7

Martingales και κίνηση Brown

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε κάποια martingales που προκύπτουν από την κίνηση Brown και θα τα χρησιμοποιήσουμε για να κάνουμε υπολογισμούς ανάλογους με αυτούς των Παραδειγμάτων 3.18, 3.17. Πιο συγκεκριμένα θα βρούμε την πιθανότητα η τυπική κίνηση Brown να βγει από το αριστερό άκρο ενός διαστήματος που περιέχει το 0, τον μέσο χρόνο ωσότου να βγει από το διάστημα, και την ροπογεννήτρια του χρόνου ωσότου να περάσει από έναν δεδομένο πραγματικό αριθμό.

7.1 Martingales σχετικά με την κίνηση Brown

Συζητώντας για martingales σχετικά με την κίνηση Brown, θα χρησιμοποιήσουμε τη διήθηση που παράγει η ίδια η κίνηση, δηλαδή

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\{B(s) : s \in [0, t]\}) \tag{7.1}$$

για κάθε $t \in [0, \infty)$.

Θεώρημα 7.1. *Έστω B τυπική κίνηση Brown. Οι ακόλουθες ανελίξεις είναι martingales.*

(i) $\{B(t) : t \geq 0\}$

(ii) $\{B(t)^2 - t : t \geq 0\}$

(iii) $\{e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2}{2} t} : t \geq 0\}$*, με $\lambda \in \mathbb{R}$ δεδομένο.*

Απόδειξη. (i) Είναι προφανές ότι είναι προσαρμοσμένη. Έπειτα, για $t > 0$, η $B(t)$ έχει την κατανομή $N(0, t)$ της οποίας η απόλυτη τιμή έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα. Τέλος, για $0 \leq s < t$,

$$\mathbf{E}(B(t) \,|\, \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(B(t) - B(s) \,|\, \mathcal{F}_s) + \mathbf{E}(B(s) \,|\, \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(B(t) - B(s)) + B(s) = B(s).$$

Η δεύτερη ισότητα έπεται από την Πρόταση 5.7(ii), ενώ η τελευταία από το ότι η $B(t) - B(s)$ έχει μέση τιμή 0 και η $B(s)$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη.

(ii) Ελέγχουμε μόνο την τρίτη απαίτηση του ορισμού του martingale. Για $0 \leq s < t$, έχουμε

$$B(t)^2 - t = \{B(t) - B(s) + B(s)\}^2 - t = \{B(t) - B(s)\}^2 + B(s)^2 + 2\{B(t) - B(s)\}B(s) - t,$$

και άρα παίρνοντας δεσμευμένη μέση τιμή υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(B(t)^2 - t \,|\, \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(\{B(t) - B(s)\}^2) + B(s)^2 + 2B(s)\,\mathbf{E}(B(t) - B(s) \,|\, \mathcal{F}_s) - t \\ &= t - s + B(s)^2 + 0 - t = B(s)^2 - s.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε ότι η $B(t) - B(s)$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$, έχει μέση τιμή 0 και διασπορά $t - s$. Επίσης ότι η $B(s)$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη.

(iii) Όμοια, όπως στο προηγούμενο, παρατηρούμε ότι για $0 \leq s < t$ ισχύει

$$e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2}{2} t} = e^{\lambda \{B(t) - B(s)\}} e^{\lambda B(s) - \frac{\lambda^2}{2} t}.$$

Η $e^{\lambda B(s)}$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη, ενώ η $B(t) - B(s)$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$ και ακολουθεί την κατανομή $N(0, t-s)$. Άρα

$$\mathbf{E}\left(e^{\lambda B(t)-\frac{\lambda^2}{2}t} \,\Big|\, \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(e^{\lambda\{B(t)-B(s)\}}\right) e^{\lambda B(s)-\frac{\lambda^2}{2}t} = e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)+\lambda B(s)-\frac{\lambda^2}{2}t} = e^{\lambda B(s)-\frac{\lambda^2}{2}s}.$$

■

7.2 Έξοδος από διάστημα και από ημιευθεία

Έστω B τυπική κίνηση Brown. Για $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε

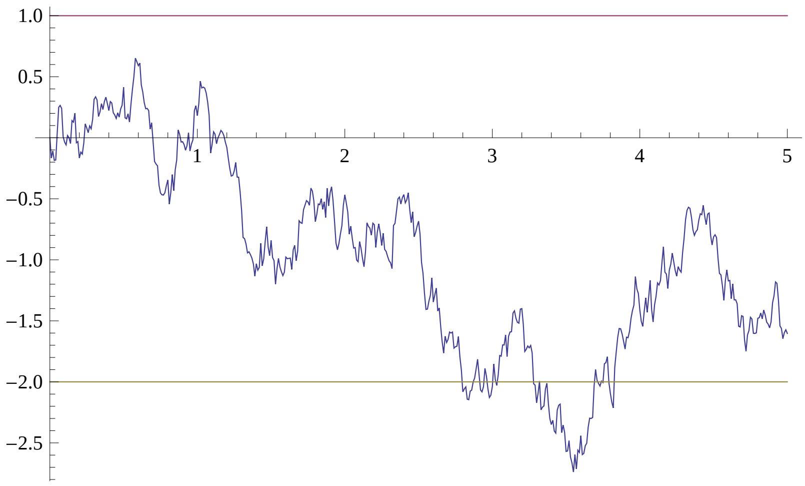
$$T_a := \inf\{t \geq 0 : B(t) = a\},$$

τον πρώτο χρόνο κατά τον οποίο η κίνηση Brown χτυπάει τον αριθμό a. Ας υποθέσουμε ότι $a > 0$ και θα δείξουμε ότι ο T_a είναι χρόνος διακοπής. Παρατηρούμε κατάρχάς ότι για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$\{T_a \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{q \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} \left\{B(q) \geq a - \frac{1}{n}\right\}.$$

Η επαλήθευση αυτής της ισότητας είναι απλή άσκηση πραγματικής ανάλυσης και χρησιμοποιεί ότι η B έχει συνεχή μονοπάτια. Τώρα, το δεξί μέλος της ισότητας είναι στοιχείο της $\mathcal{F}_t$ γιατί είναι αριθμήσιμη τομή συνόλων καθένα από τα οποία είναι αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{F}_t$.

Το πρώτο αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε αφορά την έξοδο της κίνησης από ένα διάστημα γύρω από το μηδέν. Με τι πιθανότητα βγαίνει η κίνηση από το αριστερό (ή το δεξί) άκρο του διαστήματος και πόση είναι η μέση τιμή του χρόνου ώσπου να βγεί από κάποιο άκρο;



Σχήμα 7.1: Εδώ έχουμε $[a, b] = [-2, 1]$. Σε αυτή την πραγματοποίηση έτυχε η κίνηση Brown να βγεί από το $[-2, 1]$ στο -2.

Πρόταση 7.2. *Για $a < 0 < b$ ισχύει*

(i) $\mathbf{P}(T_a < T_b) = b/(|a| + b)$.

(ii) $\mathbf{E}(T_a \wedge T_b) = |a|b$.

Απόδειξη. Πριν αρχίσουμε την απόδειξη, θα δείξουμε ότι $T := T_a \wedge T_b < \infty$ με πιθανότητα 1. Για $r > 0$ δεδομένο, εφαρμόζουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής (Θεώρημα 4.15) για το martingale $M_t := B(t)^2 - t$ και τον φραγμένο χρόνο διακοπής $T \wedge r$. Η $\mathbf{E}(M_{T\wedge r}) = \mathbf{E}(M_0) = 0$ δίνει

$$\mathbf{E}(B^2(T \wedge r)) = \mathbf{E}(T \wedge r). \tag{7.2}$$

Το αριστερό μέλος είναι φραγμένο από το $a^2 \vee b^2$, ενώ το δεξί συγκλίνει για $r \to \infty$ στο $\mathbf{E}(T)$ (από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης). Άρα $\mathbf{E}(T) < \infty$, και επομένως $T < \infty$ με πιθανότητα 1.

(i) Έστω $r > 0$ δεδομένο. Εφαρμόζουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής (Θεώρημα 4.15) για το martingale $B(t)$ και τον φραγμένο χρόνο διακοπής $T \wedge r$. Παίρνουμε $\mathbf{E}(B(T \wedge r)) = 0$. Τώρα, με πιθανότητα 1 έχουμε $\lim_{r\to\infty} T \wedge r = T < \infty$ και άρα $\lim_{r\to\infty} B(T \wedge r) = B(T)$ [εδώ είναι κρίσιμο να ξέρουμε ότι $T < \infty$ ώστε να έχει νόημα το σύμβολο $B(T)$]. Επίσης, για κάθε $r > 0$ έχουμε $B(T \wedge r) \le |a| \vee b$. Άρα το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης δίνει

$$0 = \mathbf{E}(B(T)) = \mathbf{E}\{B(T)\mathbf{1}_{T_a<T_b} + B(T)\mathbf{1}_{T_a>T_b}\} = \mathbf{E}\{a\mathbf{1}_{T_a<T_b} + b\mathbf{1}_{T_a>T_b}\} = a\,\mathbf{P}(T_a < T_b) + b\,\mathbf{P}(T_a > T_b).$$

Η τελευταία σχέση, μαζί με την $\mathbf{P}(T_a < T_b) + \mathbf{P}(T_a > T_b) = 1$, δίνει το ζητούμενο.

(ii) Συνεχίζουμε από την (7.2). Εφαρμόζοντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης στο δεξί μέλος και το φραγμένης στο αριστερό παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(B^2(T)) &= \mathbf{E}\{B(T)^2\mathbf{1}_{T_a<T_b} + B(T)^2\mathbf{1}_{T_a>T_b}\} = a^2\,\mathbf{P}(T_a < T_b) + b^2\,\mathbf{P}(T_a > T_b)\\ &= a^2\frac{b}{|a|+b} + b^2\frac{|a|}{|a|+b} = |a|b.\end{aligned}$$

Στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το πρώτο μέρος της πρότασης. ∎

Πρόταση 7.3. *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\mathbf{P}(T_a < \infty) = 1$ και, επιπλέον, για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει*

$$\mathbf{E}(e^{-\lambda T_a}) = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $a > 0$. Δειχνουμε πρώτα ότι $T_a < \infty$ με πιθανότητα 1. Πράγματι, για οποιοδήποτε $c < 0$, το πρώτο μέρος της προηγούμενης πρότασης δίνει ότι

$$\mathbf{P}(T_a < \infty) \ge \mathbf{P}(T_a < T_c) = \frac{|c|}{a+|c|}.$$

Το όριο της τελευταίας ποσότητας για $c \to -\infty$ είναι 1 και έτσι προκύπτει ο ισχυρισμός μας.

Τώρα για δεδομένα $r, \ell > 0$ εφαρμόζουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής (Θεώρημα 4.15) για το martingale $e^{\ell B(t) - \frac{\ell^2}{2}t}$ και τον φραγμένο χρόνο διακοπής $T_a \wedge r$. Παίρνουμε

$$\mathbf{E}\left\{e^{\ell B(T_a\wedge r) - \frac{\ell^2}{2}(T_a\wedge r)}\right\} = 1.$$

Η ποσότητα στη μέση τιμή είναι φραγμένη από το $e^{\ell a}$ (αφού παγώνουμε την κίνηση Brown μόλις φτάσει στην τιμή a και όλες οι προηγούμενες τιμές της είναι μικρότερες από a, αφού ξεκινάει από το 0) και το όριό της για $r \to \infty$ ισούται με

$$e^{\ell a - \frac{\ell^2}{2}T_a}.$$

Αυτό γιατί με πιθανότητα 1 ισχύει $T_a < \infty$ και άρα $B(T_a) = a$. Έτσι το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης δίνει

$$\mathbf{E}(e^{-\frac{\ell^2}{2}T_a}) = e^{-\ell a}.$$

Θέτοντας $\ell = \sqrt{2\lambda}$ παίρνουμε το ζητούμενο. ∎

Στην προηγούμενη πρόταση αυτό που υπολογίσαμε είναι ο μετασχηματισμός Laplace της τυχαίας μεταβλητής T_a. Μπορούμε από αυτό να δείξουμε ότι η T_a είναι απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi x^3}}\, e^{-a^2/2x}\mathbf{1}_{x>0}.$$

Ασκήσεις

7.1 Έστω $(B_t)_{t\ge 0}$ τυπική κίνηση Brown. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $X_t := tB_t - \int_0^t B_r\, dr, t \ge 0$ είναι martingale ως προς τη διήθηση που παράγει η B.

7.2 Έστω B τυπική κίνηση Brown, $\mu > 0$, και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ανέλιξη X με

$$X_t := x + B(t) + \mu t$$

για κάθε $t \ge 0$. Η X ονομάζεται κίνηση Brown με τάση μ που ξεκινάει από το x. Για $r \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $T_r := \inf\{s \ge 0 : X_s = r\}$ και $\phi(r) := e^{-2\mu r}$. Να δειχθεί ότι:

(α) Η ανέλιξη $M_t := \phi(X_t)$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s : s \in [0, t]\})$.

(β) $\mathbf{P}(T_a \wedge T_b < \infty) = 1$.

(γ) Για $a < x < b$ ισχύει

$$\mathbf{P}(T_a < T_b) = \frac{\phi(b) - \phi(x)}{\phi(b) - \phi(a)}.$$

(δ) Για $x = 0$ και $a < 0$ ισχύει $\mathbf{P}(T_a < \infty) = e^{2\mu a}$. Δηλαδή, όταν προσθέσουμε μια θετική τάση στην κίνηση Brown, εκείνη ενδέχεται να παραμείνει για πάντα δεξιά του αριθμού $a < 0$, σε αντίθεση με την τυπική κίνηση Brown.

(ε) Έστω $x = 0$ και $R := \inf\{X_t : t \ge 0\} \in [-\infty, 0]$. Να δειχθεί ότι η $-R$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 2μ. Παρατηρήστε ότι $R > -\infty$ με πιθανότητα 1.

7.3 Σε αυτή την άσκηση θα δούμε μια εναλλακτική απόδειξη του μέρους (ε) της προηγούμενης άσκησης, δηλαδή ότι η $-R$ είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο 2μ.
Βρείτε κατάλληλο $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ώστε η $M_t := e^{\lambda X_t}$ να είναι martingale με $\lim_{t\to\infty} M_t = 0$ και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4.9.

7.4 (Τα πολυώνυμα Hermite και martingales) Έστω $x, \rho \in \mathbb{R}$ σταθερές. Η συνάρτηση $\lambda \mapsto e^{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 \rho}$, ως αναλυτική στο $\mathbb{C}$, αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0, έστω

$$e^{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 \rho} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} H_k(x; \rho)\lambda^k. \tag{7.3}$$

(α) Να δειχθεί ότι ο συντελεστής $H_k(x; \rho)$ είναι μονικό πολυώνυμο του x με βαθμό k και να προσδιοριστούν τα H_0, H_1, H_2, H_3. Τα H_k ονομάζονται πολυώνυμα Hermite.

(β) Να δειχθεί ότι για κάθε $k \ge 0$ η ανέλιξη $(H_k(B_t; t))_{t\ge 0}$ είναι martingale.

7.5 Έστω $B = (B^{(1)}, B^{(2)})$ διδιάστατη τυπική κίνηση Brown και $a \ne 0$. Θέτουμε $T_a := \inf\{s \ge 0 : B^{(1)}(s) = a\}$. Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $B^{(2)}(T_a)$ έχει την κατανομή Cauchy με παράμετρο κλίμακας a. Δηλαδή έχει πυκνότητα $f(x) = \pi^{-1}|a|/(x^2 + a^2)$ και χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi(t) = e^{-|a||t|}$.

7.6* (Νόμος τόξου ημιτόνου) (α) Έστω $r > 0$ και $d_r := \inf\{s \ge r : B(s) = 0\}$. Να δειχθεί ότι $d_r \overset{d}{=} r + T^W_{B(r)}$, όπου B, W είναι δυό ανεξάρτητες τυπικές κινήσεις Brown και $T^W_a = \inf\{s \ge 0 : W(s) = a\}$. Έπειτα να δειχθεί ότι $T^W_{B(r)} \overset{d}{=} r(B(T^W_1))^2 \overset{d}{=} rC^2$ όπου η C ακολουθεί την κατανομή Cauchy με παράμετρο κλίμακας 1.
(β) Έστω $X := \sup\{t \in [0, 1] : B(t) = 0\}$. Να δειχθεί ότι η X έχει πυκνότητα $(\pi\sqrt{x(1-x)})^{-1}\mathbf{1}_{x\in(0,1)}$.
[Υπόδειξη: $\{X < r\} = \{d_r > 1\}$.]