Κεφάλαιο 7
Λογική πρώτης τάξης

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται το συντακτικό της λογικής πρώτης τάξης, δηλαδή πώς πρέπει να είναι διατυπωμένοι οι τύποι στη λογική αυτή, και, ειδικότερα, οι προτάσεις, μια μορφή τύπων, ειδική περίπτωση των οποίων είναι οι προτάσεις Horn. Επίσης, παρουσιάζεται ο μηχανισμός της ενοποίησης όρων ή τύπων, μέσα από μια αλγοριθμική περιγραφή του. Τέλος, γίνεται αναφορά στην αρχή της ανάλυσης, καθώς και σε μια ειδική περίπτωσή της, το modus ponens, που είναι κανόνες συμπερασμού για την παραγωγή νέων προτάσεων από ήδη υπάρχουσες.

Προαπαιτούμενη γνώση

Για την κατανόηση του κεφαλαίου, ο αναγνώστης δεν απαιτείται να έχει ειδικές γνώσεις. Ωστόσο, στοιχειώδης γνώση της Prolog, όπως αυτή παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 3, θα βοηθούσε.

7.1 Προτάσεις Horn

Στο Κεφάλαιο 2 πήρατε μια πρώτη ιδέα του τρόπου με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί η **λογική** για την επίλυση προβλημάτων. Το εργαλείο που βοηθά στην επίτευξη αυτού του στόχου είναι ο **λογικός προγραμματισμός** [1, 2, 3, 4], μέσω της εφαρμογής του στην πράξη από τη γλώσσα προγραμματισμού Prolog [5]. Σε αυτό το κεφάλαιο, αλλά και στο επόμενο, θα δούμε τα βασικά στοιχεία της θεμελίωσης του λογικού προγραμματισμού στη λογική.

Το θεωρητικό υπόβαθρο του λογικού προγραμματισμού είναι η **λογική πρώτης τάξης**, που πολλές φορές αναφέρεται και ως **κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης** ή, απλώς, **κατηγορηματική λογική**. Η λογική πρώτης τάξης είναι γενίκευση της **προτασιακής λογικής**. Στοιχεία από την προτασιακή λογική και τη λογική πρώτης τάξης είδαμε στο Κεφάλαιο 2.

Σε αυτήν την ενότητα, καταρχάς ενδιαφερόμαστε και θα παρουσιάσουμε την αξιωματική θεμελίωση των **προτάσεων Horn** στη λογική πρώτης τάξης, οι οποίες δεν είναι τίποτε άλλο από τη θεωρητική εκδοχή των προτάσεων που περιλαμβάνουμε στα προγράμματα Prolog.

Στη λογική πρώτης τάξης, ορίζουμε τα εξής σύνολα:

P : σύνολο **κατηγορημάτων**

F : σύνολο **συναρτησιακών συμβόλων**

V : σύνολο **μεταβλητών**

Σε κάθε κατηγόρημα ή συναρτησιακό σύμβολο k αντιστοιχεί ένας ακέραιος αριθμός $n \geq 0$, που ονομάζεται **τάξη** (ή **βαθμός**) του k. Το k συμβολίζεται και ως k/n. Τα συναρτησιακά σύμβολα βαθμού 0 ονομάζονται και **σταθερές**. Στη λογική πρώτης τάξης, χρησιμοποιούμε τα **σημεία στίξης** «(», «)» και «,».

Ορισμός 7.1

Ένας **όρος** ορίζεται ως εξής:

1. Αν $x \in V$, το x είναι όρος.
2. Αν $c/0 \in F$, το c είναι όρος.
3. Αν $f/n \in F$ και $t_1, t_2, \ldots, t_n$ είναι όροι, το $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ είναι όρος.

Παράδειγμα 7.1

Αν $V = \{x\}$ και $F = \{john/0, mary/0, father\_of/1, children\_of/2\}$, τότε τα:

x
john

$father\_of(john)$
$children\_of(father\_of(x), mary)$

είναι όροι.

Ορισμός 7.2

Ένας **ατομικός τύπος** (ή **άτομο**) ορίζεται ως εξής:

Αν $p/0 \in P$, τότε το p είναι άτομο.
Αν $p/n \in P$ και $t_1, t_2, \ldots, t_n$ είναι όροι, τότε το $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ είναι άτομο.

Παράδειγμα 7.2

Αν $V = \{x\}$, $F = \{john/0, father\_of/1\}$ και $P = \{it\_rains/0, young/1, father/2\}$, τότε τα:

it_rains
$young(john)$
$father(father\_of(x), x)$

είναι άτομα.

Ορισμός 7.3

Ένας όρος που δεν περιέχει μεταβλητές ονομάζεται **βασικός όρος**. Ένα άτομο που δεν περιέχει μεταβλητές ονομάζεται **βασικό άτομο**.

□

Για τη δόμηση πιο σύνθετων τύπων, στη λογική πρώτης τάξης χρησιμοποιούνται τα **συνδετικά**, που είναι τα εξής:

$\neg$:	άρνηση		
$\wedge$:	σύζευξη	$\vee$:	διάζευξη
$\rightarrow$:	συνεπαγωγή	$\leftrightarrow$:	ισοδυναμία
$\forall$:	καθολικός ποσοδείκτης	$\exists$:	υπαρξιακός ποσοδείκτης

Ορισμός 7.4

Ένας **καλοσχηματισμένος τύπος** (ή **τύπος**) ορίζεται ως εξής:

1. Αν το A είναι άτομο, τότε το A είναι τύπος.
2. Αν τα F_1 και F_2 είναι τύποι, τότε και τα $(\neg F_1)$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$,[1] $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ είναι τύποι.
3. Αν το F είναι τύπος και $x \in V$, τότε τα $(\forall x)(F)$ και $(\exists x)(F)$ είναι τύποι.

Παράδειγμα 7.3

Αν $V = \{x, y\}$, $F = \{john/0, mary/0, house/2\}$ και $P = \{man/1, woman/1, loves/2, hates/2\}$, τότε τα:

$loves(mary, x)$

1 Μερικές φορές, είναι βολικό το $F_1 \rightarrow F_2$ να γράφεται $F_2 \leftarrow F_1$.

$(man(john) \wedge ((\neg hates(john, john)) \vee (\neg loves(john, john))))$
$(\neg(\exists x)(loves(x, y)))$
$(\forall x)((\exists y)(house(x, y)))$
$(\exists y)((\forall x)(house(x, y)))$
$(\forall x)((man(x) \rightarrow (\exists y)((woman(y) \vee loves(x, y)))))$
είναι τύποι.

□

Υιοθετώντας μια ιεραρχία των συνδετικών, τέτοια ώστε η άρνηση $\neg$ και οι ποσοδείκτες (καθολικός $\forall$ και υπαρξιακός $\exists$) να είναι ισχυρότερα από τη διάζευξη $\vee$, αυτή ισχυρότερη από τη σύζευξη $\wedge$ και αυτή από τη συνεπαγωγή $\rightarrow$ και την ισοδυναμία $\leftrightarrow$, μπορούμε να γράφουμε τους τύπους απλούστερα, αποφεύγοντας αρκετές παρενθέσεις, χωρίς ασάφεια.

Παράδειγμα 7.4

Με βάση την προηγούμενη απλούστευση, οι τύποι του Παραδείγματος 7.3 θα μπορούσαν να γραφούν ως εξής:

$loves(mary, x)$
$man(john) \wedge \neg hates(john, john) \vee \neg loves(john, john)$
$\neg(\exists x)(loves(x, y))$
$(\forall x)(\exists y)(house(x, y))$
$(\exists y)(\forall x)(house(x, y))$
$(\forall x)(man(x) \rightarrow (\exists y)(woman(y) \wedge loves(x, y)))$

Ορισμός 7.5

Δεδομένων ενός συνόλου κατηγορημάτων P, ενός συνόλου συναρτησιακών συμβόλων F και ενός συνόλου μεταβλητών V, το σύνολο όλων των συντακτικά αποδεκτών τύπων, βάσει του ορισμού 7.4, αποτελεί μια **γλώσσα πρώτης τάξης**.

Ορισμός 7.6

Η **εμβέλεια** του $\forall$ στον τύπο $(\forall x)(F)$ ή του $\exists$ στον τύπο $(\exists x)(F)$ είναι ο τύπος F.

Ορισμός 7.7

Δεσμευμένη εμφάνιση μεταβλητής σε έναν τύπο είναι μια εμφάνισή της αμέσως μετά από έναν ποσοδείκτη ή μέσα στην εμβέλεια ενός ποσοδείκτη που εφαρμόζεται στη μεταβλητή. Οποιαδήποτε άλλη εμφάνιση της μεταβλητής ονομάζεται **ελεύθερη εμφάνιση**.

Παράδειγμα 7.5

Στους τύπους του Παραδείγματος 7.4, ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών είναι:
- η εμφάνιση της x στον τύπο $loves(mary, x)$
- η εμφάνιση της y στον τύπο $\neg(\exists x)(loves(x, y))$

Όλες οι άλλες εμφανίσεις μεταβλητών είναι δεσμευμένες.

Ορισμός 7.8

Ένας τύπος ονομάζεται **κλειστός** όταν δεν περιέχει ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών.

Παράδειγμα 7.6

Από τους τύπους του Παραδείγματος 7.4, οι:

$man(john) \wedge \neg hates(john, john) \vee \neg loves(john, john)$
$(\forall x)(\exists y)(house(x, y))$
$(\exists y)(\forall x)(house(x, y))$
$(\forall x)(man(x) \rightarrow (\exists y)(woman(y) \wedge loves(x, y)))$

είναι κλειστοί, αλλά όχι οι:

$loves(mary, x)$
$\neg(\exists x)(loves(x, y))$

Ορισμός 7.9

Στοιχειώδης τύπος είναι ένα άτομο ή η άρνηση ενός ατόμου.

Ορισμός 7.10

Οι τύποι της μορφής:

$$(\forall x_1)(\forall x_2) \ldots (\forall x_s)(L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_m)$$

καλούνται **προτάσεις**, όπου τα L_i $(1 \leq i \leq m)$ είναι στοιχειώδεις τύποι και τα x_j $(1 \leq j \leq s)$ είναι όλες οι μεταβλητές που εμφανίζονται στο $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_m$.

Παράδειγμα 7.7

Αν $V = \{x, y\ z\}$, $F = \{john/0, a\_building/0\}$ και $P = \{man/1, mortal/1, parent/2, grandparent/2, rich/1, has\_big\_house/1, has\_expensive\_car/1\}$, τότε τα:

$man(john)$
$\neg man(a\_building)$
$(\forall x)(mortal(x) \forall \neg man(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(grandparent(x, z) \vee \neg parent(x, y) \vee \neg parent(y, z))$
$(\forall x)(has\_big\_house(x) \vee has\_expensive\_car(x) \vee \neg rich(x))$

είναι προτάσεις.

□

Υπάρχει η δυνατότητα και εναλλακτικής γραφής για τις προτάσεις. Συγκεκριμένα, η πρόταση:

$$(\forall x_1)(\forall x_2) \ldots (\forall x_s)(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_n)$$

όπου τα A_i $(1 \leq i \leq k)$ και B_j $(1 \leq j \leq n)$ είναι άτομα, γράφεται και ως εξής:

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \leftarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$$

Το αριστερό μέλος του ← ονομάζεται **κεφαλή** της πρότασης, ενώ το δεξιό μέλος ονομάζεται **σώμα** της πρότασης. Δεν αποκλείεται κάποια πρόταση να έχει κενή κεφαλή ($k = 0$) ή να έχει κενό σώμα ($n = 0$) ή και τα δύο.

Παράδειγμα 7.8

Με την προηγούμενη εναλλακτική γραφή, οι προτάσεις του Παραδείγματος 7.7 θα μπορούσαν να γραφούν ως εξής:

$man(john) \leftarrow$
$\leftarrow man(a\_building)$
$mortal(x) \leftarrow man(x)$
$grandparent(x, z) \leftarrow parent(x, y), parent(y, z)$
$has\_big\_house(x), has\_expensive\_car(x) \leftarrow rich(x)$

Ορισμός 7.11

Οι προτάσεις με $k = 1$ ($A \leftarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$), σύμφωνα με την εναλλακτική γραφή που προτάθηκε, ονομάζονται **οριστικές προτάσεις**. Οι οριστικές προτάσεις με $n = 0$ ($A \leftarrow$) ονομάζονται **μοναδιαίες προτάσεις**. Ένα σύνολο οριστικών προτάσεων είναι ένα **οριστικό πρόγραμμα**, που πολλές φορές αναφέρεται και ως **λογικό πρόγραμμα**.

□

Ένα πρόγραμμα Prolog που δεν περιλαμβάνει ούτε αποκοπές, ούτε αρνήσεις, ούτε οποιοδήποτε άλλο ενσωματωμένο κατηγόρημα είναι ένα οριστικό (ή λογικό) πρόγραμμα.

Ορισμός 7.12

Οι προτάσεις με $k = 0$ ($\leftarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$), σύμφωνα με την εναλλακτική γραφή που προτάθηκε, ονομάζονται **οριστικοί στόχοι**.

Ορισμός 7.13

Για $k = 0$ και $n = 0$, στην εναλλακτική γραφή των προτάσεων, έχουμε την **κενή πρόταση** ($\leftarrow$ ή □), που αναφέρεται και ως **αντίφαση**.

Παράδειγμα 7.9

Από τις προτάσεις του Παραδείγματος 7.8, η:

$man(john) \leftarrow$

είναι οριστική μοναδιαία πρόταση, η:

$\leftarrow man(a\_building)$

είναι οριστικός στόχος, οι:

$mortal(x) \leftarrow man(x)$
$grandparent(x, z) \leftarrow parent(x, y), parent(y, z)$

είναι οριστικές προτάσεις, όχι όμως και η:

$has\_big\_house(x), has\_expensive\_car(x) \leftarrow rich(x)$

Ορισμός 7.14

Μια **πρόταση Horn** είναι είτε οριστική πρόταση είτε οριστικός στόχος.

Άσκηση 7.1

Δίνονται οι εξής τύποι λογικής πρώτης τάξης:

1. $borders(x, greece)$
2. $(\exists x)(man(x) \wedge (\forall y)(woman(y) \rightarrow loves(y, x)))$
3. $(\forall x)(\forall y)(may\_steal(x, y) \vee \neg likes(x, y) \vee \neg thief(x))$
4. $connected(x, y) \wedge connected(y, z) \rightarrow connected(x, z)$
5. $on\_diet(x), athlete(x) \leftarrow fit(x)$
6. $\neg loves(john, mary) \vee \neg loves(mary, john)$
7. $father(x, y) \leftarrow male(x), parent(x, y)$
8. 8. $append(.(a, []), .(b, []), .(a, .(b, [])))$

Αν το σύνολο των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν στους τύπους αυτούς είναι το $V = \{x, y, z\}$, τότε ποια πρέπει να είναι τα σύνολα των συναρτησιακών συμβόλων F και κατηγορημάτων P, για να είναι οι τύποι αυτοί συντακτικά σωστοί; Ποιοι από αυτούς τους τύπους είναι κλειστοί και ποιοι όχι; Αυτοί που δεν είναι κλειστοί, γιατί δεν είναι; Ποιοι τύποι είναι προτάσεις διατυπωμένες με τον κλασικό τρόπο της λογικής πρώτης τάξης; Διατυπώστε τες και με τον εναλλακτικό απλουστευμένο τρόπο. Υπάρχουν προτάσεις στους προηγούμενους τύπους, ήδη διατυπωμένες με τον εναλλακτικό τρόπο; Ποιες από τις προτάσεις (με όποιο τρόπο και αν είναι διατυπωμένες) είναι προτάσεις Horn και ποιες όχι; Αυτές που δεν είναι, γιατί δεν είναι; Ποιες από τις προτάσεις Horn είναι οριστικές προτάσεις και ποιες οριστικοί στόχοι; Από τις οριστικές προτάσεις, είναι κάποιες μοναδιαίες;

Άσκηση 7.2

Έστω ότι, για μια γλώσσα πρώτης τάξης, έχουμε σύνολο μεταβλητών το $V = \{x, y\}$, συναρτησιακών συμβόλων το $F = \{liz/0, mother\_of/1\}$ και κατηγορημάτων το $P = \{alive/1\}$. Ποιο είναι το σύνολο των βασικών όρων που μπορούμε να έχουμε στη γλώσσα αυτή; Ποιο είναι το σύνολο των βασικών ατόμων; (Θυμηθείτε τον Ορισμό 7.3.) Γράψτε πέντε τύπους της γλώσσας που ορίζεται από τα προηγούμενα σύνολα.

7.2 Ενοποίηση

Από τα βασικά «εργαλεία» που είναι απαραίτητα για να περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί στη λογική πρώτης τάξης να παραχθεί νέα γνώση από ήδη υπάρχουσα, δηλαδή να κατασκευαστεί ένας νέος τύπος από άλλους τύπους λογικής πρώτης τάξης, είναι η διαδικασία της **ενοποίησης**. Για να περιγράψουμε αυτόν το μηχανισμό, πρέπει να δώσουμε πρώτα κάποιους απαιτούμενους ορισμούς.

Ορισμός 7.15

Μια **αντικατάσταση** θ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο $\{v_1/t_1, v_2/t_2, \ldots, v_n/t_n\}$, όπου τα v_i είναι μεταβλητές και τα t_i είναι όροι ($1 \leq i \leq n$), κάθε t_i είναι διαφορετικό από το αντίστοιχο v_i και όλα τα v_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Ουσιαστικά, μια αντικατάσταση ορίζει ότι τα v_i είναι δεσμευμένα (έχουν πάρει τιμές) με τα αντίστοιχα t_i. Η **κενή αντικατάσταση** ορίζεται από το κενό σύνολο.

Ορισμός 7.16

Αν E είναι όρος ή πρόταση, τότε το $E\theta$ ονομάζεται **στιγμιότυπο** του E, μέσω της αντικατάστασης $\theta = \{v_1/t_1, v_2/t_2, \ldots, v_n/t_n\}$, αν στο E αντικατασταθούν ταυτόχρονα οι εμφανίσεις των μεταβλητών v_i με τα αντίστοιχα t_i.

Ορισμός 7.17

Αν E και F είναι όροι ή προτάσεις, τότε το E ονομάζεται **παραλλαγή** του F (ή το F παραλλαγή του E), αν υπάρχουν αντικαταστάσεις θ και σ, τέτοιες ώστε $E = F\theta$ και $F = E\sigma$.

□

Ουσιαστικά, κάποια E και F είναι παραλλαγές το ένα του άλλου, αν είναι ακριβώς τα ίδια, με εξαίρεση τα ονόματα των μεταβλητών τους.

Ορισμός 7.18

Αν $\theta = \{u_1/s_1, u_2/s_2, \ldots, u_m/s_m\}$ και $\sigma = \{v_1/t_1, v_2/t_2, \ldots, v_n/t_n\}$ είναι δύο αντικαταστάσεις, τότε η **σύνθεσή** τους $\theta\sigma$ είναι η αντικατάσταση:

$$\{u_1/s_1\sigma, u_2/s_2\sigma, \ldots, u_m/s_m\sigma, v_1/t_1, v_2/t_2, \ldots, v_n/t_n\}$$

διαγράφοντας από αυτήν κάθε $u_i/s_i\sigma$ $(1 \leq i \leq m)$ για το οποίο $u_i = s_i\sigma$ και κάθε v_j/t_j $(1 \leq j \leq n)$ για το οποίο $v_j \in \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$.

Ορισμός 7.19

Αν E και F είναι όροι ή άτομα, τότε μια αντικατάσταση θ ονομάζεται **ενοποιητής**, για τα E και F, αν $E\theta = F\theta$. Η θ είναι ο **γενικότερος ενοποιητής**, για τα E και F (συμβολικά $mgu(E, F)$), αν για κάθε ενοποιητή σ των E και F, υπάρχει αντικατάσταση γ, τέτοια ώστε $\sigma = \theta\gamma$. Η διαδικασία υπολογισμού ενός $mgu(E, F)$ ονομάζεται *ενοποίηση*.

□

Αλγόριθμος ενοποίησης όρων ή ατόμων **E** *και* **F**

Βήμα 1: *Αρχικοποιήστε τη στοίβα ζευγαριών όρων ή ατόμων προς ενοποίηση* **S** *με το ζευγάρι* **(E,F)**.

Βήμα 2: *Αρχικοποιήστε τον γενικότερο ενοποιητή* **MGU** *με την κενή αντικατάσταση.*

Βήμα 3: *Αν η στοίβα* **S** *είναι κενή, τερματίστε με επιτυχία δίνοντας ως γενικότερο ενοποιητή των* **E** *και* **F** *το* **MGU**.

Βήμα 4: *Βγάλτε από την* **S** *το πρώτο ζευγάρι* **(A,B)**.

Βήμα 5: *Αν το* **A** *είναι μεταβλητή που δεν περιέχεται στο* **B**, *αντικαταστήστε μέσα στη στοίβα* **S** *και στον γενικότερο ενοποιητή* **MGU** *όλες τις εμφανίσεις του* **A** *με το* **B**, *προσθέστε στο* **MGU** *τη δέσμευση* **A/B** *και πηγαίνετε στο βήμα 3.*

Βήμα 6: *Αν το* **B** *είναι μεταβλητή που δεν περιέχεται στο* **A**, *τότε αντικαταστήστε μέσα στη στοίβα* **S** *και στον γενικότερο ενοποιητή* **MGU** *όλες τις εμφανίσεις του* **B** *με το* **A**, *προσθέστε στο* **MGU** *τη δέσμευση* **B/A** *και πηγαίνετε στο βήμα 3.*

Βήμα 7: *Αν τα* **A** *και* **B** *είναι ίδιες μεταβλητές ή ίδιες σταθερές, τότε πηγαίνετε στο βήμα 3.*

Βήμα 8: *Αν το* **A** *είναι ο όρος ή το άτομο* $\mathbf{f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$ *και το* **B** *είναι ο όρος ή το άτομο* $\mathbf{f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)}$, *όπου το* **f** *είναι συναρτησιακό σύμβολο ή κατηγόρημα βαθμού n, τότε προσθέστε στη στοίβα* **S** *όλα τα ζευγάρια* $\mathbf{(X_i,Y_i)}$, *για κάθε i με $1 \leq i \leq n$, και πηγαίνετε στο βήμα 3.*

Βήμα 9: *Αλλιώς, τερματίστε με αποτυχία, επισημαίνοντας ότι δεν υπάρχει ενοποιητής των* **E** *και* **F**.

Παράδειγμα 7.10

Δείτε μερικές περιπτώσεις ζευγαριών όρων ή ατόμων και τους γενικότερους ενοποιητές τους, όταν υπάρχουν.

Τα σύμβολα *x*, *y*, *z* στο παράδειγμα αυτό είναι μεταβλητές. Οτιδήποτε άλλο είναι είτε συναρτησιακό σύμβολο είτε κατηγόρημα, αλλά δεν μας ενδιαφέρει τι ακριβώς, για το σκοπό του παραδείγματος.

	E	F	$mgu(E,F)$
1	x	$john$	$\{x/john\}$
2	$house\_of(mary)$	x	$\{x/house\_of(mary)\}$
3	$lawyer(y)$	$lawyer(jack)$	$\{y/jack\}$
4	x	y	$\{x/y\}$
5	$likes(john,x)$	$likes(x,mary)$	$\nexists\, mgu$
6	$hates(y,z)$	$hates(z,ann)$	$\{y/ann,\ z/ann\}$
7	$likes(x,house\_of(x))$	$likes(y,y)$	$\nexists\, mgu$
8	$.(a,.(b,.(c,.(d,[]))))$	$.(x,.(y,z))$	$\{x/a,\ y/b,\ z/.(c,.(d,[]))\}$

Όπου στην τρίτη στήλη υπάρχει το $\nexists$ *mgu*, αυτό σημαίνει ότι τα *E* και *F* δεν ενοποιούνται. Ας πούμε όμως δύο λόγια για την περίπτωση 7, επειδή είναι λίγο ιδιόρρυθμη. Εδώ, τα *E* και *F* δεν ενοποιούνται, γιατί, αφού γίνει η ενοποίηση των πρώτων ορισμάτων των *likes*/2 και προστεθεί στο γενικότερο ενοποιητή η δέσμευση *x*/*y*, θα πρέπει στη συνέχεια να ενοποιηθούν το *house_of* (*y*) με το *y*. Αυτό όμως δεν μπορεί να γίνει, γιατί το μόνο υποψήφιο βήμα στον αλγόριθμο ενοποίησης που δώσαμε είναι το βήμα 6, αλλά και αυτό δεν επιτρέπει την ενοποίηση, επειδή η μεταβλητή *y* περιέχεται στο *house_of* (*y*). Έτσι, αναγκαστικά ο αλγόριθμος καταλήγει στο βήμα 9, με συνέπεια να μην μπορεί να βρεθεί, σωστά, γενικότερος ενοποιητής. Αυτή η παρεμπόδιση της ενοποίησης μιας μεταβλητής με έναν όρο που την περιέχει ονομάζεται **έλεγχος εμφάνισης**, και είναι πολύ κρίσιμο να εξασφαλίζεται από συστήματα που χρησιμοποιούν διαδικασίες ενοποίησης. Επειδή όμως έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος, συνήθως παραλείπεται, όπως συμβαίνει στους αλγορίθμους ενοποίησης των περισσότερων συστημάτων Prolog.

Άσκηση 7.3

Αν *V* = {*u*, *v*, *w*, *x*, *y*, *z*, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8} και *F* = {*f* /2, *g*/2, *h*/3, *j*/2, *k*/4, *m*/2, *n*/1, *a*/0, *b*/0}, βρείτε τους γενικότερους ενοποιητές των όρων *E* και *F* του επόμενου πίνακα:

	E	F
1	$f(n(v),m(u,v))$	$f(n(w),m(w,j(x,y)))$
2	$f(n(v),m(u,v))$	$f(n(w),m(w,j(x,u)))$
3	$f(x,f(u,x))$	$f(f(y,a),f(z,f(b,z)))$
4	$k(h(x_1,x_2,x_3),h(x_6,x_7,x_8),x_3,x_6)$	$k(h(g(x_4,x_5),x_1,x_2),h(x_7,x_8,x_6),g(x_5,a),x_5)$
5	$k(x_1,g(x_2,x_3),x_2,b)$	$k(g(m(a,x_5),x_2),x_1,m(a,x_4),x_4)$
6	$j(f(x,g(x,y)),m(z,y))$	$j(z,m(f(u,v),f(a,b)))$

7.3 Αρχή της ανάλυσης

Για να έχει πρακτική χρησιμότητα η λογική πρώτης τάξης, εκτός από αυτήν της αναπαράστασης γνώσης, πιο συγκεκριμένα, για να μπορεί να παράγεται νέα γνώση από ήδη υπάρχουσα, πρέπει να εφοδιαστεί με **κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων** ή, αλλιώς, **κανόνες συμπερασμού**. Ένας κανόνας συμπερασμού παρέχει το μέσο με το οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν νέο τύπο από δύο ή περισσότερους άλλους τύπους. Ο βασικός κανόνας συμπερασμού που υπάρχει στη λογική πρώτης τάξης είναι η **αρχή της ανάλυσης**, την οποία θα περιγράψουμε σε αυτήν την ενότητα.

Η αρχή της ανάλυσης είναι ένας κανόνας συμπερασμού, με τη βοήθεια του οποίου, από δύο προτάσεις *C*1 και *C*2, παράγεται μια τρίτη πρόταση *C*. Συμβολικά, γράφουμε:

$$\{C_1, C_2\} \vdash C$$

Συγκεκριμένα, αν η πρόταση C_1 είναι η:

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \leftarrow b_1, b_2, \ldots, b_n$$

και η πρόταση C_2 είναι η:

$$d_1, d_2, \ldots, d_l \leftarrow e_1, e_2, \ldots, e_m$$

και οι στοιχειώδεις τύποι a_i (για κάποιο i με $1 \leq i \leq k$) στην κεφαλή της C_1 και e_j (για κάποιο j με $1 \leq j \leq m$) στο σώμα της C_2 έχουν γενικότερο ενοποιητή το σ, δηλαδή $\sigma = mgu(a_i, e_j)$, τότε η παραγόμενη πρόταση C είναι η:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k, d_1, d_2, \ldots, d_l \leftarrow$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n, e_1, e_2, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_m)\sigma$$

ή, με έναν καθιερωμένο συμβολισμό, η:

Αρχή της ανάλυσης

Αν $\sigma = mgu(a_i, e_j)$

$$\begin{array}{rcl} a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k & \leftarrow & b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n \\ d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_l & \leftarrow & e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_m \\ \hline (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{i-1},\ a_{i+1},\ \ldots,\ a_k,\ d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_l & \leftarrow & \\ \multicolumn{3}{r}{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_{j-1},\ e_{j+1},\ \ldots,\ e_m)\sigma} \end{array}$$

Παράδειγμα 7.11

Εδώ έχουμε μια περίπτωση εφαρμογής της αρχής της ανάλυσης:

$$\begin{array}{rcl} healthy(x),\ wealthy(x) & \leftarrow & happy(x) \\ & \leftarrow & wealthy(jim) \\ \hline healthy(jim) & \leftarrow & happy(jim) \end{array}$$

Απλώς, απαλείψαμε το άτομο *wealthy*(*x*) από την κεφαλή της πρώτης πρότασης και το άτομο *wealthy*(*jim*) από το σώμα της δεύτερης πρότασης, εφαρμόζοντας και τον γενικότερο ενοποιητή τους $\sigma = \{x/jim\}$ στην πρόταση που προέκυψε με τα άτομα τα οποία απέμειναν.

□

Όταν εφαρμόζεται η αρχή της ανάλυσης σε προτάσεις Horn, έχουμε μια ειδική μορφή της, τον κανόνα συμπερασμού **modus ponens**. Έτσι, η διατύπωση της αρχής της ανάλυσης, για $k = 1$ και $l = 1$, γίνεται:

Modus ponens

Αν $\sigma = mgu(a, e_j)$

$$\begin{array}{rcl} a & \leftarrow & b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n \\ d & \leftarrow & e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_m \\ \hline (d & \leftarrow & b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_{j-1},\ e_{j+1},\ \ldots,\ e_m)\sigma \end{array}$$

Παράδειγμα 7.12

Εδώ έχουμε μια περίπτωση εφαρμογής του modus ponens:

$$\begin{array}{rcl} parent(john, nick) & \leftarrow & \\ grandparent(x, z) & \leftarrow & parent(x, y),\ parent(y, z) \\ \hline grandparent(john, z) & \leftarrow & parent(nick, z) \end{array}$$

Απαλείψαμε το μοναδικό άτομο της κεφαλής της πρώτης πρότασης και το πρώτο άτομο *parent*(*x, y*) του σώματος της δεύτερης πρότασης, και στην πρόταση που προέκυψε εφαρμόσαμε τον γενικότερο ενοποιητή $\sigma = \{x/john, y/nick\}$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να συνδυάσουμε το *parent*(*john, nick*), αλλά τώρα με το δεύτερο άτομο του σώματος της δεύτερης πρότασης *parent*(*y, z*). Οπότε, ο γενικότερος ενοποιητής τους θα ήταν ο $\sigma = \{y/john, z/nick\}$, και θα είχαμε:

$$\begin{array}{rcl} parent(john, nick) & \leftarrow & \\ grandparent(x, z) & \leftarrow & parent(x, y),\ parent(y, z) \\ \hline grandparent(x, nick) & \leftarrow & parent(x, john) \end{array}$$

Εν γένει, όταν έχουμε ένα σύνολο από προτάσεις στη λογική πρώτης τάξης, οι πιθανές εφαρμογές ενός κανόνα συμπερασμού μπορούν να είναι πάρα πολλές.

□

Όπως θα δούμε στην Ενότητα 8.3, στον λογικό προγραμματισμό, οι απαντήσεις ερωτήσεων που υποβάλλονται σε οριστικά προγράμματα υπολογίζονται με τη βοήθεια μιας εξειδίκευσης του κανόνα modus ponens, που είναι ο κανόνας συμπερασμού της **SLD-ανάλυσης**, ο οποίος εφαρμόζεται σε μια οριστική πρόταση και σε έναν οριστικό στόχο, δηλαδή σε προτάσεις Horn. Ειδικότερα, στη γλώσσα προγραμματισμού Prolog, η SLD-ανάλυση εφαρμόζεται με τέτοιον τρόπο ώστε το άτομο του οριστικού στόχου e_j που απαλείφεται με την κεφαλή *a* της οριστικής πρότασης να είναι πάντοτε το αριστερότερο άτομο του στόχου, δηλαδή να έχουμε $j = 1$.

Άσκηση 7.4

Δίνονται οι εξής προτάσεις λογικής πρώτης τάξης:

$$\begin{array}{rcll} pink(sam) & \leftarrow & & (7.1) \\ & \leftarrow & grey(x_1),\ pink(y_1),\ likes(x_1, y_1) & (7.2) \\ likes(oscar, sam) & \leftarrow & & (7.3) \\ pink(oscar),\ grey(oscar) & \leftarrow & & (7.4) \\ & \leftarrow & grey(x_2),\ pink(y_2),\ likes(x_2, y_2) & (7.5) \\ likes(clyde, oscar) & \leftarrow & & (7.6) \\ grey(clyde) & \leftarrow & & (7.7) \end{array}$$

Μπορείτε να προχωρήσετε σε μια σειρά από εφαρμογές της αρχής της ανάλυσης μεταξύ αυτών των προτάσεων, αλλά και όσων θα παραγάγετε από τις εφαρμογές αυτές, έτσι ώστε να προκύψει τελικά η κενή πρόταση;

Απαντήσεις ασκήσεων

Απάντηση άσκησης 7.1

Το σύνολο των συναρτησιακών συμβόλων για τους τύπους της εκφώνησης θα πρέπει να είναι το $F = \{greece/0, john/0, mary/0, ./2, []/0\}$ και το σύνολο των κατηγορημάτων θα πρέπει να είναι το $P = \{borders/2, man/1, woman/1, loves/2, may\_steal/2, likes/2, thief/1, connected/2, on\_diet/1, athlete/1, fit/1, father/2, male/1, parent/2, append/3\}$.

Κλειστοί τύποι είναι οι 2, 3, 5, 6, 7 και 8. Δεν είναι κλειστοί οι 1 και 4, ο 1 γιατί περιέχει την ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής x και ο 4 γιατί έχει όλες τις μεταβλητές του (x, y και z) σε ελεύθερη εμφάνιση. Προσέξτε, οι τύποι 5 και 7 είναι κλειστοί, παρότι, με πρώτη ματιά, ίσως να φαίνεται ότι έχουν ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών. Δεν είναι όμως έτσι. Απλώς, είναι προτάσεις γραμμένες στη συντομευμένη μορφή τους, όπου δεν αναφέρονται οι καθολικοί ποσοδείκτες για τις μεταβλητές, όμως ουσιαστικά υπάρχουν, και όλες οι εμφανίσεις μεταβλητών είναι δεσμευμένες. Συνεπώς, οι τύποι είναι κλειστοί.

Οι τύποι 3, 6 και 8 είναι προτάσεις διατυπωμένες με τον κλασικό τρόπο της λογικής πρώτης τάξης (διάζευξη στοιχειωδών τύπων με καθολική ποσοτικοποίηση στις μεταβλητές τους, εφόσον υπάρχουν). Με τον εναλλακτικό απλουστευμένο τρόπο, θα μπορούσαν να διατυπωθούν, αντίστοιχα, ως εξής:

$may\_steal(x, y) \leftarrow likes(x, y), thief(x)$
$\leftarrow loves(john, mary), loves(mary, john)$
$append(.(a, []), .(b, []), .(a, .(b, []))) \leftarrow$

Οι τύποι 5 και 7 είναι προτάσεις ήδη διατυπωμένες με τον εναλλακτικό τρόπο.

Από τους τύπους 3, 5, 6, 7 και 8, που είναι προτάσεις, διατυπωμένες είτε με τον κλασικό τρόπο είτε με τον εναλλακτικό, μόνο οι 3, 6, 7 και 8 είναι προτάσεις Horn. Η 5 δεν είναι πρόταση Horn, γιατί στην κεφαλή της έχει δύο άτομα.

Από τους τύπους 3, 6, 7 και 8, που είναι προτάσεις Horn, οι 3, 7 και 8 είναι οριστικές προτάσεις, ενώ η 6 είναι οριστικός στόχος. Η 8 είναι μοναδιαία οριστική πρόταση.

Απάντηση άσκησης 7.2

Αν η γλώσσα πρώτης τάξης για την οποία συζητάμε είναι το σύνολο L, τότε το σύνολο των βασικών όρων είναι το:

$$U_L = \{liz, mother\_of(liz), mother\_of(mother\_of(liz)), \ldots\}$$

ενώ το σύνολο των βασικών ατόμων είναι το:

$$B_L = \{alive(liz), alive(mother\_of(liz)), alive(mother\_of(mother\_of(liz))), \ldots\}$$

Στη γλώσσα L περιλαμβάνονται, μεταξύ άλλων, οι εξής τύποι:

$alive(mother\_of(liz))$
$(\exists x)(alive(mother\_of(mother\_of(x))))$
$(\forall y)(alive(mother\_of(y)) \rightarrow alive(y))$
$(\exists x)(\exists y)(\neg alive(x) \vee \neg alive(mother\_of(x)))$
$(\forall x)(alive(x)) \rightarrow alive(liz)$

Απάντηση άσκησης 7.3

Οι γενικότεροι ενοποιητές των όρων E και F, που δόθηκαν στην εκφώνηση της άσκησης, φαίνονται στη συνέχεια:

	$mgu(E,F)$
1	$\{u/j(x,y),\ v/j(x,y),\ w/j(x,y)\}$
2	$\nexists\ mgu$
3	$\{u/a,\ x/f(b,a),\ y/b,\ z/a\}$
4	$\{x_1/g(a,a),\ x_2/g(a,a),\ x_3/g(a,a),\ x_4/a,\ x_5/a,\ x_6/a,\ x_7/a,\ x_8/a\}$
5	$\{x_1/g(m(a,b),m(a,b)),\ x_2/m(a,b),\ x_3/m(a,b),\ x_4/b,\ x_5/b\}$
6	$\{v/g(u,f(a,b)),\ x/u,\ y/f(a,b),\ z/f(u,g(u,f(a,b)))\}$

Ο λόγος για τον οποίο δεν υπάρχει γενικότερος ενοποιητής στην περίπτωση 2 είναι ο έλεγχος εμφάνισης. Συγκεκριμένα, η ενοποίηση αποτυγχάνει, επειδή γίνεται απόπειρα να ενοποιηθούν το *w* με το *j*(*x, w*).

Απάντηση άσκησης 7.4

Ο απλούστερος τρόπος να προκύψει τελικά η κενή πρόταση, έπειτα από διαδοχικές εφαρμογές της αρχής της ανάλυσης στις προτάσεις που δόθηκαν, είναι να συνδυάσουμε τις (7.1) και (7.2), το αποτέλεσμα με την (7.3), το αποτέλεσμα με την (7.4) κ.ο.κ. Έτσι, θα έχουμε:

$$
\begin{array}{llrlr}
(7.1) & \overset{(7.2)}{\Rightarrow} & & \leftarrow\ grey(x_1),\ likes(x_1, sam) & \sigma_1 = \{y_1/sam\} \\
 & \overset{(7.3)}{\Rightarrow} & & \leftarrow\ grey(oscar) & \sigma_2 = \{x_1/oscar\} \\
 & \overset{(7.4)}{\Rightarrow} & pink(oscar) & \leftarrow & \sigma_3 = \{\ \} \\
 & \overset{(7.5)}{\Rightarrow} & & \leftarrow\ grey(x_2),\ likes(x_2, oscar) & \sigma_4 = \{y_2/oscar\} \\
 & \overset{(7.6)}{\Rightarrow} & & \leftarrow\ grey(clyde) & \sigma_5 = \{x_2/clyde\} \\
 & \overset{(7.7)}{\Rightarrow} & & \leftarrow & \sigma_6 = \{\ \}
\end{array}
$$

Προβλήματα

Πρόβλημα 7.1

Διατυπώστε σε λογική πρώτης τάξης πέντε από τους κανόνες Prolog που αναφέρονται στην Ενότητα 3.1, είτε στα παραδείγματα είτε στις ασκήσεις.

Πρόβλημα 7.2

Γιατί πιστεύετε ότι στον αλγόριθμο ενοποίησης δεν επιτρέπεται να γίνει δέσμευση μεταβλητής σε μια τιμή που περιέχει τη μεταβλητή αυτή;

Πρόβλημα 7.3

Δίνονται οι εξής προτάσεις λογικής πρώτης τάξης:

$$
\begin{array}{rcl}
append([], L, L) & \leftarrow & \\
append(.(X, L1), L2, .(X, L3)) & \leftarrow & append(L1, L2, L3) \\
 & \leftarrow & append(.(a, .(b, .(c, []))), .(d, []), .(a, .(b, .(c, .(d, []))))))
\end{array}
$$

Μπορείτε να προχωρήσετε σε μια σειρά από εφαρμογές της αρχής της ανάλυσης μεταξύ αυτών των προτάσεων, αλλά και όσων θα παραγάγετε από τις εφαρμογές αυτές, έτσι ώστε να προκύψει τελικά η κενή πρόταση;

Βιβλιογραφικές αναφορές

[1] Γ. Μητακίδης, *Απο τη Λογική στο Λογικό Προγραμματισμό και την Prolog*, Καρδαμίτσας, 1992.

[2] K. Doets, *From Logic to Logic Programming*, The MIT Press, 1994.

[3] J. W. Lloyd, *Foundations of Logic Programming*, Springer-Verlag, 1993.

[4] J. A. Robinson, Logic and Logic Programming, *CACM*, pp. 35(3), 40-65, 1992.

[5] L. Sterling and E. Shapiro, *The Art of Prolog*, The MIT Press, 1994.