

Ευρωπαϊκά παράγωγα

17.1 Ευρωπαϊκά δικαιώματα

Ορισμός 17.1. 1) **Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς** σε μία μετοχή είναι ένα συμβόλαιο που δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να αγοράσει μία μετοχή από τον εκδότη του συμβολαίου ένα δεδομένο χρόνο T σε δεδομένη τιμή K .

2) **Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης** σε μία μετοχή είναι ένα συμβόλαιο που δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να πουλήσει μία μετοχή στον εκδότη του συμβολαίου ένα δεδομένο χρόνο T σε δεδομένη τιμή K .

Ο χρόνος T λέγεται **ημερομηνία λήξης** και η τιμή K λέγεται **τιμή άσκησης** του δικαιώματος. Ο κάτοχος ενός από τα δύο πιο πάνω συμβόλαια δεν είναι υποχρωμένος να κάνει τη συναλλαγή που του επιτρέπεται. Την κάνει μόνο αν τη θεωρεί συμφέρουσα. Και η συναλλαγή είναι δυνατόν να γίνει μόνο κατά τον χρόνο T . Αν αυτός ο χρόνος περάσει, το συμβόλαιο είναι άχρηστο.

Τα δύο πιο πάνω παράγωγα είναι απλά Ευρωπαϊκά παράγωγα σύμφωνα με τον Ορισμό 16.5. Πράγματι, ας δούμε αναλυτικά το κέρδος που αποφέρουν τον χρόνο της άσκησης. Για το δικαίωμα αγοράς, αν τον χρόνο T η τιμή S_T της μετοχής στην αγορά είναι γνήσια μεγαλύτερη από K , τότε ο κάτοχος του δικαιώματος το ασκεί και αγοράζει μία μετοχή με τιμή K . Αμέσως την πουλάει στην αγορά σε τιμή S_T και έχει κέρδος $S_T - K$. Αν όμως ισχύει $S_T \leq K$, προφανώς δεν ασκεί το δικαίωμα. Γιατί να αγοράσει μια μετοχή σε τιμή K αν μπορεί να την βρεί στην αγορά πιά φθηνά; Άρα το κέρδος είναι $(S_T - K)^+$ σε κάθε περίπτωση και επομένως το παράγωγο έχει τη μορφή $g_c(S_T)$ με $g_c(x) = (x - K)^+$.

Για το δικαίωμα πώλησης, ο κάτοχός του ασκεί το δικαίωμα που έχει μόνο αν $S_T < K$, οπότε αγοράζει από την αγορά μία μετοχή με τιμή S_T και την πουλάει στον εκδότη του δικαιώματος στη συμφωνημένη τιμή K . Έτσι έχει κέρδος $K - S_T$. Το κέρδος είναι $(K - S_T)^+$ σε κάθε περίπτωση και επομένως το παράγωγο έχει τη μορφή $g_p(S_T)$ με $g_p(x) = (K - x)^+$.

Ποιος ενδιαφέρεται να αγοράσει ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς; Ένας επενδυτής που πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει πολύ. Γιατί τότε αγοράζοντας φθηνά και πουλώντας στην τιμή αγοράς θα κερδίσει τη διαφορά. Αντίστοιχα, Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης αγοράζει ένας που πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής θα πέσει.

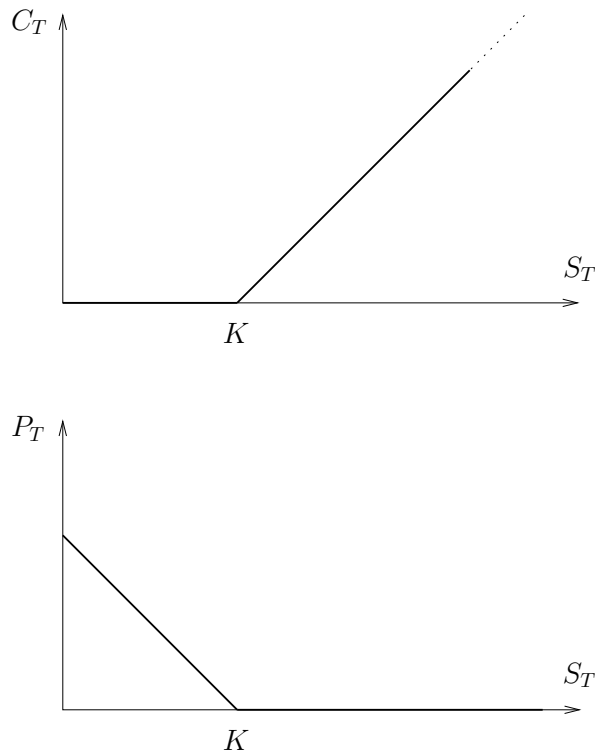
Αν όμως ένας επενδυτής πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει, γιατί δεν αγοράζει την ίδια τη μετοχή; Στο επόμενο παράδειγμα φαίνεται ότι η αγορά ενός Ευρωπαϊκού δικαίωμα αγοράς είναι κίνηση που έχει περισσότερο ρίσκο αλλά και δυνατότητα για πολύ μεγαλύτερα κέρδη.

Παράδειγμα 17.2. Ας θεωρήσουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς στη μετοχή της Xerox με $T = 20$ Ιουλίου 2012 και $K = 40\text{€}$. Υποθέτουμε ότι σήμερα είναι 10 Ιουνίου 2012 και η τιμή της μετοχής είναι 36€ . Αγοράζει αυτό το συμβόλαιο κάποιος που πιστεύει ότι η μετοχή στις 20 Ιουλίου θα έχει τιμή πάνω από 40 Ευρώ. Γιατί όμως δεν αγοράζει τη μετοχή την ίδια σήμερα;

Έστω ότι γνωρίζουμε ότι κατά τον χρόνο T μπορεί να συμβεί ένα από τα εξής σενάρια:

A : Η τιμή της μετοχής είναι 30€ ,

B : Η τιμή της μετοχής είναι 42€ ,



Σχήμα 17.1: Η συνάρτηση πληρωμής κατά τον χρόνο άσκησης T για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (πάνω) και ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης (κάτω) με κοινή τιμή άσκησης K .

και ότι το πρώτο σενάριο έχει πιθανότητα $1/3$, ενώ το δεύτερο $2/3$. Ένας κάτοχος του συμβολαίου θα έχει κέρδος $0€$ στο σενάριο A (δεν θα το χρησιμοποιήσει) και κέρδος $2€$ στο σενάριο B. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η σωστή τιμή του συμβολαίου είναι $1€$. Έστω λοιπόν ότι ένας επενδυτής έχει $360€$. Ας μελετήσουμε τις εξής δύο επιλογές:

- 1 : Ο επενδυτής αγοράζει 10 μετοχές της Xerox.
- 2 : Ο επενδυτής αγοράζει 360 Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς.

Κάθε επιλογή κοστίζει $360€$. Αν συμβεί το σενάριο A, τότε η επιλογή 1 δίνει ζημιά $60€$, ενώ η επιλογή 2 ζημιά $360€$. Αν συμβεί το σενάριο B, η επιλογή 1 δίνει κέρδος $60€$, ενώ η επιλογή 2 δίνει κέρδος $2 \times 360 - 360 = 360€$. Δηλαδή η επιλογή 1 προσφέρει ή ζημιά 16.6% ή κέρδος 16.6% επί του αρχικού κεφαλαίου, ενώ η επιλογή 2 προσφέρει ή ζημιά 100% ή κέρδος 100% επί του αρχικού κεφαλαίου. Η επιλογή B είναι πιο επιθετική. Σε ευνοϊκή περίπτωση τριπλασιάζει κανείς το κεφάλαιό του. Η επιλογή A είναι πιο συντηρητική.

Ανάλογες παρατηρήσεις με τις παραπάνω μπορούμε να κάνουμε και για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης.

Συμβόλαια όπως αυτά του Ορισμού 17.1 μπορούν να αφορούν ένα μέγεθος διαφορετικό από την τιμή μιας μετοχής, π.χ., την τιμή του χρυσού ή του σιταριού.

Η χρήση των παραγώγων δεν είναι πάντοτε κερδοσκοπική. Μια άλλη τους χρήση είναι στην αντιστάθμιση κινδύνου. Για παράδειγμα, μια εταιρία ενδέχεται να θέλει να εξαλείψει την αβεβαιότητα στην τιμή μιας πρώτης ύλης που χρειάζεται. Έστω ότι αυτή η πρώτη ύλη είναι το πετρέλαιο. Αγοράζει λοιπόν έναν αριθμό Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς με τιμή, π.χ., $1.5€$ το λίτρο, και είναι σίγουρη ότι τη δεδομένη ημερομηνία στο μέλλον δεν χρειάζεται να ανησυχεί για την τιμή του πετρελαίου. Θα της κοστίζει το πολύ $1.5€$ το λίτρο.

17.2 Σχέση μεταξύ τιμών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης

Θεωρούμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης πάνω σε μια μετοχή που έχουν και τα δύο την ίδια ημερομηνία λήξης T και την ίδια τιμή άσκησης K . Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t \leq T$ οι τιμές τους είναι C_t, P_t ενώ η τιμή της μετοχής είναι S_t . Ένα επιχείρημα βασισμένο στην έλλειψη arbitrage δίνει μια απλή σχέση που ικανοποιούν οι τιμές C_t, P_t .

Πρόταση 17.3. *Αν το επιτόκιο της τράπεζας είναι σταθερό, ίσο με r , και δεν υπάρχει δυνατότητα arbitrage, τότε για κάθε $t \leq T$ ισχύει*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}. \quad (17.1)$$

Απόδειξη. Η σχέση ισχύει για $t = T$, γιατί το αριστερό μέλος της ισότητας ισούται με $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = (S_T - K)^+ - (S_T - K)^- = S_T - K$, που συμπίπτει με το δεξί μέλος.

Για $t < T$, τον χρόνο t κάνουμε το εξής. Αγοράζουμε ένα δικαίωμα πώλησης και μία μετοχή και πουλάμε ένα δικαίωμα αγοράς. Για την αγορά αυτού του χαρτοφυλακίου ξοδεύουμε

$$P_t + S_t - C_t.$$

Αυτό το χαρτοφυλάκιο αποφέρει τη χρονική στιγμή T ποσό K . Γιατί τότε η αξία του θα είναι

$$(K - S_T)^+ - (S_T - K)^+ + S_T = (K - S_T)^+ - (K - S_T)^- + S_T = (K - S_T) + S_T = K.$$

Να το δούμε και πρακτικά πως θα δουλέψει. Τον χρόνο T , αν ισχύει $S_T < K$, ασκούμε το δικαίωμα πώλησης. Δηλαδή παίρνουμε τη μετοχή που έχουμε και την πουλάμε στον εκδότη του δικαιώματος πώλησης στην τιμή K . Αν ισχύει $S_T \geq K$, τότε θα έρθει το άτομο στο οποίο έχουμε πουλήσει το δικαίωμα αγοράς για να αγοράσει μία μετοχή στην τιμή K . Του δίνουμε λοιπόν την μία μετοχή που έχουμε και παίρνουμε K .

Άρα το αρχικό χαρτοφυλάκιο δίνει ντετερμινιστικά το ποσό K τον χρόνο T (είναι αναπαράγον για το ποσό K τη χρονική στιγμή T). Το ίδιο κάνει και η τράπεζα αν καταθέσουμε τον χρόνο t το ποσό $Ke^{-r(T-t)}$. Πρέπει λοιπόν οι δύο επιλογές

A_1 :δικαίωμα πώλησης – δικαίωμα αγοράς + μετοχή,

A_2 : ποσό $Ke^{-r(T-t)}$ στην τράπεζα τον χρόνο t ,

να έχουν την ίδια αξία τη χρονική στιγμή t , γιατί διαφορετικά έχουμε arbitrage. Και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Αλλά ας δούμε αναλυτικά πώς εμφανίζεται arbitrage αν δεν ισχύει η ισότητα. Για παράδειγμα, αν

$$P_t + S_t - C_t > Ke^{-r(T-t)},$$

τότε πουλάμε την επιλογή A_1 και αγοράζουμε την επιλογή A_2 . Πιο συγκεκριμένα, πουλάμε ένα δικαίωμα πώλησης, αγοράζουμε ένα δικαίωμα αγοράς και κάνουμε ανοιχτή πώληση σε μία μετοχή. Τέλος, βάζουμε στην τράπεζα ποσό $Ke^{-r(T-t)}$. Ό,τι και να γίνει τον χρόνο T , οι υποχρεώσεις μας θα έχουν κόστος K , αλλά το ποσό που είχαμε βάλει στην τράπεζα έχει γίνει πλέον K και τις καλύπτει ακριβώς. Όμως εμείς στην αρχή κερδίσαμε το ποσό $P_t + S_t - C_t - Ke^{-r(T-t)} > 0$. Αυτό είναι arbitrage. Όμοια δείχνουμε ότι και η $P_t + S_t - C_t < Ke^{-r(T-t)}$ οδηγεί σε arbitrage, και η πρόταση αποδείχθηκε. ■

17.3 Άλλα είδη δικαιωμάτων

Έστω $(S_t)_{t \geq 0}$ η ανέλιξη της τιμής μιας συγκεκριμένης μετοχής. Ορίζονται με βάση αυτή την τιμή κάποια άλλα είδη δικαιωμάτων. Για την περιγραφή τους θα χρειαστούμε τις εξής ανελιξεις:

$$\underline{S}_t := \inf\{S_s : s \in [0, t]\}, \quad (17.2)$$

$$\overline{S}_t := \sup\{S_s : s \in [0, t]\} \quad (17.3)$$

για κάθε $t \geq 0$. Αυτές λέγονται το τρέχον ελάχιστο και τρέχον μέγιστο αντίστοιχα της S .

Ασιατικά δικαιώματα. Ένα τέτοιο δικαίωμα δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα τη στιγμή της λήξης T να πάρει ένα ποσό που είναι συνάρτηση του μέσου όρου

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt$$

της τιμής της μετοχής. Έτσι, ένα Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης K και χρόνο λήξης T δίνει το ποσό

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)^+.$$

Ένα Ασιατικό δικαίωμα πώλησης με τιμή άσκησης K και χρόνο λήξης T δίνει στον κάτοχό του τον χρόνο T το ποσό $(K - T^{-1} \int_0^T S_t dt)^+$.

Δικαιώματα με φράγματα. Στον ορισμό αυτών εμπλέκεται μια παράμετρος $c > 0$ (το φράγμα) η οποία συμφωνείται κατά την αγορά τους. Δύο είναι τα είδη αυτών των δικαιωμάτων, τα εντός και τα εκτός. Ένα δικαίωμα εντός λήγει με αξία μηδέν εκτός αν η ανέλιξη S κατά το χρονικό διάστημα $[0, T]$ επισκεφτεί και τα δύο διαστήματα $[0, c]$, $[c, \infty)$ (δηλαδή διασχίσει το φράγμα c). Ενώ ένα δικαίωμα εκτός λήγει με αξία μηδέν αν η ανέλιξη S κατά το χρονικό διάστημα $[0, T]$ επισκεφτεί και τα δύο διαστήματα $[0, c]$, $[c, \infty)$.

Τώρα, ανάλογα με την αρχική τιμή S_0 έχουμε τα εξής είδη.

- Άνω και εντός. Αν $S_0 < c$ και το δικαίωμα ενεργοποιείται μόνο αν $\bar{S}_T \geq c$. Δηλαδή πρέπει κάποια στιγμή κατά το διάστημα $[0, T]$ η τιμή της μετοχής να ξεπεράσει το φράγμα c , διαφορετικά το δικαίωμα δεν δίνει τίποτα κατά τον χρόνο άσκησης.
- Κάτω και εντός. Αν $S_0 > c$ και το δικαίωμα ενεργοποιείται μόνο αν $\underline{S}_T \leq c$.
- Άνω και εκτός. Αν $S_0 < c$ και το δικαίωμα απενεργοποιείται αν $\bar{S}_T \geq c$.
- Κάτω και εκτός. Αν $S_0 > c$ και το δικαίωμα απενεργοποιείται αν $\underline{S}_T \leq c$.

Για παράδειγμα, ένα κάτω και εκτός δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης K , χρόνο άσκησης T και φράγμα c δίνει τον χρόνο T το ποσό $(S_T - K)^+$ αν καθ' όλο το διάστημα $[0, T]$ η μετοχή είχε πάντοτε αξία μεγαλύτερη του c . Διαφορετικά, το δικαίωμα δίνει ποσό 0.

Lookback δικαιώματα. Ένα lookback δικαίωμα αγοράς δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να αγοράσει μία μετοχή τη χρονική στιγμή T στην τιμή \underline{S}_T . Αυτή η τιμή είναι σίγουρα χαμηλότερη από την τρέχουσα, επομένως το δικαίωμα ασκείται πάντοτε και δίνει κέρδος $S_T - \underline{S}_T$ αφού ο κάτοχός του μετά την αγορά πουλάει τη μετοχή αμέσως στην τιμή S_T .

Ένα lookback δικαίωμα πώλησης δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να πουλήσει μία μετοχή τη χρονική στιγμή T στην τιμή \bar{S}_T . Επομένως έχει συνάρτηση πληρωμής $\bar{S}_T - S_T$.

Αμερικανικά δικαιώματα. Αυτά είναι δικαιώματα που έχουν δεδομένο χρόνο ζωής $[0, T]$ αλλά μπορούν να ασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή του διαστήματος $[0, T]$ θελήσει ο κάτοχός τους.

Για παράδειγμα, ένα Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης με λήξη T και τιμή άσκησης K δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να πουλήσει, οποιαδήποτε στιγμή στο $[0, T]$, στον εκδότη του δικαιώματος μία μετοχή στην τιμή K . Ένα τέτοιο δικαίωμα δίνει περισσότερες επιλογές από το αντίστοιχο Ευρωπαϊκό. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $t < T$ συμβαίνει $S_t < K$ αλλά τη στιγμή λήξης ισχύει $S_T > K$. Σε ένα τέτοιο σενάριο, ο κάτοχος ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς, αν ασκήσει το δικαίωμα του τον χρόνο t , θα έχει κέρδος, ενώ ο κάτοχος ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης δεν θα κερδίσει τίποτα.

Παρατηρήστε ότι όλα τα δικαιώματα που περιγράψαμε πιο πάνω ήταν Ευρωπαϊκά.

Ασκήσεις

17.1 Έστω δύο Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς σε μία μετοχή με κοινό χρόνο λήξης T και τιμή άσκησης K_1 και K_2 αντίστοιχα. Ονομάζουμε $C_1(t), C_2(t)$ την αξία τους τον χρόνο $t \in [0, T]$. Υποθέτουμε ότι $K_1 < K_2$. Ναδειχθεί ότι αν στην αγορά δεν υπάρχει δυνατότητα arbitrage, τότε ισχύει

$$0 \leq C_1(t) - C_2(t) \leq (K_2 - K_1)e^{-r(T-t)}$$

για κάθε $t \in [0, T]$. r είναι το επιτόκιο της τράπεζας.