

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Σκοπός του κεφαλαίου είναι να παρουσιάσει μερικές εφαρμογές του Μετασχηματισμού Fourier (MF). Ειδικότερα, στο κεφάλαιο αυτό θα περιγραφούν έμμεσοι τρόποι υπολογισμού του αντίστροφου MF, τρόποι οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι, αν η μορφή του MF δεν είναι απλή. Σε αυτή την περίπτωση, ο απευθείας υπολογισμός του αντίστροφου με την εξίσωση σύνθεσης γίνεται μία δύσκολη διαδικασία. Επίσης, θα περιγραφεί μία εύκολη μέθοδος εύρεσης της απόκρισης συχνότητας, της κρουστικής απόκρισης και της εξόδου ενός συστήματος, του οποίου γνωρίζουμε τη διαφορική εξίσωση που συσχετίζει τα σήματα εισόδου-εξόδου του συστήματος.

#### Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 3 ορίσαμε το MF, ο οποίος παρέχει τη δυνατότητα μετάβασης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο συχνότητας. Ο MF της συνέλιξης δύο σημάτων υπολογίζεται με ένα απλό γινόμενο των αντίστοιχων μετασχηματισμών. Με τον τρόπο αυτό, υπολογίζεται πρώτα ο MF της εξόδου και στη συνέχεια, με έναν αντίστροφο MF, προσδιορίζεται η έξοδος του συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν μερικές ακόμα εφαρμογές του MF στη μελέτη γραμμικών συστημάτων.

#### 4.1 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική του απόκριση,  $h(t)$ , και ότι η είσοδος,  $x(t)$ , και η έξοδος,  $y(t)$ , του ΓΧΑ συστήματος συνδέονται με το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \star h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier  $H(\omega)$ , της κρουστικής απόκρισης  $h(t)$ , όπως έχουμε δει στην Ενότητα 2.5, αποτελεί την απόκριση συχνότητας του συστήματος και δίνεται ως

το πηλίκο των μετασχηματισμών Fourier εισόδου-εξόδου, ως εξής

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (4.1.2)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $H(\omega)$  μπορεί να βρεθεί είτε υπολογίζοντας το μετασχηματισμό Fourier της  $h(t)$ , αφού πρώτα υπολογιστεί η  $h(t)$ , είτε ως πηλίκο των μετασχηματισμών Fourier εισόδου-εξόδου. Ο δεύτερος τρόπος υπολογισμού της  $H(\omega)$  είναι σαφώς ευκολότερος του πρώτου και για το λόγο αυτό ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη γραμμικών συστημάτων.

#### 4.1.1 Η απόκριση συχνότητας για συστήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Στο Κεφάλαιο 2 ορίσαμε ως σύστημα την οντότητα εκείνη η οποία μετατρέπει μια φυσική ποσότητα που περιγράφεται από το σήμα εισόδου  $x(t)$  σε μια άλλη που περιγράφεται από το σήμα εξόδου  $y(t)$ . Η διαδικασία αυτή μετασχηματισμού εκφράζεται με τη βοήθεια μίας διαφορικής εξίσωσης που συσχετίζει τα σήματα εισόδου-εξόδου. Όταν το σύστημα είναι γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο, όπως έχουμε στα Παραδείγματα 2.1.1 και 2.1.2, η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή έχει τη γενική μορφή

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (4.1.3)$$

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο προσδιορίζουμε την απόκριση συχνότητας  $H(\omega)$  από την (4.1.3) με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier και των ιδιοτήτων του. Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της εξίσωσης (4.1.3) και παίρνουμε

$$\mathcal{F} \left[ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right] = \mathcal{F} \left[ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]$$

Λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας, που χαρακτηρίζει το μετασχηματισμό Fourier, έχουμε

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F} \left[ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right] = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F} \left[ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]$$

λόγω της ιδιότητας της διαφορίσης, έχουμε την εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

ή ισοδύναμα

$$Y(\omega) \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k = X(\omega) \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k$$

και λόγω της (4.1.2), έχουμε

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \quad (4.1.4)$$

Παρατηρούμε τα εξής

- Η απόκριση συχνότητας  $H(\omega)$ , ενός ΓΧΑ συστήματος είναι μία ρητή συνάρτηση, δηλαδή μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο πολυωνύμων της μεταβλητής  $(j\omega)$ .
- Στον υπολογισμό της απόκρισης συχνότητας του συστήματος δεν υπαισέρχονται οι αρχικές συνθήκες στις οποίες βρίσκεται το σύστημα, σε αντίθεση με τη λύση της (4.1.3), η οποία εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier προϋποθέτει έναρξη της διαδικασίας στο  $-\infty$ , που είναι το κάτω όριο του ολοκληρώματος στον τύπο ορισμού του (3.3.14) και από σύμβαση δεχόμαστε ότι στο  $-\infty$  οι αρχικές συνθήκες είναι πάντα μηδέν.

#### Παράδειγμα 4.1.1 (Σύστημα πρώτης τάξης).

Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος πρώτης τάξης, το οποίο, όπως είναι γνωστό, περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t), \quad a > 0 \quad (4.1.5)$$

**Λύση** Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της εξίσωσης, λόγω των ιδιοτήτων της γραμμικότητας και διαφόρισης, έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[ \frac{dy(t)}{dt} \right] + \mathcal{F} [ay(t)] &= \mathcal{F} [bx(t)] \\ (j\omega)Y(\omega) + aY(\omega) &= bX(\omega) \\ H(\omega) &= \frac{b}{j\omega + a} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε το θεώρημα της συνέλιξης  $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$  Στο Παράδειγμα 3.3.3 έχουμε δείξει

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (4.1.7)$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση του συστήματος πρώτης τάξης είναι

$$h(t) = be^{-at}u(t) \quad (4.1.8)$$

## 4.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Είναι προφανές ότι, αν γνωρίζουμε την απόκριση συχνότητας ενός συστήματος, τότε με τη βοήθεια της (3.3.13), η οποία περιγράφει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, μπορούμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Αν η μορφή της  $H(\omega)$  δεν είναι απλή, τότε ο απευθείας υπολογισμός της  $h(t)$  από την (3.3.13) μπορεί να αποδειχθεί μία επίπονη διαδικασία. Για το λόγο αυτό, συνήθως, ακολουθούνται έμμεσοι τρόποι υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier. Αν η  $H(\omega)$  έχει απλή μορφή, όπως στο Παράδειγμα 4.1.1, είναι δυνατόν με τη βοήθεια του Πίνακα 3.3 να προσδιορίζουμε εύκολα την κρουστική απόκριση του συστήματος. Γενικότερα, αν η απόκριση συχνότητας μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα επιμέρους στοιχειωδών όρων, τότε με τη βοήθεια του Πίνακα 3.3 και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Fourier μπορούμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Στο Παράρτημα Β περιγράφεται η διαδικασία ανάπτυξης μίας ρητής συνάρτησης, σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Παρακάτω εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία αυτή σε ένα παράδειγμα.

### Παράδειγμα 4.2.1 (Σύστημα δεύτερης τάξης).

Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα δεύτερης τάξης, το οποίο αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία, και χαρακτηρίζεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) \quad (4.2.1)$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

**Λύση** Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της εξίσωσης (4.2.1) και με τη βοήθεια της ιδιότητας της γραμμικότητας και της διαφορίσης, που έχει ο μετασχηματισμός Fourier, βρίσκουμε ότι η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} \quad (4.2.2)$$

Αναλύουμε τα πολυώνυμα του αριθμητή και του παρανομαστή σε γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή δεύτερου βαθμού ως προς  $(j\omega)$  και στη συνέχεια αναπτύσσουμε την απόκριση συχνότητας σε απλά κλάσματα. Έτσι, παίρνουμε

$$H(\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} = \frac{C_1}{j\omega + 1} + \frac{C_2}{j\omega + 3}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις σταθερές  $C_1$  και  $C_2$

$$C_1 = [(j\omega + 1)H(\omega)]|_{j\omega=-1} = \left. \frac{j\omega + 2}{j\omega + 3} \right|_{j\omega=-1} = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = [(j\omega + 3)H(\omega)]|_{j\omega=-3} = \left. \frac{j\omega + 2}{j\omega + 1} \right|_{j\omega=-3} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$$

Επομένως, η απόκριση συχνότητας παίρνει τη μορφή

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega + 3} \quad (4.2.3)$$

Με τη βοήθεια της ιδιότητας της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier και της (4.1.7), η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-3t} u(t) \quad (4.2.4)$$

### Παράδειγμα 4.2.2

Αν η είσοδος του συστήματος στο Παράδειγμα 4.2.1 είναι

$$x(t) = e^{-t} u(t) \quad (4.2.5)$$

να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος.

**Λύση** Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εισόδου  $x(t) = e^{-t} u(t)$  είναι  $X(\omega) = 1/(j\omega + 1)$ . Με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης, ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου είναι

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \left[ \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \right] \left[ \frac{1}{j\omega + 1} \right] = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)}$$

Στην περίπτωση αυτή η ανάπτυξη σε απλά κλάσματα του  $Y(\omega)$  έχει τη μορφή

$$Y(\omega) = \frac{C_{11}}{j\omega + 1} + \frac{C_{12}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{C_{21}}{j\omega + 3}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις σταθερές  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  και  $C_{21}$

$$C_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{d(j\omega)} [(j\omega + 1)^2 Y(\omega)] \Big|_{j\omega=-1} = \frac{d}{d(j\omega)} \left[ \frac{j\omega + 2}{j\omega + 3} \right] \Big|_{j\omega=-1} \Rightarrow C_{11} = \frac{1}{4}$$

$$C_{12} = [(j\omega + 1)^2 Y(\omega)] \Big|_{j\omega=-1} = \frac{j\omega + 2}{j\omega + 3} \Big|_{j\omega=-1} \Rightarrow C_{12} = \frac{1}{2}$$

$$C_{21} = [(j\omega + 3)Y(\omega)] \Big|_{j\omega=-3} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2} \Big|_{j\omega=-3} \Rightarrow C_{21} = -\frac{1}{4}$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου παίρνει τη μορφή

$$Y(\omega) = \frac{1}{4} \frac{1}{j\omega + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(j\omega + 1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{j\omega + 3} \quad (4.2.6)$$

Αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα της διαφορίσης στην (4.1.7) στο πεδίο συχνοτήτων, έχουμε

$$\begin{aligned} t \cdot x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{X(\omega)}{d\omega} \\ t \cdot e^{-at} u(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(j\omega + a)^2} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, της ιδιότητας της γραμμικότητας, της (4.1.7) και της (4.2.7) βρίσκουμε ότι η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = \left[ \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \right] u(t) \quad (4.2.8)$$

Πρέπει να τονιστεί στα Παραδείγματα 4.2.1 και 4.2.2 ότι, αν ζητείται μόνο η  $y(t)$  και όχι η  $Y(\omega)$ , τότε ο ευκολότερος τρόπος εύρεσής της είναι η απευθείας επίλυση της διαφορικής εξίσωσης.

**Παράδειγμα 4.2.3** (Προσδιορισμός συστήματος από την είσοδό του και έξοδό του).

Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος σε σήμα εισόδου  $x(t) = e^{-2t}u(t)$  είναι  $y(t) = e^{-t}u(t)$ . Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος και η κρουστική απόκριση.

**Λύση** Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εισόδου  $x(t)$  είναι

$$X(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

και ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εξόδου  $y(t)$  είναι

$$Y(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος υπολογίζεται με τη βοήθεια της 4.1.2

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2 + j\omega}{1 + j\omega} \quad (4.2.9)$$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος γράφεται ως

$$H(\omega) = 1 + \frac{1}{1 + j\omega}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t) \quad (4.2.10)$$

Σημειώνεται ότι, όταν το σήμα εισόδου είναι σήμα μίας συχνότητας, θα πρέπει και το σήμα εξόδου να είναι σήμα της ίδιας συχνότητας και στην περίπτωση αυτή προσδιορίζεται μόνο η τιμή της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα του σήματος εισόδου.

### 4.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE

Από το θεώρημα της συνέλιξης γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της εισόδου  $X(\omega)$  και της εξόδου  $Y(\omega)$  ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος, το οποίο έχει απόκριση συχνότητας  $H(\omega)$ , συνδέονται με τη σχέση

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (4.3.1)$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου προκύπτει ως γινόμενο του μετασχηματισμού Fourier της εισόδου με την απόκριση συχνότητας. Από την (4.3.1) έχουμε για τα μέτρα και τις φάσεις των αντιστοιχών ποσοτήτων τις εξισώσεις

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| \cdot |X(\omega)| \text{ και } \arg Y(\omega) = \arg H(\omega) + \arg X(\omega) \quad (4.3.2)$$

Η αθροιστική μορφή της δεύτερης εξίσωσης επιτρέπει τον προσδιορισμό της γραφικής παράστασης της φάσης εξόδου με απλή πρόσθεση των γραφημάτων της φάσης εισόδου με τη φάση της απόκρισης συχνότητας. Για να πετύχουμε ανάλογη συμπεριφορά για το μέτρο, λογαριθμίζουμε την πρώτη εξίσωση και έχουμε

$$\log|Y(\omega)| = \log|H(\omega)| + \log|X(\omega)| \quad (4.3.3)$$

Συχνά, για τη γραφική αναπαράσταση του μέτρου, χρησιμοποιούμε λογαριθμική κλίμακα και ως μονάδα μέτρου το decibel (dB). Η κλίμακα των dB βασίζεται στην αντιστοιχία

$$\text{dB} = 20\log_{10}|H(\omega)| \quad (4.3.4)$$

Ενδεικτικά έχουμε τις ακόλουθες τιμές

$$\begin{aligned} 0 \text{ dB} & \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| = 1, \\ 20 \text{ dB} & \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| = 10, \quad -20 \text{ dB} \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| = 0,1 \\ 40 \text{ dB} & \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| = 100, \quad -40 \text{ dB} \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| = 0,01 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε επιπλέον ότι

$$1 \text{ dB} \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| \approx 1,12 \text{ και } 6 \text{ dB} \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| \approx 2$$

Διαγράμματα που απεικονίζουν τη φάση και το μέτρο σε dB, σε συνάρτηση με τη συχνότητα, ονομάζονται *διαγράμματα Bode*. Επειδή ο λογάριθμος εκτείνει την κλίμακα, η χρησιμοποίηση λογαριθμικής κλίμακας εξασφαλίζει καλύτερη ευκρίνεια όταν το εύρος των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει είναι μεγάλο ή περιορίζεται σε μικρές τιμές κοντά στο μηδέν. Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στο Παράδειγμα 4.3.1.

#### Παράδειγμα 4.3.1

Να υπολογιστεί η απόκριση του συστήματος πρώτης τάξης όταν η είσοδος είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

**Λύση** Ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου βήματος είναι (βλέπε Πίνακα 3.3)

$$U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (4.3.5)$$

Από το θεώρημα της συνέλιξης προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου είναι

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega) = \frac{b}{j\omega + \alpha} \left( \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right)$$

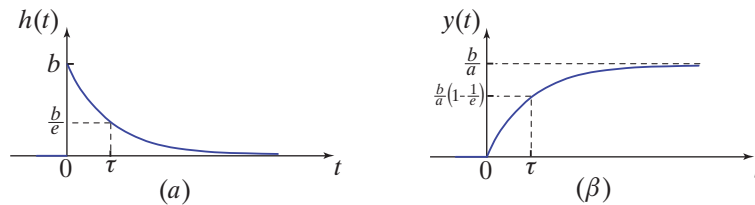
για  $\omega \neq 0$  επειδή  $\delta(\omega) = 0$ , έχουμε

$$Y(\omega) = \frac{b}{(j\omega + a)j\omega} = -\frac{b}{a} \frac{1}{j\omega + a} + \frac{b}{a} \frac{1}{j\omega}$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, της ιδιότητας της γραμμικότητας, της (4.1.7) και του μετασχηματισμού Fourier του μοναδιαίου βήματος υπολογίζουμε την έξοδο του συστήματος

$$y(t) = \left( \frac{b}{a} - \frac{b}{a} e^{-at} \right) u(t) \quad (4.3.6)$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος πρώτης τάξης και η απόκρισή του στο μοναδιαίο βήμα παριστάνονται γραφικά στο Σχήμα 4.1.



**Σχήμα 4.1** Απόκρισεις συστήματος πρώτης τάξης (α) κρουστική απόκριση (β) απόκριση στο μοναδιαίο βήμα.

Η ασυμπτωτική κατάσταση της απόκρισης στο μοναδιαίο βήμα είναι  $b/a$ . Η παράμετρος  $\tau = 1/a$  ονομάζεται *χρονική σταθερά* και σηματοδοτεί το ρυθμό με τον οποίο το σύστημα αποκρίνεται. Τη χρονική στιγμή  $t = \tau$ , η κρουστική απόκριση μειώνει την τιμή που είχε αρχικά  $1/e$  φορές, ενώ η απόκριση στο μοναδιαίο βήμα απέχει  $1/e$  φορές από την τελική της τιμή (Σχήμα 4.1). Παρατηρούμε ότι, καθώς  $a \rightarrow +\infty$ , η χρονική σταθερά μικραίνει και η πτωτική τάση της κρουστικής απόκρισης γίνεται πιο απότομη.

Η απόκριση συχνότητας, η κρουστική απόκριση και η απόκριση στο μοναδιαίο βήμα του συστήματος πρώτης τάξης, όταν  $a = b$ , είναι

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}, \quad h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \quad \text{και} \quad y(t) = \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t) \quad (4.3.7)$$

Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ή η απόκριση πλάτους του συστήματος είναι

$$|H(\omega)| = \sqrt{H(\omega)H^*(\omega)} = \sqrt{\frac{1}{j\omega\tau + 1} \frac{1}{-j\omega\tau + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \quad (4.3.8)$$

και σε dB

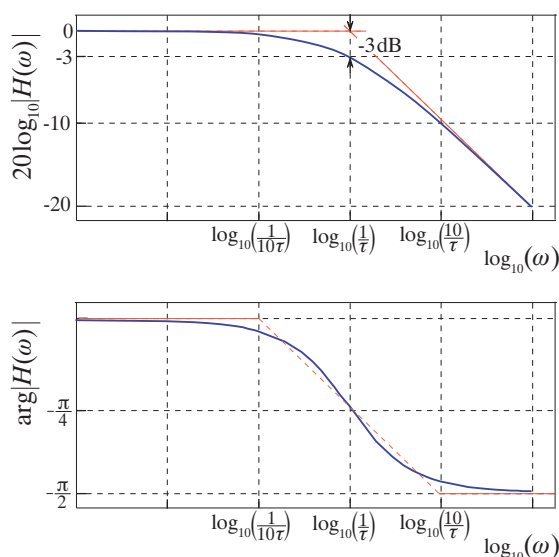
$$20\log_{10}|H(\omega)| = -10\log_{10}(1 + (\tau\omega)^2) \quad (4.3.9)$$

Παρατηρούμε ότι,



- Αν  $\omega\tau \ll 1$ , ισχύει  $\log_{10}(1 + (\tau\omega)^2) \approx \log_{10}1 = 0$ . Συνεπώς, στις χαμηλές συχνότητες το μέτρο σε dB της απόκρισης συχνότητας είναι περίπου μηδέν, εφόσον  $20\log_{10}|H(\omega)| \approx 0$  για  $\omega \ll 1/\tau$ .
- Αν  $\omega\tau \gg 1$ , ισχύει  $\log_{10}(1 + (\tau\omega)^2) \approx \log_{10}(\tau\omega)^2 = 2\log_{10}\tau + 2\log_{10}\omega$ . Συνεπώς, στις υψηλές συχνότητες το μέτρο σε dB προσεγγίζεται από γραμμική συνάρτηση του  $\log_{10}(\omega)$ , η οποία έχει κλίση -20,

$$20\log_{10}|H(\omega)| \approx -20\log_{10}\tau - 20\log_{10}\omega \text{ για } \omega \gg \frac{1}{\tau}$$



**Σχήμα 4.2** Τα διαγράμματα Bode του συστήματος πρώτης τάξεως.

Στο Σχήμα 4.2 φαίνονται τα διαγράμματα Bode συστήματος πρώτης τάξεως. Για το σημείο τομής των ασύμπτωτων ευθειών που προσεγγίζουν το μέτρο στις χαμηλές και υψηλές συχνότητες ισχύει  $\log_{10}(\omega) = -\log_{10}(\tau)$  και αντιστοιχεί στη συχνότητα  $\omega = 1/\tau$ . Στη συχνότητα αυτή το μέτρο σε dB είναι

$$20\log_{10} \left| H \left( \frac{1}{\tau} \right) \right| = -10\log_{10} \left[ \left( \frac{1}{\tau} \right)^2 + 1 \right] = -10\log_{10}(2) \approx -3\text{dB}$$

Για το λόγο αυτό, η κυκλική συχνότητα  $\omega = 1/\tau$  ονομάζεται *κυκλική συχνότητα -3 dB*. Γενικά, η κυκλική συχνότητα -3dB είναι η κυκλική συχνότητα για την οποία το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος αποκτά το  $1/\sqrt{2}$  της μέγιστης τιμής του

μέτρου της απόκρισης συχνότητας του συστήματος.

$$|H(\omega)|_{\omega_{-3dB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(\omega)|_{max} \quad (4.3.10)$$

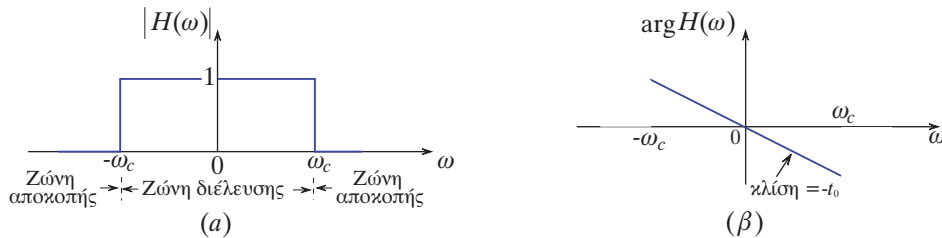
Σε ανάλογα συμπεράσματα καταλήγουμε για τη φάση, όπου στην περίπτωση αυτή υπάρχουν τρεις ασύμπτωτες ευθείες (Σχήμα 4.2).

#### 4.4 ΙΔΑΝΙΚΟ ΦΙΛΤΡΟ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ - ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ

Ένα σύστημα το οποίο ενισχύει ή αποδυναμώνει το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ανάλογα με την τιμή ή το διάστημα τιμών της συχνότητας  $\omega$ , ονομάζεται *φίλτρο*. *Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο* ή *ιδανικό φίλτρο βασικής ζώνης\** ονομάζεται το ΓΧΑ σύστημα το οποίο έχει απόκριση συχνότητας

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (4.4.1)$$

όπου  $t_0$  είναι σταθερή ποσότητα. Η σταθερή κυκλική συχνότητα  $\omega_c$  χαρακτηρίζεται ως *κυκλική συχνότητα αποκοπής* του φίλτρου. Στο Σχήμα 4.3 δίνεται η γραφική παράσταση του μέτρου και της φάσης του ιδανικού φίλτρου βασικής ζώνης. Το μέτρο της απόκρισης



**Σχήμα 4.3** (α) Το μέτρο και (β) η φάση της απόκρισης συχνότητας του ιδανικού φίλτρου βασικής ζώνης. Η κλίση της ευθείας προσδιορίζεται από το  $t_0$ .

συχνότητας του βαθυπερατού φίλτρου είναι ίσο με 1 για  $-\omega_c < \omega < \omega_c$ . Δεδομένου ότι  $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ , είναι προφανές ότι οι συχνότητες του σήματος εισόδου που βρίσκονται σε αυτό το διάστημα διέρχονται από το φίλτρο με αμετάβλητο πλάτος. Για το λόγο αυτό, το διάστημα αυτό καλείται και *ζώνη διέλευσης* του φίλτρου. Επίσης, επειδή το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του βαθυπερατού φίλτρου είναι ίσο με 0 για  $\omega < -\omega_c$  και  $\omega_c < \omega$ , είναι προφανές ότι το βαθυπερατό φίλτρο απορροφά τις συχνότητες εκείνες του φάσματος του σήματος εισόδου που είναι μεγαλύτερες από τη συχνότητα αποκοπής. Το διάστημα αυτό αποτελεί τη *ζώνη αποκοπής* του φίλτρου.

\* εμφανίζεται και ως κατωπερατό φίλτρο ή και κατωδιαβατό φίλτρο

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι στην είσοδο του βαθυπερατού φίλτρου το σήμα αποτελείται από δύο συνιστώσες, την  $x_{επ}(t)$  που είναι η επιθυμητή συνιστώσα του σήματος και την  $x_{αν}(t)$  που είναι η ανεπιθύμητη συνιστώσα, π.χ. ένα σήμα παρεμβολής ή θόρυβος. Έστω δε ότι  $|X_{επ}(\omega)| = 0$  για  $|\omega| > \omega_c$  σε αντίθεση με την ανεπιθύμητη συνιστώσα, της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier δεν ικανοποιεί αντίστοιχη σχέση. Για μια τέτοια περίπτωση, το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο θα αφήνει την επιθυμητή συνιστώσα να διέρχεται ενώ θα απορροφήσει το τμήμα της ανεπιθύμητης συνιστώσας το οποίο περιέχει συχνότητες μεγαλύτερες από τη συχνότητα αποκοπής, με αποτέλεσμα τη βελτίωση της ποιότητας του σήματος  $x_{επ}(t)$ .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το μη μηδενικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier,  $X(\omega)$ , του σήματος εισόδου,  $x(t)$ , εντοπίζεται στη ζώνη διέλευσης. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του συστήματος είναι

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

ή στο πεδίο του χρόνου

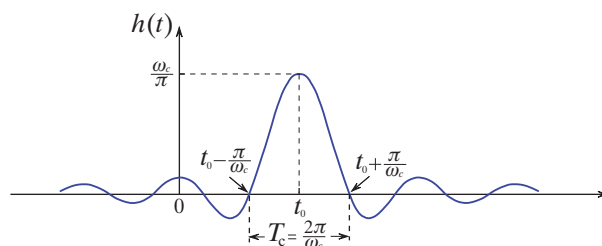
$$y(t) = x(t - t_0) \quad (4.4.2)$$

Με άλλα λόγια, το γεγονός ότι η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας, η επίδραση του φίλτρου σε ένα σήμα εισόδου, με φασματικό περιεχόμενο εντοπισμένο στη ζώνη διέλευσης, είναι μία χρονική καθυστέρηση  $t_0$ .

Από το μετασχηματισμό Fourier του ορθογώνιου παλμού και με τη βοήθεια της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης υπολογίζεται η κρουστική απόκριση του ιδανικού κατωπερατού φίλτρου

$$h(t) = \frac{\sin[\omega_c(t - t_0)]}{\pi(t - t_0)} = \frac{\omega_c}{\omega} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c(t - t_0)}{\pi}\right) \quad (4.4.3)$$

Η γραφική παράσταση της κρουστικής απόκρισης είναι στο Σχήμα 4.4.



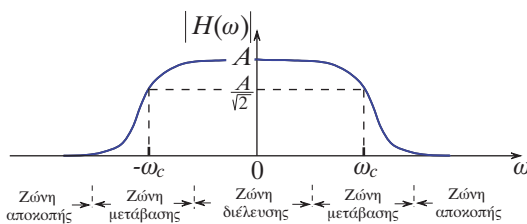
**Σχήμα 4.4** Η κρουστική απόκριση του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου.

#### Παρατηρήσεις

1. Όσο μικρότερη είναι η συχνότητα αποκοπής, τόσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια της κρουστικής απόκρισης.

2. Το ιδανικό κατωπερατό φίλτρο είναι μη αιτιατό, εφόσον η κρουστική απόκρισή του είναι μη μηδενική για αρνητικές τιμές του χρόνου και, επομένως, είναι μη πραγματοποιήσιμο. Αν η τιμή της σταθεράς  $t_0$  είναι αρκετά μεγάλη, οι τιμές της κρουστικής απόκρισης τις αρνητικές χρονικές στιγμές μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Και ως εκ τούτου μπορούμε να προσεγγίσουμε το φίλτρο με ένα αιτιατό σύστημα.
3. Όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα αποκοπής, τόσο ταχύτερα το φίλτρο έχει τη δυνατότητα να παρακολουθεί απότομες μεταβολές του σήματος εισόδου. Αυτό είναι λογικό, αφού γρήγορες χρονικές μεταβολές αντιστοιχούν στις υψηλές συχνότητες, οι οποίες διέρχονται από το φίλτρο αν επιλέξουμε μεγάλη συχνότητα αποκοπής.

Η γραφική παράσταση της απόκρισης πλάτους των πραγματικών φίλτρων βασικής ζώνης τα οποία συναντάμε στην πράξη, φαίνεται στο Σχήμα 4.5. Στα πραγματικά φίλτρα εκτός από τις ζώνες διέλευσης και αποκοπής υπάρχει και η *ζώνη μετάβασης*. Επίσης, στα πραγματικά φίλτρα η συχνότητα αποκοπής είναι ίση με τη συχνότητα  $-3\text{dB}$



**Σχήμα 4.5** Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ενός πραγματικού φίλτρου βασικής ζώνης.

Ανάλογα με την περιοχή των συχνοτήτων που διέρχονται από το φίλτρο αυτό χαρακτηρίζεται ως

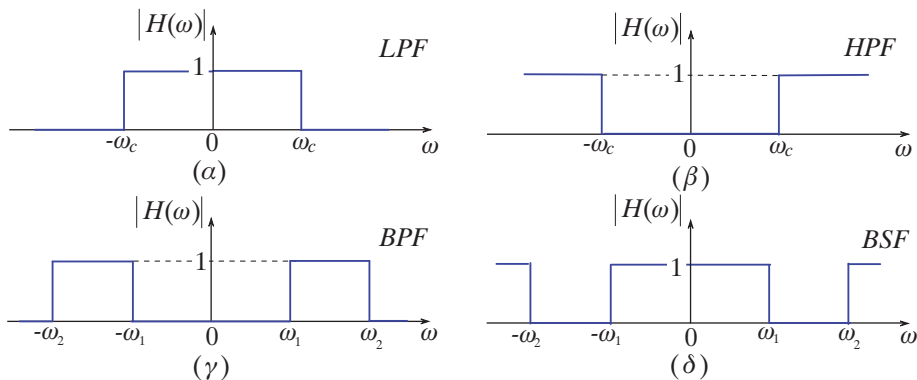
1. βαθυπερατό φίλτρο ή φίλτρο βασικής ζώνης ή φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων (lowpass filter (LPF)) Σχήμα 4.6α.
2. υψυπερατό φίλτρο ή φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων (highpass filter (HPF)) Σχήμα 4.6β.
3. ζωνοπερατό φίλτρο ή ζωνοδιαβατό φίλτρο ή φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων (bandpass filter (BPF)) Σχήμα 4.6γ..
4. ζωνοφρακτικό φίλτρο ή φίλτρο αποκοπής ζώνης συχνοτήτων (bandstop filter (BSF)) Σχήμα 4.6δ.

Οι αποκρίσεις πλάτους των αντιστοίχων ιδανικών φίλτρων φαίνονται στο Σχήμα 4.6 και των πραγματικών φίλτρων στο Σχήμα 4.7.

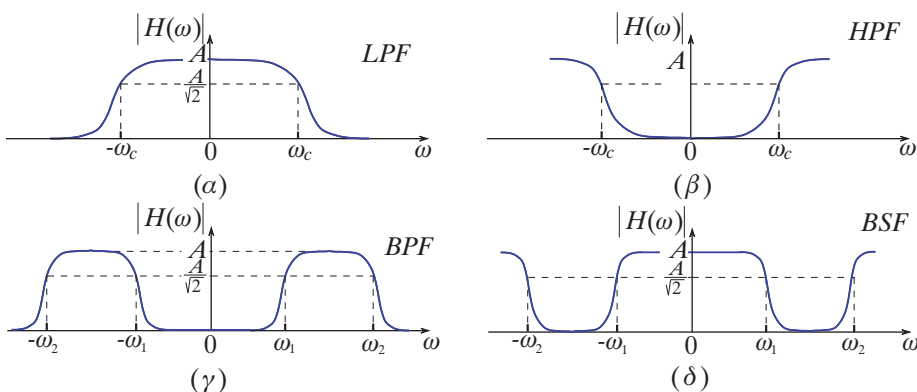
#### Παράδειγμα 4.4.1

Δίνεται το σύστημα το οποίο περιγράφεται στο Σχήμα 4.8.

1. Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.



**Σχήμα 4.6** Οι αποκρίσεις πλάτους ιδανικού (α) βαθυπερατού (β) υπιπερατού (γ) ζωνοπερατού και (δ) ζωνοφρακτικού φίλτρου.



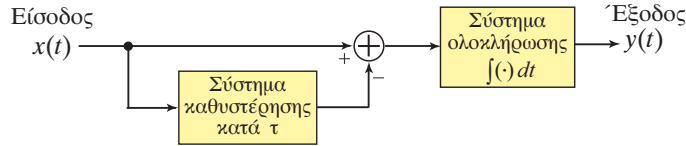
**Σχήμα 4.7** Οι αποκρίσεις πλάτους πραγματικού (α) βαθυπερατού (β) υπιπερατού (γ) ζωνοπερατού και (δ) ζωνοφρακτικού φίλτρου.

2. Να γίνει η περιγραφή του συστήματος στο πεδίο συχνότητας.
3. Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.

**Λύση**

1. Γνωρίζουμε ότι η κρουστική απόκριση ενός συστήματος είναι ίση με την έξοδό του όταν το σήμα εισόδου είναι η κρουστική συνάρτηση  $\delta(t)$ , έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \int_{-\infty}^t (\delta(\xi) - \delta(\xi - \tau)) d\xi \\
 &= u(t) - u(t - \tau) \\
 &= \Pi\left(\frac{t - \tau/2}{\tau}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.4.4}$$

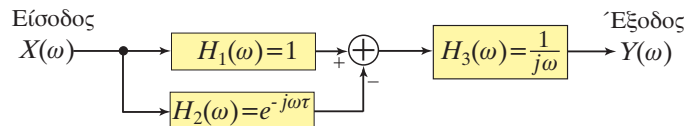


**Σχήμα 4.8** Περιγραφή του συστήματος του Παραδείγματος 4.4.1 στο πεδίο του χρόνου.

2. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της χρονικής μετατόπισης και της ολοκλήρωσης του μετασχηματισμού Fourier έχουμε την περιγραφή του συστήματος στο πεδίο συχνότητας του Σχήματος 4.9.
3. Με τη βοήθεια της προσεταιριστικής και της επιμεριστικής ιδιότητας της συνέλιξης έχουμε για την απόκριση συχνότητας του συστήματος

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= [H_1(\omega) - H_2(\omega)]H_3(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\omega} \\
 &= \frac{2}{\omega} \frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{2j} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \\
 &= \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \quad (4.4.5)
 \end{aligned}$$

Η απόκριση συχνότητας μπορεί να βρεθεί, επίσης, υπολογίζοντας το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.



**Σχήμα 4.9** Περιγραφή του συστήματος του Παραδείγματος 4.4.1 στο πεδίο συχνότητας.

### Σύνοψη Κεφαλαίου

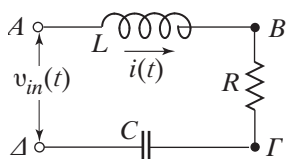
Στο κεφάλαιο αυτό υπολογίσαμε την απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος από τη διαφορική εξίσωση που συσχετίζει τα σήματα εισόδου-εξόδου, εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της γραμμικότητας, της διαφορίσης και το θεώρημα της συνέλιξης. Όταν η απόκριση συχνότητας έχει απλή μορφή, τότε είναι δυνατό με τη βοήθεια των γνωστών ζευγών MF, που αναφέρονται στον Πίνακα 3.3, να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν, επίσης, έμμεσοι τρόποι υπολογισμού του αντίστροφου MF, οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι όταν ο MF δεν έχει απλή μορφή. Ειδικότερα, στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, ο MF είναι μία ρητή συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή αναλύουμε τη συνάρτηση σε άθροισμα απλών κλασμάτων και με τη βοήθεια του Πίνακα 3.3 υπολογίζουμε τον αντίστροφο MF. Η

παραπάνω μεθοδολογία εφαρμόζεται και για τον υπολογισμό της εξόδου, στο πεδίο του χρόνου, ενός ΓΧΑ συστήματος, εάν έχουμε υπολογίσει πρώτα τον ΜΦ της εξόδου με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης.

Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν τα διαγράμματα Bode. Τα διαγράμματα Bode, επειδή ο λογάριθμος εκτείνει την κλίμακα, εξασφαλίζουν περισσότερη ευκρίνεια αν το εύρος των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει είναι μεγάλο ή, επίσης, αν περιορίζεται σε μικρές τιμές κοντά στο μηδέν. Τέλος, παρουσιάστηκαν οι έννοιες των ιδανικών και πραγματικών φίλτρων.

## 4.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 4.1 Δίνεται το κύκλωμα που αποτελείται από αντίσταση  $R = 10K\Omega$ , πηνίο  $L = 0,1H$  και πυκνωτή  $C = 10\mu F$  σε σειρά, το οποίο περιγράφεται στο Σχήμα 4.10. Αν η είσοδος του συστήματος είναι η εφαρμοζομένη τάση  $v_{in}(t)$  και έξοδος η ένταση του ρεύματος  $i(t)$ , να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.



Σχήμα 4.10 Το κύκλωμα του Προβλήματος 4.1.

- 4.2 Να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα του Σχήματος 4.8 όταν η τάση εισόδου είναι

$$v_{in}(t) = 10 \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$$

- 4.3 Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα το οποίο έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης να προσδιοριστεί η έξοδος του συστήματος όταν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα

$$x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(6\pi t)$$

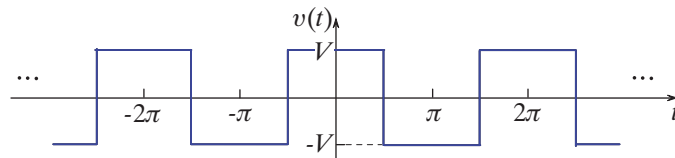
- 4.4 Η διαφορική εξίσωση η οποία συνδέει την είσοδο και την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

1. Να προσδιοριστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος και να γίνουν τα διαγράμματα Bode.
  2. Αν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα  $x(t) = e^{-t}u(t)$ , να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου.
  3. Αφού αναπτυχθεί σε απλά κλάσματα η  $Y(\omega)$  να υπολογιστεί η έξοδος  $y(t)$  του συστήματος, όταν η είσοδος είναι το σήμα  $x(t)$ .
- 4.5 Αν η πηγή τάσης της μορφής του Σχήματος 4.11 εφαρμόζεται στην είσοδο ενός ιδανικού κατωπερατού φίλτρου, με απόκριση συχνότητας

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega}, & |\omega| < 4 \\ 0, & |\omega| > 4 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του φίλτρου.



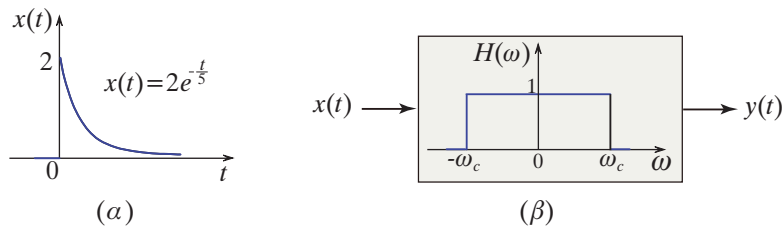
Σχήμα 4.11

- 4.6 Έστω ότι η πηγή τάσης της μορφής του Σχήματος 4.11 εφαρμόζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος πρώτης τάξης, το οποίο χαρακτηρίζεται από την εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος.

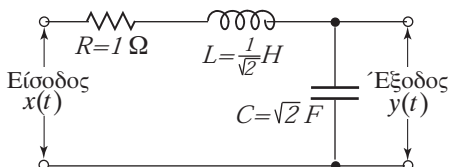
- 4.7 Το αιτιατό εκθετικό σήμα του Σχήματος 4.12α εφαρμόζεται στην είσοδο του ιδανικού φίλτρου βασικής ζώνης του Σχήματος 4.12β. Να υπολογιστεί η συχνότητα αποκοπής  $\omega_c$ , έτσι ώστε το φίλτρο να επιτρέπει τη διέλευση της μισής ενέργειας του σήματος εισόδου. Δίνεται το αόριστο ολοκλήρωμα  $\int \frac{1}{a^2+x^2} dt = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right)$ .



Σχήμα 4.12 (α) Το σήμα εισόδου και (β) το ιδανικό φίλτρο στο Πρόβλημα 4.7.

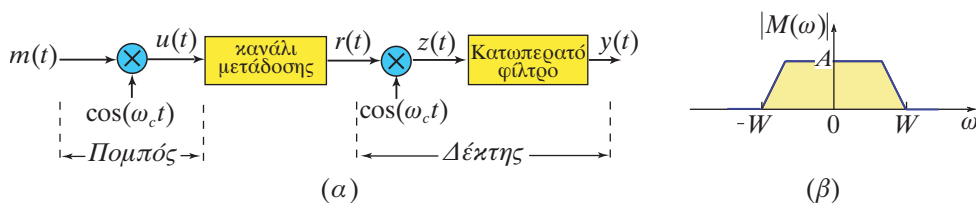


4.8 Δίνεται το κύκλωμα το οποίο περιγράφεται στο Σχήμα 4.13. Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος και να γίνει η γραφική παράσταση της απόκρισης πλάτους σε συνάρτηση με τη συχνότητα.



Σχήμα 4.13 Το κύκλωμα του Προβλήματος 4.8.

4.9 Κατά τη διαμόρφωση, ένα σήμα  $m(t)$  περιορισμένου εύρους ζώνης, δηλαδή,  $M(\omega) = 0$  για  $|\omega| > W$  (Σχήμα 4.12β), που μεταφέρει συγκεκριμένη πληροφορία, πολλαπλασιάζεται με ένα σήμα απλής συχνότητας  $\cos(\omega_0 t)$ , η οποία ονομάζεται φέρουσα, με σκοπό την εκπομπή του σε ένα μέσο μετάδοσης, π.χ., ζεύγος συρμάτων, ατμόσφαιρα, κλπ. Στο Σχήμα 4.14α περιγράφεται ένα απλοποιημένο σύστημα επικοινωνίας. Αν θεωρήσουμε ότι κατά τη μετάδοση του σήματος δεν αλλοιώνεται από το μέσο και ότι ο θόρυβος του καναλιού είναι αμελητέος, τότε το λαμβανόμενο σήμα  $r(t)$  είναι ίσο με το εκπεμπόμενο. Θεωρούμε ότι η ζώνη διέλευσης του ιδανικού κατοπερατού φίλτρου στο δέκτη είναι ίση με το εύρος ζώνης  $W$  του σήματος μηνύματος  $m(t)$ . Να μελετηθεί το σύστημα στο πεδίο συχνότητας.



Σχήμα 4.14 (α) Το απλοποιημένο σύστημα επικοινωνίας και (β) το περιορισμένου εύρους ζώνης φάσμα του σήματος μηνύματος για ένα αυθαίρετο σήμα  $m(t)$ .

4.10 Όταν το σήμα εισόδου σε ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα είναι  $x(t) = e^{-at}$ , το σήμα εξόδου είναι  $y(t) = e^{-bt}u(t)$ . Να βρεθούν

1. η απόκριση συχνότητας και
2. η κρουστική απόκριση του συστήματος.

4.11 Με τη βοήθεια της (3.3.83) να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού ορθογώνιου σήματος  $x(t)$  του Παραδείγματος 3.2.6.

Αν το σήμα  $x(t)$  εφαρμοστεί στην είσοδο γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος με κρουστική απόκριση  $h(t) = \frac{1}{\pi t} \sin(\pi t)$ , να δείξετε, χρησιμοποιώντας το

θεώρημα της συνέλιξης, ότι η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

**4.12** Από την ιδιότητα της ολίσθησης της κρουστικής συνάρτησης

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

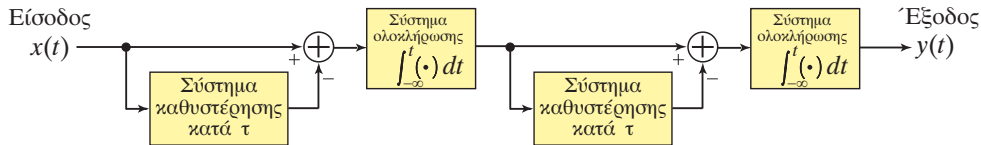
Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη κάθε συνάρτησης με την κρουστική συνάρτηση έχει ως αποτέλεσμα μία ολισθημένη έκδοση της αρχικής συνάρτησης, δηλαδή,

$$g(t) * \delta(t - t_0) = g(t - t_0)$$

Αν το σήμα  $x(t) = \text{sinc}^2(t)$  εφαρμοστεί στην είσοδο γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος με κρουστική απόκριση  $h(t)$ , να βρεθεί και να σχεδιασθεί ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του συστήματος όταν

1.  $h(t) = 1 + \cos\left(\frac{t}{2}\right)$
2.  $h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$

**4.13** Να βρεθεί ο μαθηματικός τύπος της κρουστικής απόκρισης του συστήματος του Σχήματος 4.15 και να γίνει η γραφική της παράσταση σε συνάρτηση με το χρόνο. (Υπόδειξη: Να θεωρήσετε το σύστημα ως την εν σειρά σύνδεση δύο συστημάτων).



**Σχήμα 4.15** Το σύστημα στο Πρόβλημα 4.13.

### Βιβλιογραφία

- 4.1 Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, Λ. Κοφίδης, “Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων”, *Τυπωθήτω - Γιώργος Δαρδανός*, Αθήνα 2003.
- 4.2 S. Haykin, B. Veen, “Signal and Systems”, *John & Wiley Sons, Inc.* 2003
- 4.3 A. V. Oppenheim, R. S. Willsky, I. T. Young, “Signal and Systems”, *Prentice - Hall Inc.*, N. Y., 1983.