

Κεφάλαιο 5

Ειδικές Εξισώσεις Περιγραφής Ροής

Σύνοψη

Περιγράφεται η εξίσωση διατήρησης μάζας και δίνεται η κατάλληλη μορφή της εξίσωσης για προβλήματα επιφανειακών και υπόγειων ροών. Επίσης αναλύεται η μορφή της για συμπιεσμένα και ασυμπίεστα ρευστά, όπως και για υπόγειους υδροφορείς (υπό πίεση, φρεάτιους). Δίνονται παραδείγματα επίλυσης των εξισώσεων και των εφαρμογών τους σε περιβαλλοντικές ροές. Παρουσιάζεται η ολοκληρωμένη με το βάθος εξίσωση συνέχειας και η ολοκληρωμένη κατά το πλάτος εξίσωση συνέχειας και αναλύονται οι επιμέρους εφαρμογές τους. Παρουσιάζονται οι εξισώσεις Navier-Stokes κατά τις τρεις διαστάσεις και αναλύονται οι φυσικές έννοιες και ο τρόπος παραγωγής του κάθε όρου τους. Αναλύεται η τάξη μεγέθους κάθε όρου σε περιβαλλοντικές ροές και παρουσιάζονται οι διαδικασίες παραμετροποίησης των όρων τύρβης (μοντέλα τύρβης). Δίνονται οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (εξίσωση Darcy και εξίσωση Forchheimer).

5.1. Βασικές αρχές για περιγραφή των περιβαλλοντικών ροών

Οι περιβαλλοντικές ροές λαμβάνουν χώρα σε ποταμούς, λίμνες, στην θάλασσα, αλλά και σε υπόγειους υδροφόρους. Για τις τρεις πρώτες περιπτώσεις μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ροή λαμβάνει χώρα σε κενό χώρο, ενώ στερεά σώματα υπάρχουν στα όρια της ροής. Εδώ η κλίμακα προσέγγισης είναι αυτή του συνεχούς μέσου: το ελάχιστο μέγεθος ενός σωματιδίου ρευστού έχει μέγεθος ένα μικρό κλάσμα του χιλιοστού. Αντίθετα, στις περισσότερες περιπτώσεις υπόγειων ροών η ροή λαμβάνει χώρα σε ένα μεγάλο αριθμό από μικρά «κανάλια», τα όρια των οποίων καθορίζονται από τα τοιχώματα μικρών κόκκων άμμου ή από τα τοιχώματα ρωγμών. Σε αυτήν την περίπτωση δεν έχει νόημα να θεωρήσουμε τη ροή σε κάθε ένα από τα παραπάνω κανάλια χωριστά, αλλά παίρνουμε μέσο όρο σε έναν όγκο ελέγχου ο οποίος περιέχει τόσο το ρευστό όσα και το στερεό (κόκκους άμμου ή τμήματα βράχου). Για αυτήν λοιπόν την περίπτωση η κλίμακα παρατήρησης είναι αυτή του «ισοδύναμου συνεχούς» και το ελάχιστο μέγεθος παρατήρησης έχει μέγεθος μερικά χιλιοστά, μερικά εκατοστά ή ακόμα και μερικά μέτρα. Τόσο για την πρώτη περίπτωση (κατά την οποία η ροή λαμβάνει χώρα σε ποταμούς, λίμνες ή στη θάλασσα), όσο και στη δεύτερη περίπτωση (κατά την οποία η ροή λαμβάνει χώρα σε ένα «υπόγειο», πορώδες μέσο) οι εξισώσεις που χρησιμοποιούμε προκύπτουν και από το ισοζύγιο της μάζας και από το ισοζύγιο της ορμής. Όμως η μορφή των εξισώσεων είναι διαφορετική, αφού τα φαινόμενα είναι θεμελιωδώς διαφορετικά, όπως επίσης και η κλίμακα παρατήρησης. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τις εξισώσεις αυτές.

5.2. Οι εξισώσεις Navier-Stokes

5.2.1. Εξίσωση της συνέχειας στην κλίμακα του συνεχούς

Θα χρησιμοποιήσουμε μία περιγραφή ροής κατά Lagrange για να εξετάσουμε το ισοζύγιο της μάζας σε ένα στοιχειώδες σωματίδιο ρευστού. Υπενθυμίζουμε ότι η περιγραφή ροής κατά Lagrange αντιστοιχεί στην οπτική ενός παρατηρητή ο οποίος κινείται μαζί με τα σωματίδια του ρευστού, σε αντίθεση με την περιγραφή κατά Euler, η οποία αντιστοιχεί σε παρατηρήσεις σε σταθερά σημεία στον χώρο (π.χ. Κωτσοβίνος 2008). Περιγραφή Lagrange: Παρακολουθούμε την κίνηση ενός σωματιδίου και καταγράφουμε όλες τις αλλαγές που λαμβάνουν χώρα πάνω στο στοιχειώδη αυτό όγκο. Περιγραφή Euler: Καταλαμβάνουμε μία θέση στον χώρο (σημείο) και παρατηρούμε όλα τα σωματίδια που περνούν από αυτήν (Χωρική περιγραφή).

Η μάζα m η οποία περιέχεται στο στοιχειώδες αυτό σωματίδιο μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση:

$$m = \iiint_{V(t)} \rho(\vec{x}, t) dV \quad (5.1)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, V ο όγκος του σωματιδίου, \vec{x} η θέση του σωματιδίου στον χώρο και το τριπλό ολοκλήρωμα είναι ένα ολοκλήρωμα όγκου.

Σύμφωνα με την αρχή της διατήρησης της μάζας η μάζα του σωματιδίου αυτού δε θα αλλάζει στον χρόνο, κατά συνέπεια θα ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho dV = 0 \quad (5.2)$$

Στην παραπάνω σχέση ο όρος $\frac{D}{Dt}$ συμβολίζει την «ολική παράγωγο», η οποία αποδίδει το ρυθμό της αλλαγής μίας ποσότητας σε ένα στοιχειώδες σωματίδιο, όπως τη «μετράει» ένας παρατηρητής που κινείται μαζί με το σωματίδιο αυτό.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το θεώρημα του Reynolds, (βλ. και Κωτσοβίνος (2008)) το οποίο γράφεται:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V_0} \Phi(\vec{x}, t) dV_0 = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \nabla \vec{U} \right\} dV \quad (5.3)$$

Στην παραπάνω εξίσωση το σύμβολο \vec{U} αντιστοιχεί στην ταχύτητα του ρευστού και το σύμβολο ∇ είναι ο τελεστής Nabla. Η μεταβλητή Φ μπορεί να είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, ένα διάνυσμα ή ένας ταυνοστής.

Μπορούμε, επίσης, να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω κλασική σχέση, η οποία συνδέει την ολική με τη μερική παράγωγο:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \Phi \quad (5.4)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση που εκφράζει το θεώρημα του Reynolds και θέτοντας $\Phi = \rho$ προκύπτει ότι:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho(\vec{x}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \nabla \rho + \rho \nabla \vec{U} \right\} dV = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{U} \right\} dV \quad (5.5\alpha)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho(\vec{x}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{U} \right\} dV \quad (5.5\beta)$$

Παίρνοντας υπόψη μας την εξίσωση (5.2), δηλαδή ότι $\frac{Dm}{Dt} = 0$, προκύπτει:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho dV = 0 \quad (5.6)$$

Παίρνουμε υπόψη μας την παραπάνω εξίσωση (5.6) και το αριστερό σκέλος της εξίσωσης (5.5β) προκύπτει ότι:

$$\iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{U} \right\} dV = 0 \quad (5.7)$$

Η παραπάνω εξίσωση δεν ισχύει για ένα συγκεκριμένο μέγεθος του σωματιδίου, αλλά για ένα μεγάλο εύρος μεγεθών του. Η μοναδική περίπτωση, λοιπόν, να ισχύει αυτή η εξίσωση είναι η συνάρτηση στο εσωτερικό του ολοκληρώματος να είναι ίση με το μηδέν.

Κατά συνέπεια αποδείξαμε ότι ισχύει η παρακάτω κλασική εξίσωση (η οποία ονομάζεται για ιστορικούς λόγους και εξίσωση της συνέχειας):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{U}) = 0 \quad (5.8)$$

Την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να την εκφράσουμε χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις Einstein:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (5.9\alpha)$$

ή επίσης ισοδύναμα χρησιμοποιώντας τον «κλασικό» αλγεβρικό τρόπο γραφής:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (5.9\beta)$$

όπου u , v και w είναι οι συνιστώσες του πεδίου των ταχυτήτων στις διευθύνσεις x , y και z αντίστοιχα.

Για την περίπτωση ασυμπίεστης ροής (κατά την οποία η πυκνότητα του ρευστού μπορεί να θεωρηθεί σταθερή) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση:

$$\nabla(\vec{U}) = 0 \quad (5.10)$$

η οποία μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας το συμβολικό τρόπο γραφής του Einstein με την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial(U_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (5.11\alpha)$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(v)}{\partial y} + \frac{\partial(w)}{\partial z} = 0 \quad (5.11\beta)$$

5.2.2. Οι εξισώσεις Navier-Stokes

Για να περιγράψουμε πλήρως το φαινόμενο της ροής πρέπει να λάβουμε επίσης υπόψη μας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (βλ. Κωτσοβίνος (2008)), σύμφωνα με τον οποίο:

Ρυθμός αλλαγής της ορμής σε ένα στοιχειώδες σωματίδιο ρευστού = δυνάμεις ασκούμενες στο σωματίδιο αυτό.

Παρακολουθούμε την κίνηση ενός στοιχειώδους όγκου ρευστού $V(t)$. Ο όγκος αυτός περικλείεται από μία νοερή επιφάνεια $S(t)$ η οποία, αν και παραμορφώνεται κατά τη ροή περικλείει, πάντα τα ίδια σωματίδια ρευστού.

Γνωρίζουμε ότι:

$$\text{ορμή} = \text{μάζα} \times \text{ταχύτητα}$$

Συμβολίζοντας τη μάζα του σωματιδίου ρευστού με dm μπορούμε να την εκφράσουμε με τη σχέση:

$$dm = \rho dV$$

Η ορμή, λοιπόν του σωματιδίου μπορεί να εκφραστεί με το τριπλό ολοκλήρωμα:

$$\iiint_{V(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{U}(\vec{x}, t) dV \quad (5.12)$$

Κατά συνέπεια, εάν θεωρήσουμε ότι οι δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στο σωματίδιο ρευστού που εξετάζουμε είναι τόσο δυνάμεις όγκου \vec{F}_V , όσο και επιφανειακές δυνάμεις \vec{F}_S , ο προαναφερθείς νόμος του Νεύτωνα μπορεί να εκφραστεί με την παρακάτω σχέση:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \vec{F}_V + \vec{F}_S \quad (5.13)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις:

$$\vec{F}_V = \iiint_{V(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{f}(\vec{x}, t) dV \quad (5.14\alpha)$$

και

$$\vec{F}_S = \iiint_{V(t)} \text{div} \hat{\sigma} dV \quad (5.14\beta)$$

Κατά συνέπεια ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \iiint_{V(t)} (\rho \vec{f} + \text{div} \hat{\sigma}) dV \quad (5.15)$$

Μπορούμε να εκφράσουμε το ρυθμό αλλαγής της ορμής με έναν πιο εύχρηστο τρόπο, εάν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds που παρουσιάσαμε παραπάνω θέτοντας $\Phi = \rho \vec{U}$.

Προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \iiint_{V(t)} \left[\frac{D\rho \vec{U}}{Dt} + \rho \vec{U} \operatorname{div} \vec{U} \right] dV \quad (5.16\alpha)$$

η οποία μπορεί επίσης να γραφεί ως:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \iiint_{V(t)} \left[\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \vec{U} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{U} \right) \right] dV \quad (5.16\beta)$$

Παίρνοντας υπόψη μας την εξίσωση της συνέχειας, την οποία αποδείξαμε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού (βλ. εξίσωση 5.8), προκύπτει ότι η εξίσωση (5.16β) μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \iiint_{V(t)} \left[\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} \right] dV \quad (5.17)$$

Παίρνοντας υπόψη μας την προηγούμενη σχέση μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (5.15) (η οποία αντιστοιχεί στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα) με την παρακάτω μορφή:

$$\iiint_{V(t)} \left[\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} \right] dV = \iiint_{V(t)} (\rho \vec{f} + \operatorname{div} \hat{\sigma}) dV \quad (5.17\alpha)$$

ή ισοδύναμα:

$$\iiint_{V(t)} \left(\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} - \rho \vec{f} - \operatorname{div} \hat{\sigma} \right) dV = 0 \quad (5.17\beta)$$

Στην παραπάνω εξίσωση η ολοκλήρωση γίνεται σε έναν αυθαίρετο όγκο V . Κατά συνέπεια για να είναι το ολοκλήρωμα ίσο με το μηδέν, πρέπει η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα να είναι ίση με το μηδέν.

Προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho \vec{f} + \operatorname{div} \hat{\sigma} \quad (5.18)$$

Η εξίσωση αυτή (εξίσωση δυναμικής ισορροπίας), αν πάρουμε υπόψη μας την σχέση μεταξύ ολικής και μερικής παραγώγου, μπορεί να γραφεί (βλ. και Κωτσοβίνος (2008))

$$\left(\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)$$

και με την παρακάτω μορφή:

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (5.19)$$

Η παραπάνω διανυσματική εξίσωση (η οποία αντιστοιχεί σε τρεις αλγεβρικές) είναι από τις θεμελιώδεις σχέσεις της Ρευστομηχανικής. Ισχύει για κάθε ρευστό, συμπιεστό ή ασυμπίεστο, νευτώνειο ή μη νευτώνειο, για στρωτή ή τυρβώδη ροή. Δεν αποτελεί όμως ένα κλειστό, «επιλύσιμο» σύστημα εξισώσεων, παρ' όλο που μπορούμε να λάβουμε υπόψη μας και την εξίσωση της συνέχειας, επειδή έχουμε στην διάθεση μας τέσσερις εξισώσεις και 10 αγνώστους: τρεις συνιστώσες, έξι συνιστώσες του ταυνοστή τάσεων, και την πίεση (ή την πυκνότητα).

Για νευτώνειο ρευστό και ασυμπίεστη ροή ισχύει η σχέση:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 U_i \quad (5.20)$$

όπου P είναι η πίεση, μ είναι το δυναμικό ιξώδες και ∇^2 είναι ένας τελεστής, ο οποίος όταν εφαρμόζεται επί ενός διανύσματος (π.χ. του πεδίου ταχυτήτων) ονομάζεται τελεστής Stokes και είναι ένα διανυσματικό μέγεθος, το οποίο εκφράζεται με την σχέση:

$$\nabla^2 U_i = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} \quad (5.21)$$

Από τις παραπάνω (εξισώσεις 5.19 και 5.20) προκύπτει ότι στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής η εξίσωση Navier-Stokes (η οποία είναι η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας για νευτώνεια ρευστά μπορεί να γραφεί σε συμπαγή μορφή (χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις Einstein):

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} \right) \quad (5.22)$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει τη δυναμική ισορροπία των εξής μεταβαλλόμενων δυνάμεων:

- των δυνάμεων αδρανείας,
- των εξωτερικών δυνάμεων (συνήθως δυνάμεων βαρύτητας),
- των δυνάμεων που προκύπτουν από τις διαφορές πιέσεως,
- των δυνάμεων του ιξώδους.

Οι δυνάμεις αδρανείας αποτελούνται από δύο όρους: τον όρο $\rho \partial U_i / \partial t$, ο οποίος αντιστοιχεί στην τοπική επιτάχυνση, και τον όρο $\rho U_j \partial U_i / \partial x_j$, ο οποίος αντιστοιχεί στη μεταθετική επιτάχυνση. Ο όρος αυτός, ο οποίος αντιστοιχεί στη μεταθετική επιτάχυνση, παίζει σημαντικό ρόλο στην ισορροπία των δυνάμεων για προβλήματα με μεγάλη ταχύτητας ροής τα οποία παρουσιάζονται συχνά στη φύση και κατά συνέπεια στα περιβαλλοντικά προβλήματα. Οι εξωτερικές δυνάμεις (οι οποίες συμβολίζονται στην εξίσωση 5.22 με τον όρο ρf_i) είναι σημαντικές για ροές με ελεύθερη επιφάνεια, αλλά και για πεδία ροής στα οποία συνυπάρχουν ρευστά με διαφορετικές πυκνότητες (π.χ. γλυκό και θερμό νερό, νερό και παράγωγα πετρελαίου κ.λπ.).

Οι δυνάμεις οι οποίες προκύπτουν από τις διαφορές πίεσης είναι σημαντικές για μεγάλο αριθμό ροών, αλλά όχι για όλους τους τύπους ροών. Τέλος, οι δυνάμεις ιξώδους (οι οποίες αντιστοιχούν στον όρο $\mu \nabla^2 U_i$) στην περίπτωση τυρβωδών ροών (δηλαδή ροών με μεγάλες ταχύτητες) είναι σημαντικές κυρίως κοντά στα στερεά όρια. Αντίθετα στην περίπτωση ροών σε υπόγειους γεωλογικούς σχηματισμούς (για τις οποίες θα μιλήσουμε στο τέλος του κεφαλαίου αυτού) οι δυνάμεις του ιξώδους επηρεάζουν σημαντικά την κίνηση των ρευστών.

Στο σύστημα των εξισώσεων (5.21) και (5.22) θεωρούμε ως άγνωστους κατά κανόνα το πεδίο των ταχυτήτων (το οποίο έχει στην γενική περίπτωση τρεις συνιστώσες τις u , v και w) και την πίεση P .

Έχει ενδιαφέρον να παρουσιάσουμε αναλυτικά τις εξισώσεις Navier-Stokes σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας.

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.23)$$

Εξισώσεις Navier-Stokes (N.S.)

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (5.24\alpha)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad (5.24\beta)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \quad (5.24\gamma)$$

5.2.3. Μοντέλα για τυρβώδεις ροές

Για τις εξισώσεις Navier-Stokes υπάρχουν λίγες αναλυτικές λύσεις που αντιστοιχούν σε σχετικά απλά προβλήματα. Εκτός αυτού, η επίλυση των εξισώσεων N.S. σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας (διαδικασία που αποκαλείται «απευθείας επίλυση») παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία στην περίπτωση τυρβώδους ροής. Άλλωστε, πρόκειται για τον τύπο της ροής που αντιστοιχεί στα περισσότερα προβλήματα τα οποία εμφανίζονται σε πρακτικές εφαρμογές.

Θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια τα βασικά χαρακτηριστικά της στρατηγικής για την προσομοίωση τυρβωδών ροών, για προβλήματα που παρουσιάζονται συχνά στην πράξη (βλ. επίσης τα κλασικά βιβλία των Rodi (1980) και Rodi (1993)).

Παρά τις προόδους που έχουν παρουσιαστεί πρόσφατα όσον αφορά την άμεση επίλυση των εξισώσεων N.S., η πιο διαδεδομένη προσέγγιση είναι να μην επιχειρείται η προαναφερθείσα «απευθείας επίλυση», αλλά να λαμβάνονται μέσοι όροι των χαρακτηριστικών μεγεθών ως προς τον χρόνο, πριν επιχειρηθεί η απευθείας επίλυση.

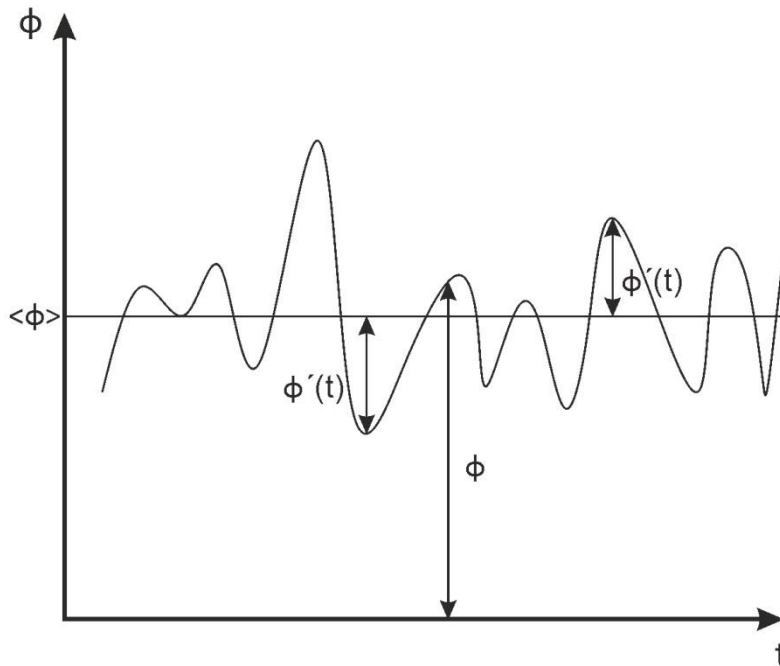
Δηλαδή, για κάθε μέγεθος ϕ δε θεωρούμε τις «στιγμιαίες» τιμές (όπου η διακύμανση ως προς τον χρόνο των στιγμιαίων τιμών στην περίπτωση τυρβώδους ροής είναι εξαιρετικά έντονη), αλλά τις μέσες τιμές τους ως προς τον χρόνο, οι οποίες ορίζονται από την παρακάτω σχέση:

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi dt \quad (5.25)$$

Στην παραπάνω σχέση η μεταβλητή ϕ μπορεί να αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε μεταβλητή του φαινομένου που εξετάζουμε (συνιστώσα του πεδίου των ταχυτήτων, πίεση, συγκέντρωση μία συγκεκριμένης ουσίας, θερμοκρασία κ.λπ.). Η μεταβλητή T συμβολίζει τον χρόνο ολοκλήρωσης, ο οποίος είναι αρκετά μεγάλος, ώστε ο μέσος όρος να είναι ανεξάρτητός του.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς και εισάγοντας τη μεταβλητή ϕ' , η οποία δίνει (σε κάθε στιγμή) την απόκλιση της στιγμιαίας τιμής του μεγέθους Φ από το μέσο όρο $\langle \Phi \rangle$ (βλ. και Εικόνα 5.1), προκύπτει η σχέση:

$$\Phi = \langle \Phi \rangle + \phi' \quad (5.26)$$



Εικόνα 5.1 Μεταβολές του μεγέθους για την περίπτωση τυρβώδους ροής, του ορισμού του μεγέθους του μέσου όρου και του μεγέθους (διαταραχών).

Βάζοντας στην εξίσωση (5.25) $\Phi = \langle \Phi \rangle + \phi'$ προκύπτει ότι:

$$\langle \Phi \rangle = \langle \langle \Phi \rangle + \phi' \rangle \quad (5.27\alpha)$$

Εφαρμόζοντας το μέσο όρο ως προς τον χρόνο, όπως αυτό ορίζεται από την εξίσωση (5.25), στην εξίσωση (5.26) και παίρνοντας υπόψη μας την εξίσωση (5.27α) προκύπτει ότι:

$$\langle \phi' \rangle = 0 \quad (5.27\beta)$$

Οι εξισώσεις για τη μακροσκοπικά μόνιμη ροή, αν λάβουμε υπόψη μας τις εξισώσεις (5.25), (5.26) και (5.27β), μπορούν με τη χρήση των συμβάσεων συμβολικής γραφής να γραφούν ως εξής:

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (5.28)$$

$$\rho \left(\langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle \right) = \rho \langle f_i \rangle - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 \langle U_i \rangle \quad (5.29)$$

Λόγω της εξίσωσης της συνέχειας, όπως αυτή παρουσιάζεται παραπάνω, και επειδή ισχύει η σχέση:

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0$$

η εξίσωση (5.29) μπορεί και να γραφεί με την παρακάτω μορφή:

$$\langle \Phi \rangle = \langle \langle \Phi \rangle \rangle \quad (5.27\alpha)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \langle U_i U_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_j} \right) = \rho \langle f_i \rangle - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 \langle U_i \rangle \quad (5.30)$$

Η παραπάνω διανυσματική εξίσωση (η οποία αντιστοιχεί σε τρεις αλγεβρικές) σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας δεν αποτελούν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων, επειδή εκτός από τις τρεις συνιστώσες των μέσων τιμών του πεδίου ταχυτήτων $\langle U_i \rangle$ και τις μέσες τιμές του πεδίου της πίεσης $\langle P \rangle$ είναι επίσης άγνωστες οι τιμές $\langle u'_i u'_j \rangle$, οι οποίες αντιστοιχούν σε έξι διαφορετικές μεταβλητές, έχουμε δηλαδή ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με δέκα αγνώστους. Η λύση στο πρόβλημα αυτό είναι να βρούμε έναν τρόπο να εκφράσουμε τις τιμές του ταυστή $\langle u'_i u'_j \rangle$ συναρτήσει των όρων $\langle U_i \rangle$ και ενδεχόμενα $\langle P \rangle$. Οι άγνωστες αυτές μεταβλητές όταν παρουσιάζονται στη μορφή $\tau_{ij} = \rho \langle u'_i u'_j \rangle$ ονομάζονται τυρβώδεις τάσεις. Για να μπορέσουμε να τις προσεγγίσουμε υπάρχουν δύο βασικές προσεγγίσεις:

1. να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση του τυρβώδους ιξώδους,
2. να επιλυθούν διαφορικές εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν τη μεταβολή των τυρβωδών τάσεων.

Κατά την πρώτη περίπτωση (της προσέγγισης του τυρβώδους ιξώδους) υιοθετείται η παρακάτω προσέγγιση:

$$-\bar{\tau}_{ij} = -\rho \langle u'_i u'_j \rangle = \mu_i \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (5.31\alpha)$$

Στην παραπάνω εξίσωση μ_i είναι ο συντελεστής του τυρβώδους ιξώδους, k η κινητική ενέργεια της τυρβώδους ροής ενώ δ_{ij} είναι το «δέλτα του Kronecker».

Το δέλτα του Kronecker ορίζεται από τις σχέσεις: $\delta_{ij} = 1$ για την περίπτωση $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ για την περίπτωση $i \neq j$.

Η κινητική ενέργεια της τυρβώδους ροής περιγράφεται από τη σχέση:

$$k = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle (u'_1)^2 \rangle + \langle (u'_2)^2 \rangle + \langle (u'_3)^2 \rangle \right) \quad (5.31\beta)$$

Είναι η ενέργεια η οποία «αποσύρεται» από την κυρίως ροή και θέτει τους στροβίλους σε κίνηση.

Ο συντελεστής του τυρβώδους ιξώδους μ_t εξαρτάται από τις ιδιότητες του πεδίου ροής και όχι από τις ιδιότητες του ρευστού. Σε ορισμένα προβλήματα η τιμή του μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, στα περισσότερα όμως πρέπει να ληφθεί υπόψη η μεταβολή του στον χώρο, ενδεχομένως και στον χρόνο.

Μία από τις πιο δημοφιλείς προσεγγίσεις για τον προσδιορισμό του μ_t είναι η προσέγγιση του μοντέλου k - ε που χρησιμοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$\mu_t = c_\mu \rho k^2 / \varepsilon \quad (5.32)$$

Οι μεταβλητές ρ και k έχουν ήδη οριστεί, c_μ είναι μία κατάλληλη παράμετρος, ενώ ε είναι ο ρυθμός «καταστροφής της κινητικής ενέργειας» της τύρβης. Με τον όρο καταστροφή εννοούμε τη μετατροπή της σε θερμότητα η οποία είναι μία εκφυλισμένη μορφή ενέργειας. Στην τυρβώδη ροή σε πρώτη φάση δημιουργούνται μεγάλοι στροβίλοι οι οποίοι μετατρέπονται σε ολοένα μικρότερους. Όταν αυτή η διεργασία οδηγήσει στη δημιουργία στροβίλων του ελάχιστου μεγέθους, η ενέργεια τους μεταβάλλεται σε θερμότητα. Επειδή τόσο η κινητική ενέργεια της τυρβώδους ροής k , όσο και ο ρυθμός «καταστροφής της κινητικής ενέργειας» της τύρβης ε μεταβάλλονται στον χώρο, πρέπει να περιγραφούν με τη βοήθεια διαφορικών εξισώσεων. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από τις εξισώσεις Navier-Stokes και από την εξίσωση της συνέχειας.

Στην περίπτωση μεγάλων αριθμών Reynolds η εξίσωση για την κινητική ενέργεια της τυρβώδους ροής είναι η παρακάτω:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = - \frac{\partial \langle u'_i \left(\frac{u'_j u'_j}{2} \right) \rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle u'_i \left(\frac{p'}{\rho} \right) \rangle}{\partial x_i} - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle \left\langle \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\rangle \quad (5.33\alpha)$$

Η φυσική σημασία των όρων είναι η εξής:

- $\langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i}$: ο όρος αυτός αντιστοιχεί στο φαινόμενο της συναγωγής (μεταφοράς) του k .

Μπορούμε, δηλαδή, να υποθέσουμε ότι η κινητική ενέργεια της τύρβης «συμπαράσύρεται» και μεταφέρεται από το κυρίως πεδίο των ταχυτήτων.

- $\frac{\partial \langle u'_i \left(\frac{u'_j u'_j}{2} \right) \rangle}{\partial x_i}$: Ο όρος αυτός προσομοιώνει τη διάχυση της ποσότητας k λόγω των διαταραχών (αυξομειώσεων) του πεδίου ταχυτήτων.

- $\frac{\partial \langle u'_i \left(\frac{p'}{\rho} \right) \rangle}{\partial x_i}$: Ο όρος αυτός προσομοιώνει τη διάχυση της ποσότητας k λόγω των διαταραχών (αυξομειώσεων) του πεδίου της πίεσης. Στην διεθνή βιβλιογραφία ο όρος αυτός ονομάζεται και «pressure strain».
- $\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j}$: Ο όρος αυτός αντιστοιχεί στην παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, η οποία «αποσύρεται από την κυρίως ροή». Θα συμβολίσουμε την παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας με το σύμβολο \bar{P}_{prod} .
- $\nu \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle \langle \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \rangle$: Ο όρος αυτός αντιστοιχεί στην καταστροφή της κινητικής ενέργειας, η οποία μετατρέπεται σε θερμότητα μέσω των δυνάμεων του ιξώδους. Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\varepsilon = \nu \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle \langle \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \rangle$.

Στην περίπτωση της μακροσκοπικά μόνιμης ροής στην οποία θα επικεντρωθούμε η εξίσωση (5.33α) γράφεται:

$$\langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = - \frac{\partial \langle u'_i \left(\frac{u'_j u'_j}{2} \right) \rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle u'_i \left(\frac{p'}{\rho} \right) \rangle}{\partial x_i} - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \nu \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle \langle \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \rangle \quad (5.33\beta)$$

Εκτός από τον πρώτο και τελευταίο από τους παραπάνω όρους, οι υπόλοιποι δεν είναι εκφρασμένες συναρτήσεις των μεγεθών που θεωρούνται γνωστά: των μέσων τιμών του πεδίου ταχυτήτων $\langle U_i \rangle$, των μέσων τιμών του πεδίου πίεσης $\langle P \rangle$, της κινητικής ενέργειας της τυρβώδους ροής k και του ρυθμού της καταστροφής της κινητικής ενέργειας ε . Για να προκύψει ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων, πρέπει για τους όρους αυτούς να γίνουν υποθέσεις, οι οποίες ισχύουν σε σημαντικό αριθμό ροών, αλλά δεν ισχύουν σε όλες τις περιπτώσεις. Με τη διαδικασία της λήψης των μέσων όρων ως προς τον χρόνο, την οποία αναφέραμε παραπάνω, χάνονται ορισμένες πληροφορίες για τη ροή. Η έλλειψη αυτών των πληροφοριών πρέπει να καλυφθεί με ορισμένες υποθέσεις.

Για πολλά πρακτικά προβλήματα στην πράξη χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι το φαινόμενο της διάχυσης της ποσότητας μπορεί να περιγραφεί από μία διαδικασία τύπου Fick και χρησιμοποιείται η παρακάτω προσέγγιση:

$$\langle u'_i \left(\frac{u'_j u'_j}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) \rangle = - \frac{1}{\rho} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (5.34)$$

Στην παραπάνω εξίσωση μ_t είναι ο συντελεστής του τυρβώδους ιξώδους (ο οποίος μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της εξίσωσης (5.32), στην οποία δεν εμφανίζονται άλλοι άγνωστοι εκτός από τα μεγέθη k και ε), ενώ η παράμετρος σ_k προσδιορίζεται από πειραματικά δεδομένα.

Όσον αφορά τον όρο παραγωγής της ποσότητας k , δηλαδή τον όρο

$$\bar{P}_{prod} = - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \quad (5.35)$$

στο μοντέλο k-ε (αλλά και σε αντίστοιχες προσεγγίσεις), για τον όρο ο οποίος αντιστοιχεί στις «τυρβώδεις τάσεις» (δηλαδή τον όρο $\langle u'_i u'_j \rangle$) υιοθετείται η προσέγγιση του τυρβώδους ιξώδους, την οποία αναφέραμε παραπάνω (βλ. εξίσωση 5.32). Συνολικά για τη μεταφορά της κινητικής ενέργειας της τυρβώδους ροής στα μοντέλα αυτά χρησιμοποιείται η παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \bar{P}_{prod} - \varepsilon \quad (5.36\alpha)$$

η οποία μπορεί να γραφεί, λαμβάνοντας υπόψη μας τις εξισώσεις (5.30) και (5.35), και ως εξής:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (5.36\beta)$$

Προφανώς για «μακροσκοπικά μόνιμες» ροές, περίπτωση στην οποία εστιάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο, ο πρώτος όρος της αριστερής πλευράς της παραπάνω εξίσωσης είναι ίσος με το μηδέν. Προκύπτει ότι:

$$\langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \bar{P}_{prod} - \varepsilon \quad (5.36\gamma)$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η παραπάνω εξίσωση έχει τη δομή της εξίσωσης της μεταφοράς-διάχυσης – πηγής/καταβόθρας.

Με μία αντίστοιχη διαδικασία, μπορούμε να διατυπώσουμε την «ακριβή διαδικασία» για τη μεταφορά της ποσότητας ε:

Μπορούν να γίνουν αντίστοιχες υποθέσεις, όπως προηγουμένως (δηλαδή για την εξίσωση μεταφοράς της ποσότητας k). Πιο συγκεκριμένα:

3. Η παραγωγή της ποσότητας ε από την κυρίως ροή είναι αμελητέα και οι αντίστοιχοι όροι πρέπει να τεθούν ίσοι με το μηδέν. Η υπόθεση αυτή ισχύει για την περίπτωση των μεγάλων αριθμών Reynolds.
4. Η παραγωγή της ποσότητας ε από την αλλαγή σχήματος των στροβίλων μείον την καταστροφή της ίδιας ποσότητας μπορεί να εκφραστεί με τη σχέση:

$$c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \bar{P}_{prod} - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

όπου ο όρος \bar{P}_{prod} έχει οριστεί από την εξίσωση (5.35), ενώ οι παράμετροι $c_{1\varepsilon}$ και $c_{2\varepsilon}$ προσδιορίζονται με τη βοήθεια πειραματικών δεδομένων.

5. Οι όροι οι οποίοι περιγράφουν τη διάχυση της ποσότητας ε μπορούν να περιγραφούν από τη σχέση:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right)$$

Προκύπτει τελικά η παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση για τη μεταφορά της ποσότητας ε, για την περίπτωση μακροσκοπικά μόνιμης ροής:

$$\rho U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \bar{P}_{prod} - c_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

ή αντίστοιχα:

$$\rho U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + c_{1\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon}{k} \left\{ \mu_i \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right\} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει επίσης τη δομή της εξίσωσης μεταφοράς/ διάχυσης / πηγής/ καταβόθρας: ο όρος αριστερά είναι όρος μεταφοράς, ο πρώτος όρος στην δεξιά πλευρά είναι όρος διάχυσης, ο δεύτερος όρος στη δεξιά πλευρά περιγράφει την παραγωγή της ποσότητας ε (άρα είναι όρος πηγής) ενώ ο τελευταίος όρος περιγράφει την καταστροφή της ποσότητας αυτής (άρα είναι όρος πηγής).

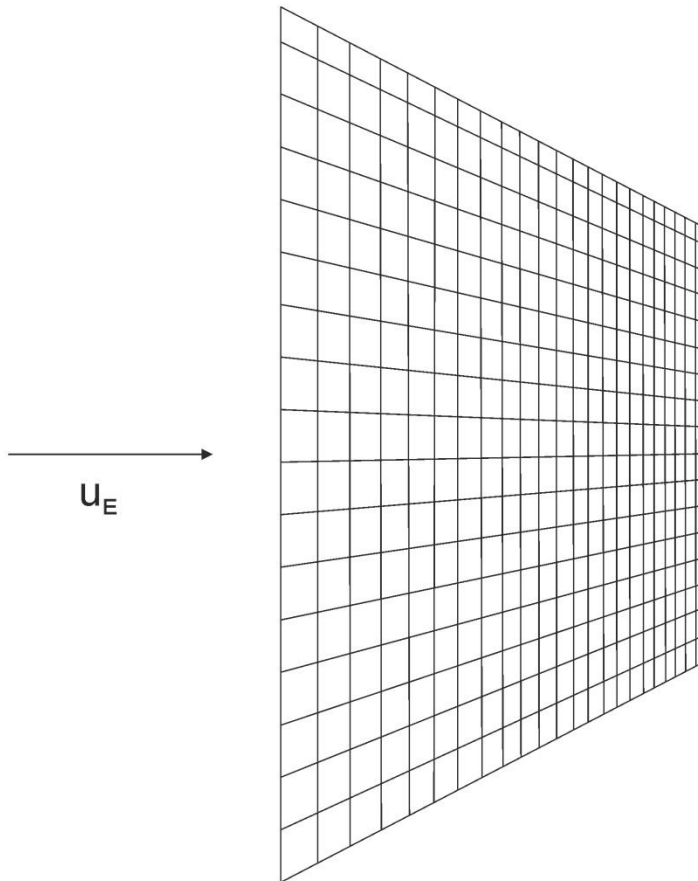
Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις (5.28), (5.30), (5.36) και (5.37), μαζί με τις βοηθητικές αλγεβρικές εξισώσεις (5.30) και (5.35), αποτελούν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων. Για την περίπτωση τρισδιάστατης ροής έχουμε έξι εξισώσεις και έξι αγνώστους. Οι ποσότητες $c_\mu, \sigma_k, \sigma_\varepsilon, c_{1\varepsilon}, c_{2\varepsilon}$ είναι παράμετροι οι οποίες έχουν προσδιοριστεί από πειραματικά δεδομένα. Για μεγάλο αριθμό ροών οι ποσότητες αυτές μπορούν να θεωρηθούν σταθερές και να χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω τιμές.

c_μ	$c_{1\varepsilon}$	$c_{2\varepsilon}$	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Πίνακας 5.1 Τιμές των παραμέτρων του μοντέλου k - ε για την οποία αυτές μπορούν να θεωρηθούν σταθερές.

Ένα παράδειγμα προσδιορισμού των παραπάνω ποσοτήτων είναι η περίπτωση προσδιορισμού του συντελεστή $c_{2\varepsilon}$. Για το σκοπό αυτό διεξήχθη το εξής πείραμα, το οποίο παρουσιάζεται στην Εικόνα 5.2: ανάντη ενός ορθογώνιου πλέγματος δημιουργήθηκε ένα πεδίο ροής το οποίο ήταν μονοδιάστατο και ομοιόμορφο με μέση ταχύτητα ίση με την ποσότητα:

$$\langle U_1 \rangle = \langle U_x \rangle = U_E \quad (5.38)$$



Εικόνα 5.2 Πειραματική διάταξη για τον προσδιορισμό της παραμέτρου του μοντέλου $k-\varepsilon$

ενώ προφανώς οι άλλες δύο συνιστώσες του μακροσκοπικού πεδίου ταχυτήτων ήταν ίσες με το μηδέν.

Θεωρώντας επιπλέον ότι η διάχυση και παραγωγή των ποσοτήτων k και ε κατάντη του πλέγματος ήταν αμελητέες, προκύπτει ότι:

$$U_E \frac{\partial k}{\partial x_i} = -\varepsilon \quad (5.39\alpha)$$

$$\rho U_E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = -c_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5.39\beta)$$

Είναι προφανές ότι στον παραπάνω τύπο ροής, στην περιοχή του πλέγματος, λόγω των διαταραχών του πεδίου ταχύτητας από το πλέγμα έχουμε, παραγωγή κινητικής ενέργειας, η οποία όμως δεν υφίσταται κατάντη. Είναι, επίσης, σαφές ότι για το συγκεκριμένο τύπο εμποδίου σε ικανή απόσταση κατάντη η ροή μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφη και μονοδιάστατη.

Δύο επιπλέον ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά του συστήματος των εξισώσεων είναι τα παρακάτω:

6. Από το μακροσκοπικό πεδίο ταχυτήτων εμφανίζεται μόνο μία συνιστώσα η U_E , η οποία μπορεί να προσδιοριστεί από τα δεδομένα του πειράματος, άρα δεν είναι αναγκαία η επίλυση των εξισώσεων (5.29).
7. Από τις πέντε παραμέτρους του μοντέλου $k-\varepsilon$ (βλ. και Πίνακας 5.1) εμφανίζεται μόνο η μία, η $c_{2\varepsilon}$.

Παίρνοντας, λοιπόν, υπόψη μας τη λύση του συστήματος εξισώσεων (5.39α, β) και προσδιορίζοντας την κινητική ενέργεια μέσα από πειραματικές μετρήσεις, μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή του συντελεστή $c_{2ε}$. Υπάρχουν, όμως, και πολλές εξαιρέσεις, στις οποίες οι τιμές αυτές δεν ισχύουν.

Για περιπτώσεις κατά τις οποίες η παραγωγή κινητικής ενέργειας και η καταστροφή της δεν είναι τοπικά σε ισορροπία είναι πιθανό η προσέγγιση του τυρβώδους ιξώδους (εξίσωση 5.30) να μην ισχύει και θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν άλλες προσεγγίσεις, όπως επίλυση διαφορικών εξισώσεων για τις τυρβώδεις τάσεις (βλ. Rodi (1980), Rodi (1993) και Warner et al. 2005).

Τα παραπάνω μοντέλα προσομοίωσης της τυρβώδους ροής, κυρίως τα μοντέλα $k-\epsilon$ στα οποία δώσαμε έμφαση, έχουν εφαρμογή σε πολλά προβλήματα τα οποία σχετίζονται με την Περιβαλλοντική Μηχανική, όπως στην κατανόηση της υδραυλικής συμπεριφοράς στο σημείο συμβολής ενός ποταμού και ενός παραποτάμου (βλ. Lane et al. 1999), στο σχεδιασμό Δεξαμενών Δευτεροβάθμιας Καθίζησης σε μία Εγκατάσταση Επεξεργασίας Λυμάτων (βλ. Stamou et al. 2009), στη βελτίωση της λειτουργίας δεξαμενών για την επεξεργασία πόσιμου νερού (Stamou 2008), σε προβλήματα ρύπανσης της ατμόσφαιρας στο εσωτερικό πόλεων, στα οποία υπεισέρχεται και το φαινόμενο της αστικής χαράδρας (βλ. Jeong, and Andrews 2002, Assimakopoulos et al. 2003 και Li et al. 2006).

Οι βασικές αρχές επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων των μοντέλων τύρβης είναι αντίστοιχες με αυτές οι οποίες έχουν ήδη παρουσιαστεί, ορισμένες επιπλέον λεπτομέρειες δίνονται στον Patankar (1980) και στους Μαρκάτο και Ασημακόπουλο (1995).

5.3. Προσομοίωση υπόγειων ροών

Οι υπόγειες ροές λαμβάνουν χώρα κατά κανόνα σε «πορώδη μέσα», τα οποία μπορεί να αποτελούνται από κόκκους, όπως οι ροές που λαμβάνουν χώρα σε αμμώδεις σχηματισμούς, είτε σε μεγάλο αριθμό από αγωγούς, όπως οι ροές σε ρωγματομένους υδροφορείς. Για να θεωρηθεί ο σχηματισμός πορώδης μέσο στην τελευταία περίπτωση, πρέπει ο αριθμός των ρωγμών να είναι μεγάλος.

Όπως αναφέραμε ο χώρος στον οποίο λαμβάνει χώρα η ροή στα παραπάνω πορώδη μέσα έχει εξαιρετικά πολύπλοκη γεωμετρία, με αποτέλεσμα να είναι απαραίτητο να εξετάζουμε το μέσο όρο των μεγεθών τα οποία μας ενδιαφέρουν σε έναν «Αντιπροσωπευτικό Στοιχειώδη Όγκο» (ή Α.Σ.Ο.), ο οποίος πρέπει να έχει διαστάσεις κατά πολύ μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες των κόκκων, είτε από τη μέση απόσταση των ρωγμών. Με τη μέθοδο αυτή δεν εξετάζουμε πια την τιμή των υδροδυναμικών ή άλλων χαρακτηριστικών που μας ενδιαφέρουν σε κάθε σημείο, αλλά τη μέση τιμή τους στον Α.Σ.Ο., γι' αυτό η προσέγγιση που περιγράψαμε παραπάνω ονομάζεται και προσέγγιση του «ισοδύναμου συνεχούς μέσου». Οι διαστάσεις του Α.Σ.Ο. πρέπει να είναι πολύ μεγάλες, ώστε οι μέσες τιμές των μεγεθών που θα προκύψουν από την παραπάνω διαδικασία ολοκλήρωσης να είναι ανεξάρτητες από τον Α.Σ.Ο. Από την άλλη, όμως, πρέπει να είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις του χώρου στον οποίο λαμβάνει χώρα η ροή, ώστε ο Α.Σ.Ο. να φαίνεται σαν ένα «σημείο». Αυτός είναι και ο λόγος που η προσέγγιση του ισοδύναμου συνεχούς μέσου μπορεί να εφαρμοστεί σε ρωγματομένους υδροφορείς με πυκνό δίκτυο ρωγμών. Σε υδροφορείς με μικρό αριθμό ρωγμών οι ελάχιστες απαιτούμενες διαστάσεις του Α.Σ.Ο. μπορεί να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις διαστάσεις του υδροφορέα οπότε ο Α.Σ.Ο. δεν μπορεί να θεωρηθεί σημείο (δηλαδή δεν έχει αμελητέες διαστάσεις σε σχέση με τον χώρο στον οποίο λαμβάνει χώρα η ροή), οπότε δεν ισχύει και η προσέγγιση του ισοδύναμου συνεχούς μέσου. Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια τις εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν την κίνηση του νερού σε υπόγειους υδροφορείς τόσο για περιπτώσεις στις οποίες ισχύουν οι προσεγγίσεις της συμβατικής υπόγειας υδραυλικής, (ισχύουν ο νόμος του Darcy και η υπόθεση της υδραυλικής ισορροπίας στο εσωτερικό ενός Α.Σ.Ο.), όσο και για την αντίθετη περίπτωση. Μία λεπτομερής περιγραφή της μαθηματικής προσέγγισης για την πρώτη περίπτωση υπάρχει και στο κλασικό σύγγραμμα του Bear (1979).

Σε πορώδη μέσα στα οποία υφίσταται προσέγγιση του ισοδύναμου συνεχούς μέσου και η ροή είναι έρπουσα ισχύει ο νόμος του Darcy ο οποίος γράφεται:

$$q_i = -K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (5.40)$$

όπου q_i είναι η χαρακτηριστική ταχύτητα στην κλίμακα του ισοδύναμου συνεχούς μέσου, h το πιεζομετρικό φορτίο (το οποίο ορίζεται από την σχέση $h=p/\gamma+z$ όπου p είναι η πίεση, γ το ειδικό βάρος και z η απόσταση από το επίπεδο αναφοράς), ενώ K_{ij} είναι η υδραυλική αγωγιμότητα, η οποία στην εξίσωση (5.40) δίνεται με τη μορφή τανυστή, ώστε να μπορέσουν να προσομοιωθούν οι ροές σε ανισότροπα πορώδη μέσα. Στην περίπτωση αυτή στις διευθύνσεις που έχουμε μικρότερη πτώση της πιεζομετρίας για την ίδια ταχύτητα, η τιμή της αγωγιμότητας είναι μεγαλύτερη από τις άλλες, όπου η πτώση της πιεζομετρίας είναι μεγαλύτερη.

Για την περίπτωση ενός ισότροπου πορώδους μέσου η εξίσωση του Darcy μπορεί να γραφεί με την εξής απλούστερη μορφή:

$$q_i = -K \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (5.41)$$

Στην παραπάνω εξίσωση η υδραυλική αγωγιμότητα είναι βαθμωτό μέγεθος.

Επειδή κατά κανόνα τόσο οι συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων, όσο και το πιεζομετρικό φορτίο είναι άγνωστα μεγέθη, η εξίσωση (5.40) και αντίστοιχα η εξίσωση (5.41) δεν αποτελούν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων, άρα πρέπει να πάρουμε υπόψη μας και την αρχή της διατήρησης της μάζας. Εξετάζουμε το ισοζύγιο της μάζας σε ένα ορθογωνικό (ή σχεδόν ορθογωνικό) πρίσμα του υπόγειου υδροφορέα (βλ. π.χ. Bear 1979).

Στην περίπτωση αυτή για υδροφορείς υπό πίεση ισχύει η παρακάτω εξίσωση της συνέχειας:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Bq_i}{\partial x_i} = N \quad (5.42\alpha)$$

ή ισοδύναμα

$$S \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Bq_x}{\partial x} + \frac{\partial Bq_y}{\partial y} = N \quad (5.42\beta)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις S [-] είναι ένας κατάλληλος συντελεστής αποθηκευτικότητας η ακριβής τιμή του οποίου εξαρτάται από τη συμπιεστότητα του νερού και του στερεού σκελετού, B [L] είναι το πάχος του υδροφορέα, ενώ N είναι ένας όρος πηγής-καταβόθρας, ο οποίος περιγράφει τις ανταλλαγές μάζας του υπόγειου υδροφορέα με το εξωτερικό, εκτός από αυτές οι οποίες γίνονται στα εξωτερικά όρια. Μία τυπική περίπτωση μόνιμης μονοδιάστατης ροής σε υδροφορέα υπό πίεση περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο και παρουσιάζεται σχηματικά στην **Σφάλαμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**

Στην περίπτωση ενός φρεατίου υδροφορέα προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$S_y \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hq_i}{\partial x_i} = N \quad (5.43\alpha)$$

ή ισοδύναμα:

$$S_y \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hq_x}{\partial x} + \frac{\partial hq_y}{\partial y} = N \quad (5.43\beta)$$

Όσον αφορά την εξίσωση (5.43α) πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι η μεταβλητή h αντιστοιχεί στο βάθος ροής, ενώ η αποθηκευτικότητα S_y αν και έχει την ίδια φαινομενολογική σημασία με την παράμετρο S της

εξίσωσης (5.42α), έχει διαφορετικό φυσικό υπόβαθρο, μια και η παράμετρος S_y αντιστοιχεί στο ενεργό πορώδες και δεν εξαρτάται από τη συμπιεστότητα του νερού και του στερεού σκελετού. Μία τυπική περίπτωση μόνιμης μονοδιάστατης ροής σε φρεάτιο υδροφορέα περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο και παρουσιάζεται σχηματικά στην **Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**

Εισάγοντας την εξίσωση του Darcy στην εξίσωση της συνέχειας προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνο άγνωστο.

Εισάγοντας, λοιπόν, την εξίσωση (5.41) στην εξίσωση (5.43β) προκύπτει η εξίσωση:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(T \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + N \quad (5.44)$$

όπου T [L^2/T] είναι η μεταφορικότητα ή μεταβιβαστικότητα του υδροφορέα.

Στην περίπτωση που η τιμή του T είναι σταθερή, προκύπτει αντίστοιχα η εξίσωση:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = T \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_i} + N \quad (5.45\alpha)$$

η οποία με τη χρήση του κλασικού (ή συμβατικού) τρόπου γραφής έχει ως εξής:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = T \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + N \quad (5.45\beta)$$

Η εξίσωση (5.44) και ισοδύναμα οι εξισώσεις (5.45α) και (5.45β) έχουν τη δομή της εξίσωσης της διάχυσης με όρο πηγής – καταβόθρας.

Στην περίπτωση όπου $N=0$ η εξίσωση (5.45β) λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D_h \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad (5.46)$$

όπου D_h ($D_h=T/S$) είναι ο συντελεστής υδραυλικής διάχυσης. Η παραπάνω εξίσωση, είναι η εξίσωση διάχυσης χωρίς όρους πηγής – καταβόθρας, τη λύση της οποίας παρουσιάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Οι εξισώσεις (5.44), (5.45α) και (5.46) που περιγράφουν ροές σε υδροφορείς υπό πίεση είναι γραμμικές. Από την άλλη είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι αντίστοιχες εξισώσεις για τους υδροφορείς με ελεύθερη επιφάνεια δεν είναι γραμμικές.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (5.41) και (5.43α) προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$S_y \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) + N \quad (5.47\alpha)$$

Στην περίπτωση, όμως, κατά την οποία οι μεταβολές της στάθμης είναι μικρές σε σχέση με τη μέση τιμή της, η εξίσωση (5.47α) μπορεί να γραμμικοποιηθεί και να λάβει την παρακάτω μορφή:

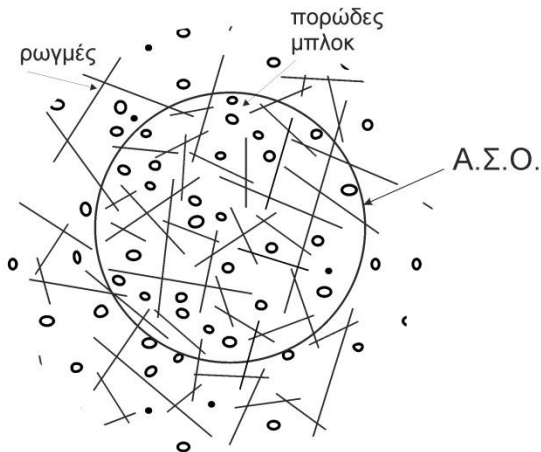
$$S_y \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_e \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_e \frac{\partial h}{\partial y} \right) + N \quad (5.47\beta)$$

όπου T_e είναι μία ισοδύναμη μεταβιβαστικότητα (ή μεταφορικότητα) η οποία ορίζεται από την σχέση:

$$T_e = Kh_m \quad (5.47\gamma)$$

όπου h_m είναι μία κατάλληλη μέση τιμή του βάθους ροής.

Ως τώρα είχαμε υποθέσει ότι στον Α.Σ.Ο. υπάρχουν συνθήκες υδραυλικής ισορροπίας. Σε ορισμένες, όμως, περιπτώσεις, όπως π.χ. σε ρωγματομένους υδροφορείς η υπόθεση αυτή δεν ισχύει και οι υδραυλικές συνθήκες σε χωριστές ομάδες πόρων είναι πολύ διαφορετικές, π.χ. σε υδροφορείς οι οποίοι έχουν πρωτογενές και δευτερογενές πορώδες (βλ. Εικόνα 5.3).



Εικόνα 5.3 Σχηματική παρουσίαση υδροφορέα με διπλό πορώδες, στον οποίο συνυπάρχει το πορώδες μπλοκ (πρωτογενές πορώδες) και το δίκτυο ρωγμών (δευτερογενές πορώδες), για τον οποίο μπορεί να εφαρμοστεί το διπλό πορώδες συνεχούς μορφής.

Αν υποθέσουμε ότι το δίκτυο ρωγμών (το οποίο αναφέρεται και σαν δευτερογενές πορώδες) είναι αρκετά πυκνό, ώστε να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε την υδραυλική του συμπεριφορά με την υπόθεση του ισοδύναμου συνεχούς μέσου, τότε θα πρέπει να εξετάσουμε διαφορετικές μέσες τιμές για τις συνθήκες του δικτύου ρωγμών, τις οποίες θα συμβολίσουμε με τον δείκτη 2 (τις αντίστοιχες τιμές στο πρωτογενές πορώδες θα τις συμβολίσουμε με το δείκτη 1) (βλ. επίσης Barenblatt et al. 1960, Aifantis 1977).

Στην περίπτωση διδιάστατης ροής σε υδροφορέα υπό πίεση χωρίς ανταλλαγές με το εξωτερικό περιβάλλον, όταν έχουμε ισοτροπία και ομοιομορφία των παραμέτρων, η υδραυλική συμπεριφορά διπλού πορώδους περιγράφεται με την εξίσωση (για μία λεπτομερή απόδειξη βλ. Moutsopoulos et al. 2001):

$$S_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} = T_1 \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} \right) + \kappa (h_2 - h_1) \quad (5.48\alpha)$$

$$S_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} = T_2 \left(\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \right) + \kappa (h_1 - h_2) \quad (5.48\beta)$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέρος της εξίσωσης (5.48α και β) προσομοιώνει της ανταλλαγές ρευστού ανάμεσα στα δύο ισοδύναμα συνεχή μέσα (πρωτογενές πορώδες και δίκτυο ρωγμών) μέσα στον ίδιο Α.Σ.Ο.

Στην περίπτωση κατά την οποία η ροή στα πορώδη μέσα δεν είναι έρπουσα δεν ισχύει η εξίσωση του Darcy αλλά η εξίσωση του Forchheimer (Joseph, et al. 1982), η οποία χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις που χρησιμοποιήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$-\frac{\partial h}{\partial x_i} = a q_i + b q_i \sqrt{q_j q_j} \quad (5.49)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία η ροή είναι δισδιάστατη η εξίσωση Forchheimer μπορεί να γραφεί με τη χρήση του κλασικού τρόπου γραφής:

$$-\frac{\partial h}{\partial x} = a q_x + b q_x \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \quad (5.50\alpha)$$

$$-\frac{\partial h}{\partial y} = a q_y + b q_y \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \quad (5.50\beta)$$

όπου προφανώς q_x και q_y είναι οι συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα. Εδ' ὃν λαμβάνουμε υπόψη εκτός από την εξίσωση Forchheimer και την κατάλληλη μορφή της εξίσωσης της συνέχειας.

Αντί της εξίσωσης Forchheimer μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση Izbash, η οποία στην περίπτωση μονοδιάστατης ροής γράφεται:

$$-\frac{\partial h}{\partial x} = \lambda q_x^m \quad (5.51)$$

Ενώ η ισχύς της εξίσωσης Izbash έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά (όπως άλλωστε και η εξίσωση Forchheimer), το θεωρητικό της υπόβαθρο δεν έχει τεκμηριωθεί, σε αντίθεση με την περίπτωση της εξίσωσης Forchheimer, για την οποία υπάρχει μεγάλος αριθμός θεωρητικών εργασιών.

Βιβλιογραφία

- Aifantis, E. C. (1977).** *Introducing a multi-porous medium.* Dev. Mech, 8, 209-211.
- Assimakopoulos, V., ApSimon, H., & Moussiopoulos, N. (2003).** *A numerical study of atmospheric pollutant dispersion in different two-dimensional street canyon configurations.* Atmospheric Environment, 37(29), 4037-4049.
- Barenblatt, G., Zheltov, I. P., & Kochina, I. (1960).** *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata].* Journal of applied mathematics and mechanics, 24(5), 1286-1303.
- Bear, J. (1979).** *Hydraulics of groundwater.* McGraw-Hill Series in water Resources and Environmental Engineering Show all parts in this series.
- Forchheimer, P. (1901).** *Wasserbewegung durch boden.* Z. Ver. Deutsch. Ing, 45(1782), 1788.
- Jeong, S. J., & Andrews, M. J. (2002).** *Application of the $k-\epsilon$ turbulence model to the high Reynolds number skimming flow field of an urban street canyon.* Atmospheric Environment, 36(7), 1137-1145.
- Joseph, D., Nield, D., & Papanicolaou, G. (1982).** *Nonlinear equation governing flow in a saturated porous medium.* Water Resources Research, 18(4), 1049-1052.
- Lane, S., Bradbrook, K., Richards, K., Biron, P., & Roy, A. (1999).** *The application of computational fluid dynamics to natural river channels: three-dimensional versus two-dimensional approaches.* Geomorphology, 29(1), 1-20.
- Li, X.-X., Liu, C.-H., Leung, D. Y., & Lam, K. (2006).** *Recent progress in CFD modelling of wind field and pollutant transport in street canyons.* Atmospheric Environment, 40(29), 5640-5658.
- Moutsopoulos, K., Konstantinidis, A., Meladiotis, I., Tzimopoulos, C., & Aifantis, E. (2001).** *Hydraulic Behavior and Contaminant Transport in Multiple Porosity Media.* Transport in Porous Media, 42(3), 265-292. doi: 10.1023/A:1006745924508
- Patankar, S. (1980).** *Numerical heat transfer and fluid flow:* CRC Press.
- Rodi, W. (1980).** *Turbulent models and their application in hydraulics—a state of the art review.* International Association for Hydraulics Research, Delft.
- Rodi, W. (1993).** *Turbulence models and their application in hydraulics:* CRC Press.
- Stamou, A. I. (2008).** *Improving the hydraulic efficiency of water process tanks using CFD models.* Chemical Engineering and Processing: Process Intensification, 47(8), 1179-1189.
- Stamou, A. I., Theodoridis, G., & Xanthopoulos, K. (2009).** *Design of secondary settling tanks using a CFD model.* Journal of Environmental Engineering, 135(7), 551-561.
- Warner, J. C., Sherwood, C. R., Arango, H. G., & Signell, R. P. (2005).** *Performance of four turbulence closure models implemented using a generic length scale method.* Ocean Modelling, 8(1), 81-113.
- Κωτσοβίνος Ν. Ε. (2008).** *Ρευστομηχανική:* Εκδόσεις Σπανίδη.
- Μαρκάτος Ν., Ασιμακόπουλος Δ (1995).** *Υπολογιστική Ρευστοδυναμική:* Εκδόσεις Παπασωτηρίου.