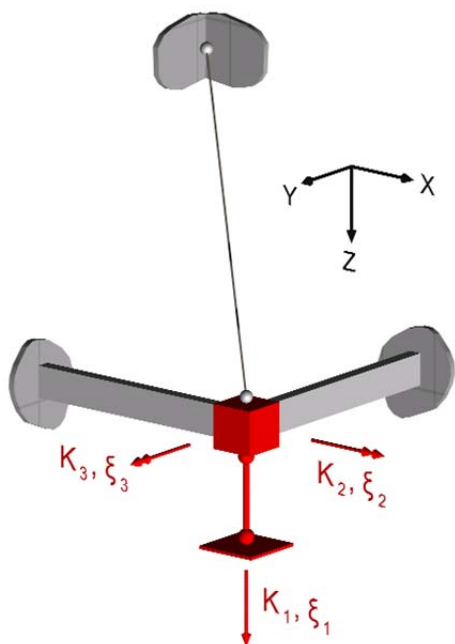
Ορθογωνική διατομή (d_y/d_z) 20/50
 $I_{xx}=9.98 \cdot 10^{-4}\text{m}^4$, $I_{yy}=2.0833 \cdot 10^{-3}\text{m}^4$
 $I_{zz}=3.33 \cdot 10^{-3}\text{m}^4$
 Υλικό: $E_b=2.9 \cdot 10^7\text{kN/m}^2$, $\nu_b=0.2$
 $G_b=E_b/[2(1+\nu)]$
 Παραδοχές: $E_b A \rightarrow G_b A_s \rightarrow \infty$

Σχήμα 19.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

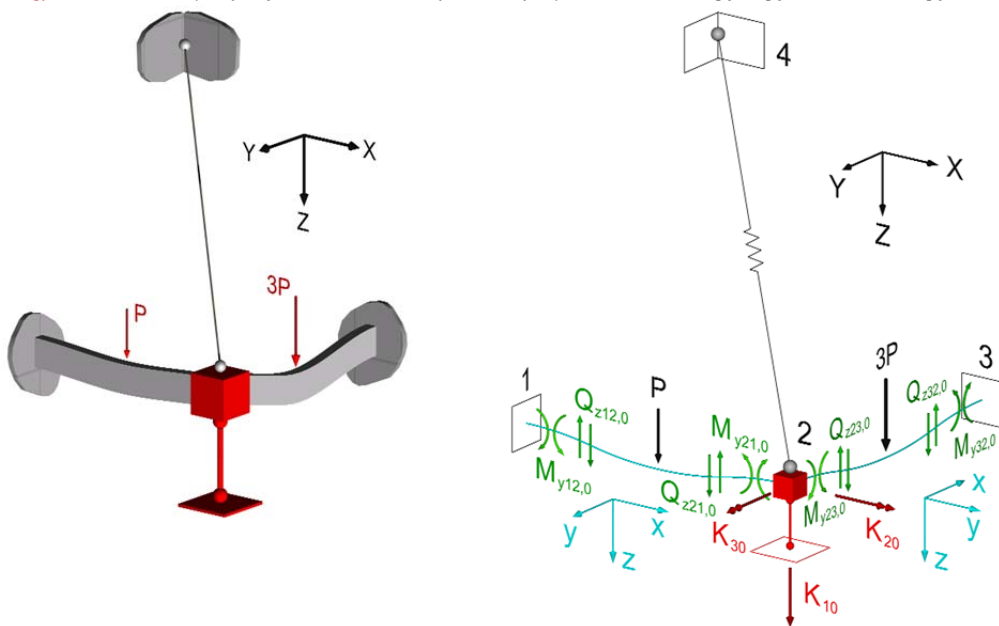
Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

Ο φορέας του σχήματος 19.0 είναι ένας χωρικός φορέας με έναν ελεύθερο κόμβο (τον κόμβο 2). Επομένως, οι βαθμοί ελευθερίας του, στην περίπτωση κατά την οποία λαμβάνεται υπόψη η πεπερασμένη δυστένεια των δύο δοκών 1-2 και 2-3, θα ήταν έξι, όσες, δηλαδή, είναι και οι ελευθερίες κίνησης ενός κόμβου στο χώρο. Επειδή, όμως, εδώ οι δοκοί θεωρούνται ατελείς, ο κόμβος 2 δεν έχει δυνατότητες μετατόπισης κατά τη διεύθυνση των αξόνων X και Y του καθολικού συστήματος αναφοράς. Επιπλέον, η στρέψη ϕ_z του κόμβου 2 περί τον κατακόρυφο άξονα Z είναι μηδενική, διότι ο φορέας δεν φορτίζεται από δυνάμεις εντός του επιπέδου X-Y αυτού ή από ροπές με διανύσματα ροπών παράλληλα με τον άξονα Z. Επομένως, οι βαθμοί ελευθερίας του φορέα είναι 3 (u_z, ϕ_x, ϕ_y) και το ΓΚΣ είναι αυτό που δίνεται στο σχήμα 19.1. Η τρικινητή πάκτωση του κόμβου 2 συμβολίζεται με τον κόκκινο χρώματος κύβο, ενώ η κατακόρυφη παγίωσή του με την κατακόρυφη κόκκινη δεσμική ράβδο.



Σχήμα 19.1 Το ΓΚΣ του φορέα του σχήματος 19.0.

Βήμα 2. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "0"



(Για τις τιμές των ροπών βλ. Πίνακα 1 του Παραρτήματος)

$$M_{y12,0} = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L_{12}^2} = \frac{P \cdot (L_{12}/2) \cdot (L_{12}/2)^2}{L_{12}^2} = 100 \text{ kNm}$$

$$Q_{z12,0} = -\frac{P \cdot b^2}{L_{12}^3} \cdot (L_{12} + 2 \cdot a) = -100 \text{ kN}$$

$$M_{y23,0} = \frac{(3 \cdot P) \cdot a \cdot b^2}{L_{23}^2} = \frac{(3 \cdot P) \cdot (L_{23}/2) \cdot (L_{23}/2)^2}{L_{23}^2} = 300 \text{ kNm}$$

$$Q_{z23,0} = -\frac{(3 \cdot P) \cdot b^2}{L_{23}^3} \cdot (L_{23} + 2 \cdot a) = -300 \text{ kN}$$

$$M_{y21,0} = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L_{12}^2} = -100 \text{ kNm}$$

$$Q_{z21,0} = -\frac{P \cdot a^2}{L_{12}^3} \cdot (L_{12} + 2 \cdot b) = -100 \text{ kN}$$

$$M_{y32,0} = -\frac{(3 \cdot P) \cdot a^2 \cdot b}{L_{23}^2} = -300 \text{ kNm}$$

$$Q_{z32,0} = -\frac{(3 \cdot P) \cdot a^2}{L_{23}^3} \cdot (L_{23} + 2 \cdot b) = -300 \text{ kN}$$

$$M_{x12,0} = M_{x21,0} = 0$$

$$M_{x23,0} = M_{x32,0} = 0$$

$$N_{24,0} = -N_{42,0} = 0$$

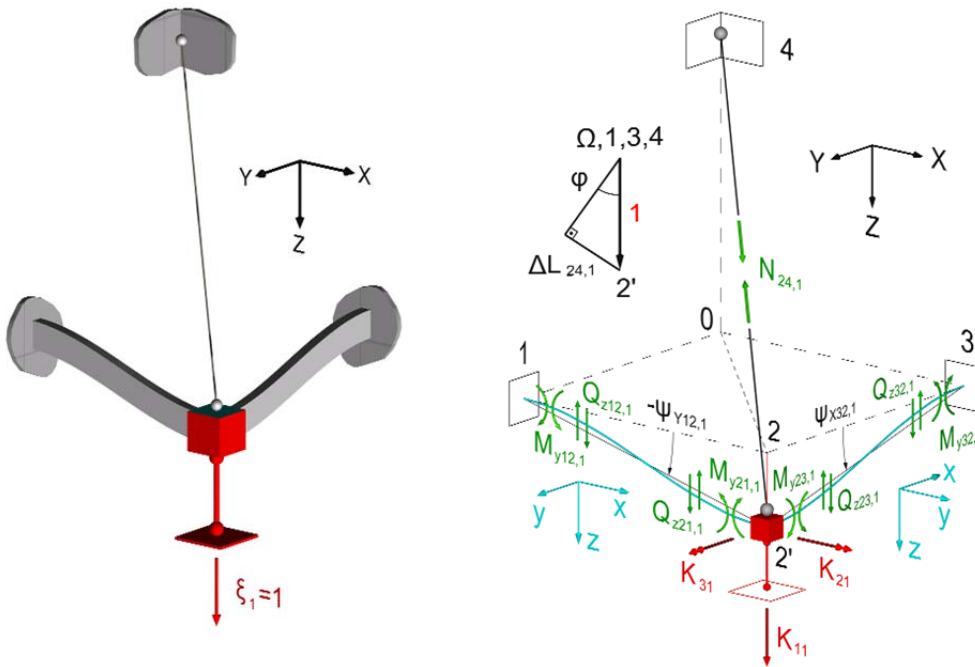
Σχήμα 19.2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0".

Σημείωση:

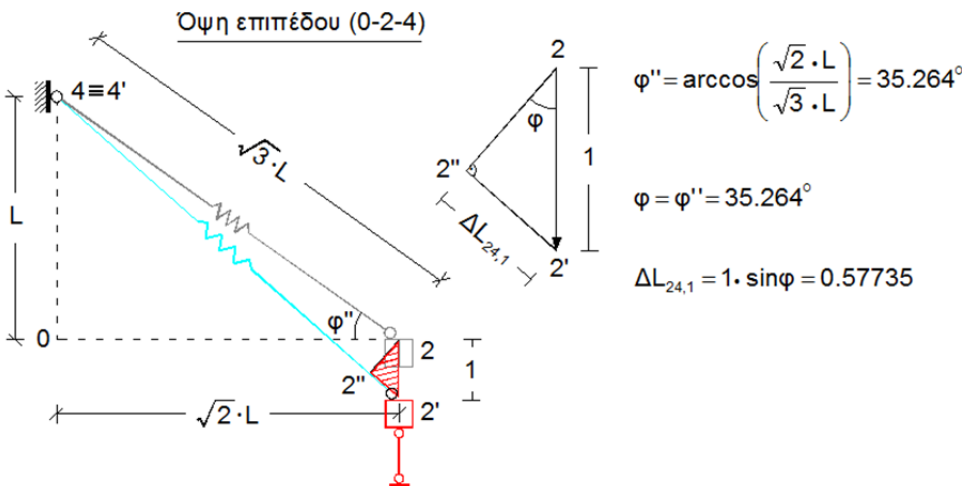
Στα σχήματα της κατάστασης "0", όπως και στα σχήματα των μοναδιαίων καταστάσεων που θα ακολουθήσουν, παρουσιάζονται εκείνα μόνον τα μεγέθη έντασης, τα οποία χρειάζονται για τον υπολογισμό των αντιδράσεων, που αναπτύσσονται στις τρεις προστεθείσες δεσμικές ράβδους στον κόμβο 2.

Βήμα 3. Υπολογισμός μεγεθών έντασης / μετακίνησης των καταστάσεων "ξ_i=1" (i=1,2,3)

- Κατάσταση "ξ₁=1" (Σχ. 19.3)



$$\psi_{y12,1} = \psi_{y12,1} = \frac{v_{z1} - v_{z2}}{L_{12}} = \frac{0 - 1}{4} = -0.25 \quad \psi_{y23,1} = \psi_{x23,1} = \frac{v_{z2} - v_{z3}}{L_{23}} = \frac{1 - 0}{4} = 0.25$$



Σχήμα 19.3 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "ξ₁=1".

Οι ροπές στην κατάσταση "ξ₁=1" υπολογίζονται βάσει των τύπων του Πίνακα 1 για την αμφίπακτη δοκό. Από τις ροπές υπολογίζονται οι τέμνουσες κατά τα γνωστά:

$$M_{y_{12,1}} = -6 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy12}}{L_{12}} \right) \cdot \psi_{y_{12,1}} = -6 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^7 \cdot 2.083 \cdot 10^{-3}}{4} \right) \cdot (-0.25) = 22656.25 \text{ kNm} \quad M_{y_{21,1}} = M_{y_{12,1}}$$

$$Q_{z_{12,1}} = 12 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy12}}{L_{12}^2} \right) \cdot \psi_{y_{12,1}} = -11328.125 \text{ kN} \quad Q_{z_{21,1}} = -Q_{z_{12,1}}$$

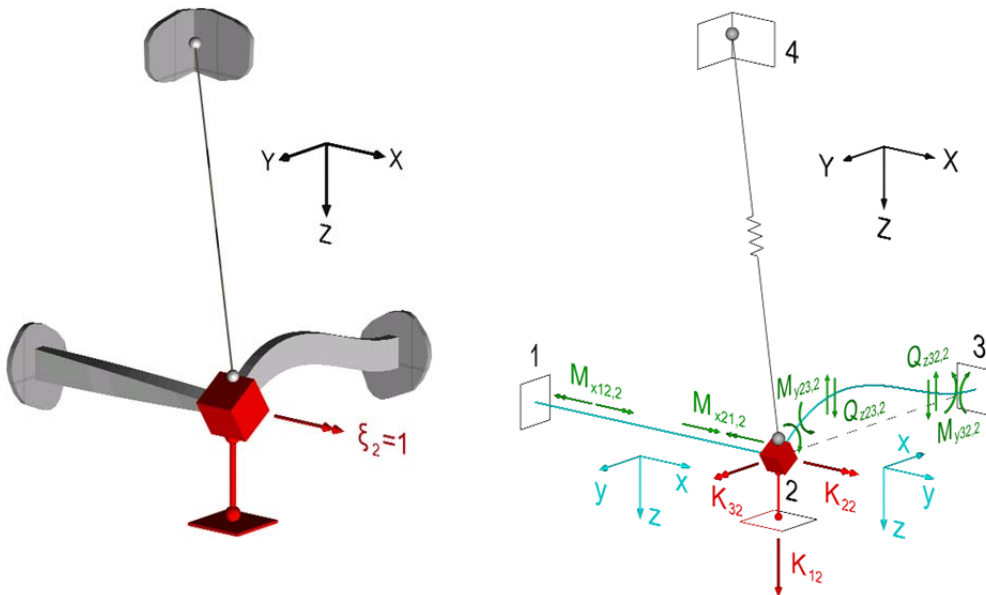
$$M_{y_{23,1}} = -6 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy23}}{L_{23}} \right) \cdot \psi_{y_{23,1}} = -6 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^7 \cdot 2.083 \cdot 10^{-3}}{4} \right) \cdot 0.25 = -22656.25 \text{ kNm} \quad M_{y_{32,1}} = M_{y_{23,1}}$$

$$Q_{z_{23,1}} = 12 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy23}}{L_{23}^2} \right) \cdot \psi_{y_{23,1}} = 11328.125 \text{ kN} \quad Q_{z_{32,1}} = -Q_{z_{23,1}}$$

$$M_{x_{12,1}} = M_{x_{21,1}} = 0 \quad M_{x_{23,1}} = M_{x_{32,1}} = 0$$

$$N_{24,1} = -N_{42,1} = E_s A_{24} \cdot \left(\frac{\Delta L_{24,1}}{L_{24}} \right) = 2.0 \cdot 10^8 \cdot 0.00070686 \cdot \left(\frac{0.57735}{6.9282} \right) = 11780.97 \text{ kN}$$

• Κατάσταση " $\xi_2=1$ " (Σχ. 19.4)



$$\varphi_{x_{21}} = \varphi_{y_{23}} = \xi_2 = 1$$

Ροπές στρέψης :

$$M_{x_{12,2}} = \left(-\frac{G_b \cdot I_{xx12}}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_{x_{21}} = \left(-\frac{1.2083 \cdot 10^7 \cdot 9.981 \cdot 10^{-4}}{4} \right) \cdot 1 = -3015.094 \text{ kNm} \quad M_{x_{21,2}} = -M_{x_{12,2}} \quad M_{x_{23,2}} = M_{x_{32,2}} = 0$$

Ροπές κάμψης, τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις :

$$M_{y_{12,2}} = M_{y_{21,2}} = 0 \quad Q_{z_{12,2}} = Q_{z_{21,2}} = 0$$

$$M_{y_{23,2}} = 4 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_{y_{23}} = 4 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^7 \cdot 2.083 \cdot 10^{-3}}{4} \right) \cdot 1 = 60416.667 \text{ kNm}$$

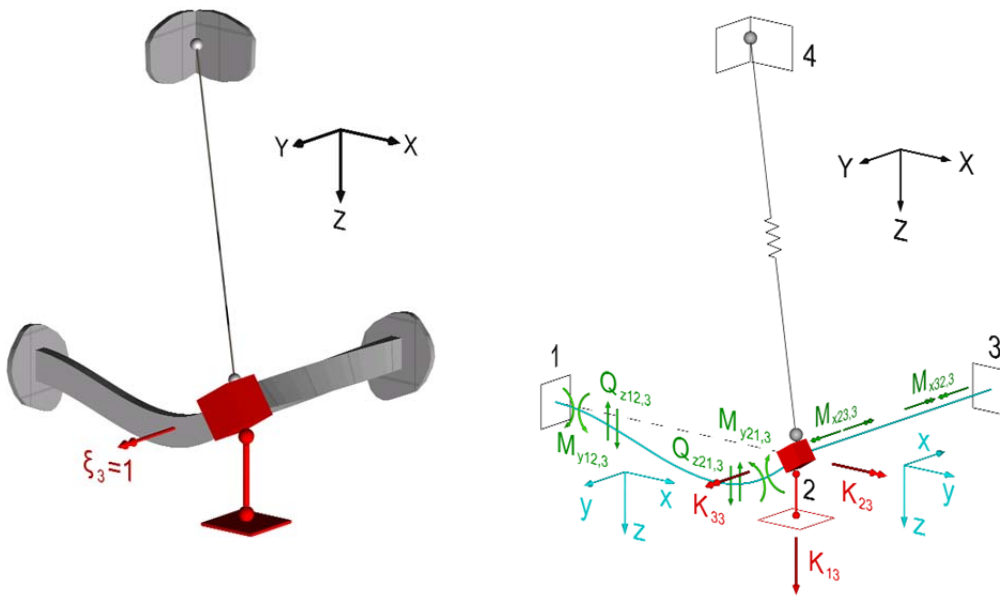
$$M_{y_{32,2}} = 2 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_{y_{23}} = 2 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^7 \cdot 2.083 \cdot 10^{-3}}{4} \right) \cdot 1 = 30208.333 \text{ kNm}$$

$$Q_{z_{23,2}} = -6 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy23}}{L_{23}^2} \right) \cdot \varphi_{y_{23}} = -22656.25 \text{ kN} \quad Q_{z_{32,2}} = -Q_{z_{23,2}}$$

$$N_{24,2} = -N_{42,2} = 0$$

Σχήμα 19.4 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_2=1$ ".

- Κατάσταση " $\xi_3=1$ " (Σχ. 19.5)



$$\varphi_{y12} = -\varphi_{x23} = \xi_3 = 1$$

Ροπές κάμψης, τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις :

$$M_{y12,3} = 2 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy12}}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_{y12} = 2 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^7 \cdot 2.083 \cdot 10^{-3}}{4} \right) \cdot 1 = 30208.333 \text{ kNm}$$

$$M_{y21,3} = 4 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy12}}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_{y12} = 4 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^7 \cdot 2.083 \cdot 10^{-3}}{4} \right) \cdot 1 = 60416.667 \text{ kNm}$$

$$Q_{z12,3} = -6 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy12}}{L_{12}^2} \right) \cdot \varphi_{y12} = -22656.25 \text{ kN} \quad Q_{z21,3} = -Q_{z12,3}$$

$$M_{y23,3} = M_{y32,3} = 0 \quad Q_{z23,3} = Q_{z32,3} = 0$$

$$N_{24,3} = -N_{42,3} = 0$$

Ροπές στρέψης :

$$M_{x12,3} = M_{x21,3} = 0$$

$$M_{x23,3} = \left(\frac{G_b \cdot I_{xx23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_{x23} = \left(\frac{1.2083 \cdot 10^7 \cdot 9.981 \cdot 10^{-4}}{4} \right) \cdot (-1) = -3015.094 \text{ kNm} \quad M_{x32,3} = -M_{x23,3}$$

Σχήμα 19.5 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_3=1$ ".

Σημείωση:

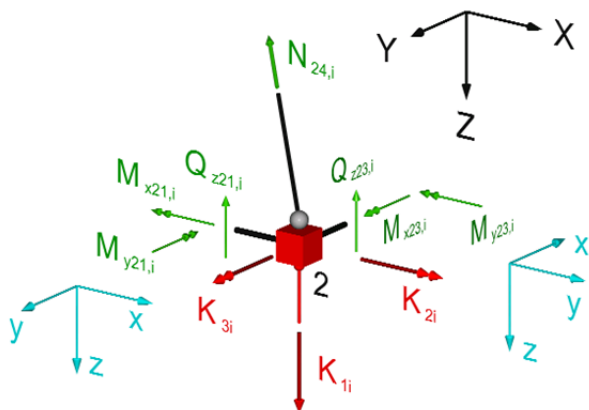
Αν και οι τελικές τέμνουσες μπορούν να υπολογιστούν άμεσα από τις τελικές ροπές βάσει των εξισώσεων ισορροπίας, υπολογίστηκαν εδώ και σε όλες τις ενδιάμεσες καταστάσεις "0" και " $\xi_i=1$ ", έτσι ώστε να μπορούν μετά τον προσδιορισμό των υπεραριθμών ξ_i , να υπολογιστούν με την αρχή της επαλληλίας ανεξάρτητα από τις τελικές ροπές.

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας και φόρτισης

Συντελεστές στιβαρότητας K_{i1}, K_{i2}, K_{i3} ($i=1,2,3$)

Οι συντελεστές στιβαρότητας K_{ij} θα υπολογιστούν με κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας των δυνάμεων και των ροπών που ενεργούν στον κόμβο 2 του ΓΚΣ, σε κάθε μία από τις τρεις μοναδιαίες καταστάσεις. Για λόγους απλότητας, θα καταστρωθούν πρώτα οι εξισώσεις ισορροπίας στη γενική τους μορφή (Σχ. 19.6), εισάγοντας όλα τα μεγέθη με τη συμβατικά θετική τους φορά και, έπειτα, θα γίνει η εφαρμογή των εξισώσεων αυτών για τα μεγέθη που αντιστοιχούν στις τρεις μοναδιαίες καταστάσεις, έτσι ώστε να προκύψουν οι τιμές των συντελεστών στιβαρότητας. Επίσης, για λόγους εποπτικότερης απεικόνισης, ο

συμβολισμός των ροπών στα παρακάτω σχήματα θα γίνει με τη μορφή διανυσμάτων στον χώρο (ευθύγραμμο βέλη με διπλή μύτη) και όχι με τα καμπύλα επίπεδα βέλη, που χρησιμοποιούνται σε επίπεδους φορείς.



$$\sum F_z = 0 \Rightarrow K_{1i} - Q_{z21,i} - Q_{z23,i} - N_{24,i} \cdot \cos\omega = 0$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow K_{2i} - M_{y23,i} - M_{x21,i} = 0$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow K_{3i} + M_{x23,i} - M_{y21,i} = 0$$

Σχήμα 19.6 Εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων και ροπών που δρουν στον κόμβο 2 του ΓΚΣ.

Σημείωση:

Η γωνία ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ράβδος 2-4 με την κατακόρυφο και είναι ίση με $\omega = 90 - \varphi$, όπου $\varphi = 35.264^\circ$ (βλ. Σχ. 19.6).

• Κατάσταση “ $\zeta_1 = 1$ ”

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow K_{11} - 11328.125 - 11328.125 - 11780.97 \cdot \cos(54.736) = 0 \Rightarrow K_{11} = 29458.0\text{kN}$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow K_{21} + 22656.25 - 0 = 0 \Rightarrow K_{21} = -22656.25\text{kNm}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow K_{31} + 0 - 22656.25 = 0 \Rightarrow K_{31} = 22656.25\text{kNm}$$

• Κατάσταση “ $\zeta_2 = 1$ ”

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow K_{12} - 0 - (-22656.25) - 0 \cdot \cos\omega = 0 \Rightarrow K_{12} = -22656.25\text{kN}$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow K_{22} - 60416.667 - 3015.094 = 0 \Rightarrow K_{22} = 63431.76\text{kNm}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow K_{32} + 0 - 0 = 0 \Rightarrow K_{32} = 0$$

• Κατάσταση “ $\zeta_3 = 1$ ”

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow K_{13} - 22656.25 - 0 - 0 \cdot \cos\omega = 0 \Rightarrow K_{13} = 22656.25\text{kN}$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow K_{23} - 0 - 0 = 0 \Rightarrow K_{23} = 0$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow K_{33} - 3015.094 - 60416.667 = 0 \Rightarrow K_{33} = 63431.76\text{kNm}$$

Συντελεστές φόρτισης K_{i0} ($i = 1, 2, 3$)

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας παίρνουμε:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow K_{10} - (-100) - (-300) - 0 \cdot \cos\omega = 0 \Rightarrow K_{10} = -400\text{kN}$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow K_{20} - 300 - 0 = 0 \Rightarrow K_{20} = 300\text{kNm}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow K_{30} + 0 - (-100) = 0 \Rightarrow K_{30} = -100\text{kNm}$$

Βήμα 5. Κατάστροψη του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας και υπολογισμός των ξ_i

Το σύστημα των τριών επιλυσών εξισώσεων δίνεται παρακάτω. Από την επίλυσή του προκύπτουν οι τιμές των τριών αγνώστων μεγεθών μετακίνησης ξ_i ($i=1-3$):

$$\begin{bmatrix} 29458.0 & -22656.25 & 22656.25 \\ -22656.25 & 63431.76 & 0 \\ 22656.25 & 0 & 63431.76 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -400 \\ 300 \\ -100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.019372\text{m} \\ 0.00219\text{rad} \\ -0.00534\text{rad} \end{bmatrix}$$

Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Ο υπολογισμός των τελικών καμπτικών ροπών M_y και των στρεπτικών ροπών M_x επιτυγχάνεται με εφαρμογή της σχέσης επαλληλίας:

$$M_{ij} = M_{ij,0} + \sum_{k=1}^3 (M_{ij,k} \cdot \xi_k)$$

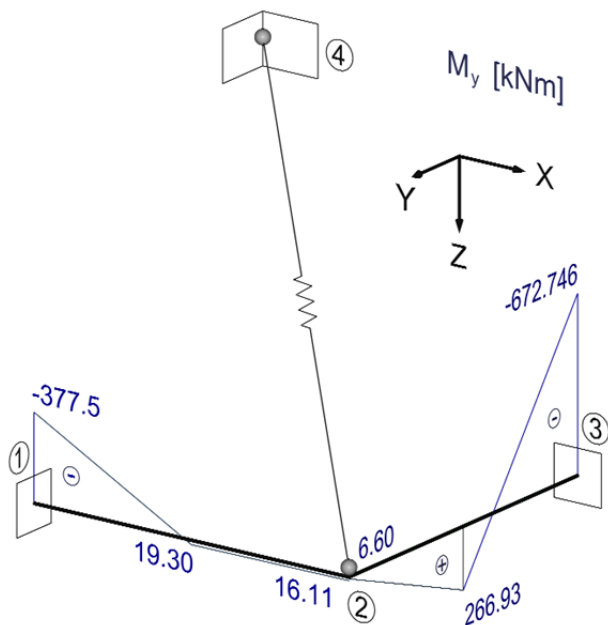
Οι τέμνουσες δυνάμεις Q_z προκύπτουν, είτε με εφαρμογή σχέσης επαλληλίας ανάλογης με αυτής των ροπών, είτε από τις ήδη υπολογισθείσες καμπτικές ροπές M_y , βάσει των συνθηκών ισορροπίας.

Ροπές M_z (και κατά συνέπεια και τέμνουσες Q_y) δεν αναπτύσσονται λόγω της μη υπάρξεως εξωτερικών φορτίων, τα οποία θα μπορούσαν να τις προκαλέσουν.

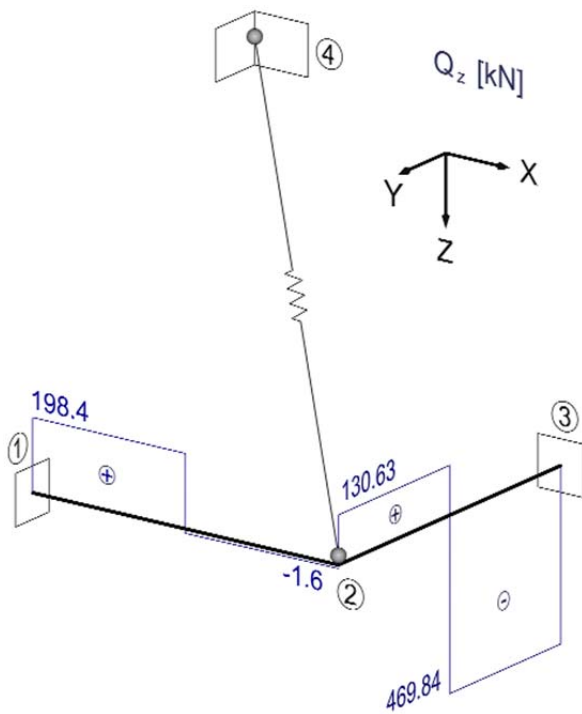
Τέλος, η αξονική δύναμη της ράβδου 2-4 υπολογίζεται ως εξής:

$$N_{24} = N_{42} = N_{24,0} + N_{24,1} \cdot \xi_1 + N_{24,2} \cdot \xi_2 + N_{24,3} \cdot \xi_3 = 0 + 11780.97 \cdot \xi_1 + 0 \cdot \xi_2 + 0 \cdot \xi_3 = 11780.97 \cdot 0.019372 \Rightarrow N_{24} = 228.22\text{kN}$$

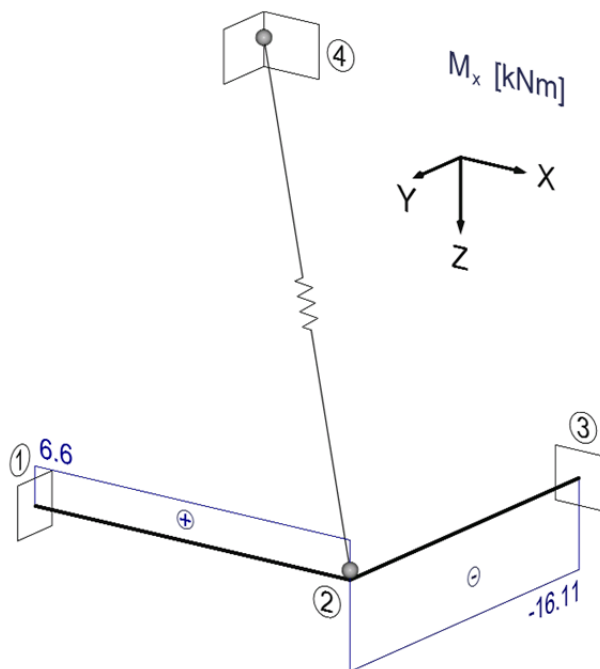
Τα διαγράμματα των ροπών M_y , M_x και Q_z παρουσιάζονται στα ακόλουθα σχήματα 19.7 έως 19.9.



Σχήμα 19.7 Διάγραμμα καμπτικών ροπών M_y .



Σχήμα 19.8 Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων Q_z .



Σχήμα 19.9 Διάγραμμα στρεπτικών ροπών M_x .

Βιβλιογραφικές αναφορές

- [1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ι: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.