

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Σκοπός του κεφαλαίου είναι να ορίσει τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace ή, απλώς, μετασχηματισμό Laplace (ML) και το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace (MML), να περιγράψει τις βασικές τους ιδιότητες και να υπολογίσει τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς στοιχειωδών σημάτων, που αντιμετωπίζουμε στη μελέτη γραμμικών συστημάτων. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τη δυνατότητα που έχει ο MML να επιλύει διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες έχουν μη μηδενικές αρχικές συνθήκες και στη συνέχεια θα εκμεταλλευτούμε τη δυνατότητα αυτή για τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων. Τέλος, σκοπός του κεφαλαίου είναι να αναδείξει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της αιτιότητας, της ευστάθειας ενός ΓΧΑ συστήματος, του πεδίου σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του και της θέσης των πόλων αυτής στο μιγαδικό επίπεδο, όπου ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο Κεφάλαιο 2, είδαμε ότι η είσοδος και η έξοδος ενός αναλογικού ΓΧΑ συστήματος συνδέονται με μία διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Έτσι, για να προσδιορίσουμε την έξοδο ενός συστήματος αν γνωρίζουμε την είσοδό του, πρέπει να επιλύουμε την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση. Στο ίδιο Κεφάλαιο παρατηρήσαμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο ενός συστήματος αν γνωρίζουμε την είσοδό του, με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης. Στο Κεφάλαιο 3 ορίσαμε το MF, ο οποίος παρέχει τη δυνατότητα μετάβασης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Η ιδιότητα της συνέλιξης του MF μετατρέπει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης σε ένα απλό γινόμενο των αντιστοίχων μετασχηματισμών, με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζεται ο MF της εξόδου και στη συνέχεια με ένα αντίστροφο MF προσδιορίζεται η έξοδος του συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Ο MF, λοιπόν, έδωσε μία εύκολη λύση στο πρόβλημα εύρεσης της εξόδου ενός συστήματος, στην περίπτωση που γνωρίζουμε την είσοδό του και την κρουστική του απόκριση. Δυστυχώς, όμως, υπάρχουν πολλά σήματα, τα οποία συχνά συναντάμε στην πράξη, για τα οποία δεν υπάρχει ο MF.

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε το Μετασχηματισμό Laplace, ο οποίος μετατρέπει ένα σήμα συνεχούς χρόνου σε μία αναλυτική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής. Όπως θα δούμε, πολλά από τα σήματα με πρακτική σπουδαιότητα, για τα οποία δεν

υπάρχει ο MF, υπάρχει ο ML και έτσι διευρύνεται το σύνολο των σημάτων για τα οποία μπορεί να επιτευχθεί μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο συχνότητας.

Στο Κεφάλαιο 4, με τη βοήθεια του MF υπολογίσαμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος το οποίο βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ότι όταν το σύστημα δε βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας, ο MML μας επιτρέπει να συμπεριλάβουμε τις αρχικές συνθήκες στη διαφορική εξίσωση που συνδέει το σήμα εισόδου και εξόδου του συστήματος και να προσδιορίσουμε την έξοδο του συστήματος.

Τέλος, στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ότι η χρήση του μιγαδικού πεδίου συχνότητας και η θέση των πόλων σε αυτό μας επιτρέπει να εξάγουμε βασικές ιδιότητες των συστημάτων, όπως η αιτιότητα και η ευστάθεια. Για όλους τους παραπάνω λόγους, ο ML αποτελεί ένα ακόμα βασικό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων.

6.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Στην Ενότητα 2.5.1 έχουμε δει ότι αν η είσοδος ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος είναι το σήμα $x(t) = Ae^{st}$, τότε το σήμα εξόδου είναι

$$y(t) = H(s) \cdot Ae^{st} \quad (6.1.1)$$

όπου

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (6.1.2)$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος και είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

Ο μετασχηματισμός Laplace αντιστοιχεί στο σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ τη συνάρτηση

$$L[x(t)] = X(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (6.1.3)$$

Η $X(s)$ είναι μιγαδική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $\sigma + j\omega$ και ονομάζεται *Μετασχηματισμός Laplace (ML)* του σήματος $x(t)$. Μερικές φορές αναφέρεται και ως *αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace* για να τονιστεί η διαφορά του από το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace που θα ορίσουμε στην Ενότητα 6.3. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\sigma + j\omega$, για το οποίο υπάρχει η $X(s)$, δηλαδή το αντίστοιχο ολοκλήρωμα ορισμού της συγκλίνει, ονομάζεται *περιοχή σύγκλισης* (ΠΣ) της $X(s)$. Για ευκολία, ο ML του σήματος $x(t)$ μερικές φορές συμβολίζεται ως $L[x(t)]$ και η σχέση μεταξύ του $x(t)$ και του ML υποδεικνύεται ως

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad (6.1.4)$$

η δε περιοχή σύγκλισης δηλώνεται ως R .

Παρατηρήσεις

1. Αν ο ML υπάρχει και για τιμές με $\sigma = 0$, δηλαδή $s = j\omega$, τότε $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ που δεν είναι τίποτε άλλο από το MF της συνάρτησης $x(t)$, δηλαδή

$$X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}[x(t)] \quad (6.1.5)$$

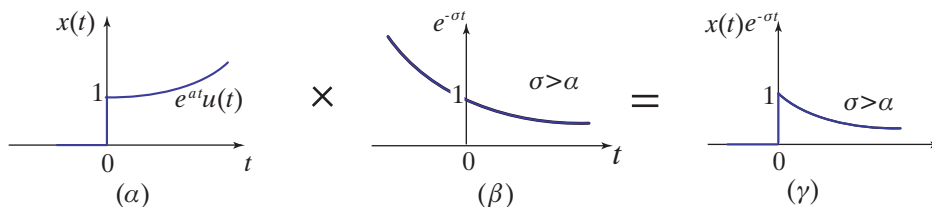
2. Ο ML σχετίζεται με το MF και στην περίπτωση όπου η μεταβλητή s δεν είναι φανταστικός αριθμός ($\sigma \neq 0$). Πράγματι,

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \quad (6.1.6)$$

Ο ML της $x(t)$ μπορεί να ερμηνευθεί και ως ο MF της συνάρτησης $x_{\sigma}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$. Επομένως, για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ πρέπει να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)e^{-\sigma t}$, δηλαδή το σήμα $x(t)e^{-\sigma t}$ να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

Η παρουσία του όρου $e^{-\sigma t}$ παρέχει τη δυνατότητα σύγκλισης του ολοκληρώματος και κατά συνέπεια την ύπαρξη του ML ακόμα και αν δεν υπάρχει ο MF της $x(t)$. Για παράδειγμα, η εκθετικά αύξουσα συνάρτηση (σήμα) $x(t) = e^{at}u(t)$ για a θετική πραγματική σταθερά δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και ως εκ τούτου δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Αν επιλεγεί $\sigma > a$, τότε η συνάρτηση $x(t)e^{-\sigma t} = e^{(a-\sigma)t}u(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace. Στο Σχήμα 6.1 υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις των σημάτων $x(t)$, $e^{-\sigma t}$ και $x(t)e^{-\sigma t}$ σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 6.1 (α) Το σήμα $x(t) = e^{at}u(t)$ για το οποίο δεν υπάρχει ο MF (β) ο παράγοντας εξασθένησης $e^{-\sigma t}$ και (γ) το σήμα $x(t)e^{-\sigma t} = e^{(a-\sigma)t}u(t)$ το οποίο είναι απολύτως ολοκληρώσιμο.

6.1.1 Μετασχηματισμός Laplace στοιχειωδών σημάτων

Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε τους ML ορισμένων στοιχειωδών σημάτων.

Παράδειγμα 6.1.1 (Μιγαδικό αιτιατό εκθετικό σήμα)

Να υπολογιστεί ο ML του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, όπου a μιγαδικός αριθμός.

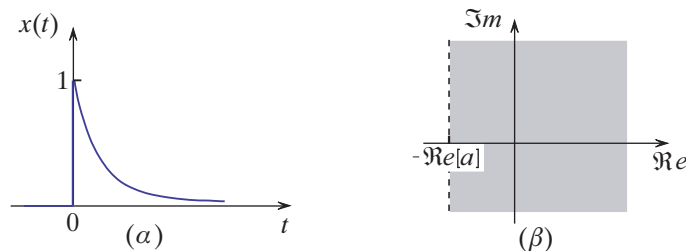
Λύση Από τον ορισμό του ML έχουμε

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(a+s)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-1}{a+s} \left[e^{-(a+s)T} - 1 \right] \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Αλλά $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-(a+s)T} = 0$, εάν $\Re[a+s] > 0$, συνεπώς παίρνουμε

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a} \text{ με περιοχή σύγκλισης } \Re[s] > -\Re[a] \quad (6.1.8)$$

Παρατηρούμε ότι η περιοχή σύγκλισης R του μιγαδικού αιτιατού εκθετικού σήματος είναι το δεξιό ημιεπίπεδο με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση $-\Re[a]$, (βλέπε Σχήμα 6.2).



Σχήμα 6.2 (α) Το σήμα $x(t) = e^{-at}u(t)$ και (β) η περιοχή σύγκλισης του ML.

Παρατηρήσεις

1. Αν $a = 0$, τότε $x(t)$ είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος, $x(t) = u(t)$ και ο ML είναι

$$X(s) = L[u(t)] = \frac{1}{s} \text{ με περιοχή σύγκλισης } \Re[s] > 0 \quad (6.1.9)$$

2. Αν $-\Re[a] < 0$, μπορούμε να υπολογίσουμε το $X(s)$ για $\sigma = 0$, δηλαδή υπάρχει και ο MF και είναι

$$X(0 + j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (6.1.10)$$

3. Αν $-\Re[a] > 0$, ο MF δεν υπάρχει, ενώ προφανώς υπάρχει ο ML.

Παράδειγμα 6.1.2 (Αυστηρά μη αιτιατό εκθετικό σήμα)

Να υπολογιστεί ο ML του σήματος $x(t) = -e^{-at}u(-t)$, όπου a μιγαδικός αριθμός

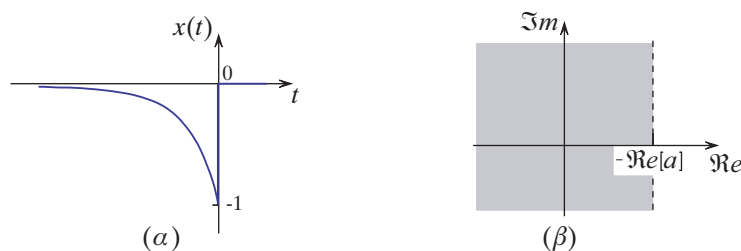
Λύση Ο ML του σήματος είναι

$$\begin{aligned} X(s) &= - \int_{-\infty}^0 e^{-at} e^{-st} dt = - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^0 e^{-(a+s)t} dt \\ &= \frac{1}{s+a} \left[1 - \lim_{T \rightarrow \infty} e^{(a+s)T} \right] \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

Είναι $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{(a+s)T} = 0$ αν $\Re[s+a] < 0$. Συνεπώς

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \text{ με περιοχή σύγκλισης } \Re[s] < -\Re[a] \quad (6.1.12)$$

Παρατηρούμε ότι η περιοχή σύγκλισης R του αυστηρά μη αιτιατού εκθετικού σήματος είναι το αριστερό ημιεπίπεδο με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση $-\Re[a]$ (βλέπε Σχήμα 6.3).



Σχήμα 6.3 (α) Το σήμα $x(t) = -e^{-at}u(-t)$ και (β) η περιοχή σύγκλισης του ML.

Παρατηρούμε ότι τα σήματα $x(t) = e^{-at}u(t)$ (Παράδειγμα 6.1.1) και $x(t) = -e^{-at}u(-t)$, (Παράδειγμα 6.1.2) έχουν την ίδια συνάρτηση ως ML αλλά διαφορετική περιοχή σύγκλισης. Για το λόγο αυτό, πάντα εκτός από την $X(s)$ θα πρέπει να δίνεται και η αντίστοιχη περιοχή σύγκλισης ώστε να προσδιορίζεται μονοσήμαντα το σήμα $x(t)$.

Παράδειγμα 6.1.3

Να υπολογιστεί ο ML του σήματος $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$.

Λύση Ο ML του σήματος είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)] e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt \quad (6.1.13)$$

Κάθε ένα από τα ολοκληρώματα στην (6.1.13) έχουν την ίδια μορφή με το ολοκλήρωμα στην (6.1.7) έτσι, αν χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 6.1.1 έχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2} \quad (6.1.14)$$

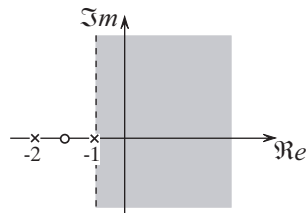
Το σήμα $x(t)$ είναι άθροισμα δύο πραγματικών εκθετικών σημάτων και από την (6.1.14) παρατηρούμε ότι ο $X(s)$ είναι ίσος με το άθροισμα των ΜΛ των επιμέρους σημάτων. Ο πρώτος όρος είναι ο ΜΛ του $e^{-t}u(t)$ με ΠΣ $\Re[s] > -1$ και ο δεύτερος είναι ο ΜΛ του $e^{-2t}u(t)$ με ΠΣ $\Re[s] > -2$. Οι κοινές τιμές του s για τις οποίες και οι δύο ΜΛ συγκλίνουν είναι αυτές για τις οποίες $\Re[s] > -1$. Έχουμε, επομένως,

$$e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{2s + 3}{s^2 + 3s + 2}, \text{ με ΠΣ } \Re[s] > -1 \quad (6.1.15)$$

Σε κάθε ένα από τα τρία παραπάνω παραδείγματα ο ΜΛ είναι ρητή συνάρτηση, δηλαδή είναι λόγος δύο πολυωνύμων της μιγαδικής μεταβλητής s , έτσι

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (6.1.16)$$

Μία συνάρτηση $X(s)$ ονομάζεται *αναλυτική* στην περιοχή R του μιγαδικού επιπέδου- s , εάν (α) είναι μονότιμη συνάρτηση στην R και (β) είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της R . Αν η $X(s)$ δεν είναι αναλυτική σε ένα σημείο s_0 , τότε το σημείο αυτό λέγεται *σημείο ανωμαλίας*. Οι ρίζες του αριθμητή $N(s)$ ονομάζονται *μηδενικά* της $X(s)$ και παριστάνονται με “ο” στο μιγαδικό επίπεδο. Στα σημεία αυτά η $X(s)$ μηδενίζεται. Οι ρίζες του παρονομαστή $D(s)$, όπου η $X(s)$ δεν ορίζεται, ονομάζονται *πόλοι* της $X(s)$ και παριστάνονται με “x” στο μιγαδικό επίπεδο. Στο Σχήμα 6.4 φαίνεται η περιοχή σύγκλισης, οι πόλοι και το μηδενικό του ΜΛ του σήματος $x(t)$ στο Παράδειγμα 6.1.3.



Σχήμα 6.4 Η περιοχή σύγκλισης, οι πόλοι και το μηδενικό του ΜΛ του σήματος $x(t)$ στο Παράδειγμα 6.1.3.

Παράδειγμα 6.1.4

Να υπολογιστεί ο ΜΛ της συνάρτησης $\delta(t)$.

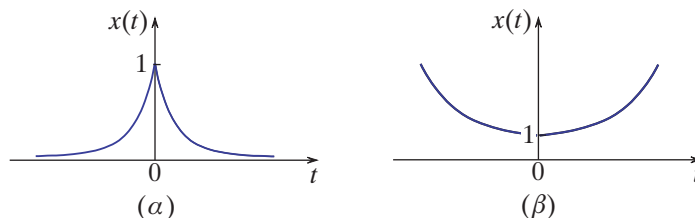
Λύση

$$L[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1 \text{ με περιοχή σύγκλισης } \Re[s] > -\infty \quad (6.1.17)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η (1.4.19).

Παράδειγμα 6.1.5

Δίνεται το σήμα $x(t) = e^{-b|t|}$ (βλέπε Σχήμα 6.5α). Να υπολογιστεί ο ΜΛ.



Σχήμα 6.5 Η γραφική παράσταση του σήματος $x(t) = e^{-b|t|}$ για (α) $b > 0$ και (β) $b < 0$.

Λύση Το σήμα γράφεται

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t) \tag{6.1.18}$$

Γνωρίζουμε ότι

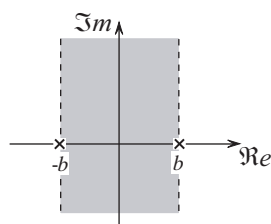
$$e^{-bt}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+b}, \text{ με ΠΣ } \Re[s] > -b \text{ (Παράδειγμα 6.1.1)}$$

$$e^{bt}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{-1}{s-b}, \text{ με ΠΣ } \Re[s] < b \text{ (Παράδειγμα 6.1.2)}$$

Παρατηρούμε ότι, αν $b < 0$, οι δύο επιμέρους όροι δεν έχουν κοινή περιοχή σύγκλισης και το σήμα $x(t)$ δεν έχει ML. Αν $b > 0$, έχουμε

$$e^{-b|t|} \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = -\frac{2b}{s^2 - b^2} \text{ με ΠΣ } -b < \Re[s] < b \tag{6.1.19}$$

Στο Σχήμα 6.6 φαίνονται η περιοχή σύγκλισης και οι πόλοι του ML του σήματος $x(t)$.



Σχήμα 6.6 Η περιοχή σύγκλισης του ML του σήματος $x(t) = e^{-b|t|}$ στο Παράδειγμα 6.1.5 και οι πόλοι του για $b > 0$.

Παράδειγμα 6.1.6 (Πολυωνυμικό εκθετικό σήμα).

Να υπολογιστεί ο ML του εκθετικού πολυωνυμικού σήματος τάξης m , που ορίζεται ως

$$x(t) = \frac{t^m}{m!} e^{-at}u(t) \tag{6.1.20}$$

Λύση Στο Παράδειγμα 6.1.1 έχουμε δείξει

$$\int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} \text{ για } \Re[s] > -\Re[a] \tag{6.1.21}$$

Παραγωγίζοντας ως προς a και τα δύο μέλη της (6.1.21) έχουμε

$$\frac{d}{da} \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{-1}{(s+a)^2} \quad \text{ή} \quad \int_0^{\infty} t e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{(s+a)^2} \quad (6.1.22)$$

Η τελευταία ισότητα δηλώνει ότι το σήμα $x(t) = t e^{-at} u(t)$ έχει ML

$$x(t) = t e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \text{με} \quad \Re[s] > -\Re[a] \quad (6.1.23)$$

Αν $a = 0$, έχουμε

$$L[tu(t)] = L[r(t)] = \frac{1}{s^2} \quad \text{με} \quad \Re[s] > 0 \quad (6.1.24)$$

όπου $r(t)$ είναι η συνάρτηση κλίσης. Νέα παραγωγή της (6.1.22) ως προς a δίνει

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-at} e^{-st} dt = \frac{2}{(s+a)^3}$$

οπότε

$$\frac{t^2}{2} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^3} \quad \text{με} \quad \Re[s] > -\Re[a] \quad (6.1.25)$$

Γενικά μπορεί να δειχθεί επαγωγικά ότι

$$\frac{t^m}{m!} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \quad \text{με} \quad \Re[s] > -\Re[a] \quad (6.1.26)$$

6.1.2 Ιδιότητες της περιοχής σύγκλισης - Ύπαρξη μετασχηματισμού Laplace

Από τα προηγούμενα παραδείγματα παρατηρήσαμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace δεν προσδιορίζει μονοσήμαντα το σήμα εκτός αν έχει ορισθεί η περιοχή σύγκλισης. Επίσης, παρατηρήσαμε ότι η μορφή της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του σήματος. Στην ενότητα αυτή θα βρούμε τον τρόπο με το οποίο συνδέεται η περιοχή σύγκλισης με τα χαρακτηριστικά του σήματος $x(t)$. Θα παρουσιάσουμε τις ιδιότητες χρησιμοποιώντας διαισθητικά επιχειρήματα παρά αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις. Γνωρίζοντας τις ιδιότητες είναι εφικτός ο προσδιορισμός της περιοχής σύγκλισης από το μετασχηματισμό Laplace $X(s)$ και έχοντας περιορισμένη γνώση των χαρακτηριστικών του σήματος $x(t)$.

Ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace που είναι ρητή συνάρτηση της μεταβλητής s δεν περιέχει πόλους.

Όπως παρατηρήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ πρέπει

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (6.1.27)$$

Οι τιμές της πραγματικής μεταβλητής σ που ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα ορίζουν την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού. Η ποσότητα σ είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού s ($s = \sigma + j\omega$), επομένως η περιοχή σύγκλισης εξαρτάται από το πραγματικό μέρος, ενώ το φανταστικό μέρος δεν επηρεάζει τη σύγκλιση. Για το λόγο αυτό η περιοχή σύγκλισης είναι ζώνες παράλληλες στο φανταστικό άξονα του επιπέδου- s .

Για ένα πεπερασμένο σήμα $x(t)$ (υπάρχει θετικός αριθμός M για τον οποίο είναι $|x(t)| \leq M$), το οποίο είναι πεπερασμένης διάρκειας ($x(t) = 0$ για $t < T_1$ και $t > T_2$), τότε

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq \int_{T_1}^{T_2} M e^{-\sigma t} dt = \begin{cases} \frac{-W}{\sigma} [e^{-\sigma T_2} - e^{-\sigma T_1}], & \sigma \neq 0 \\ M(T_2 - T_1), & \sigma = 0 \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα $I(\sigma)$ είναι πεπερασμένο για όλες τις πεπερασμένες τιμές της μεταβλητής σ . Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι:

Η περιοχή σύγκλισης ενός πεπερασμένου σήματος και πεπερασμένης διάρκειας συμπεριλαμβάνει ολόκληρο το επίπεδο- s .

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη γενική περίπτωση κατά την οποία το σήμα $x(t)$ δεν είναι περιορισμένης διάρκειας και είναι μη πεπερασμένο. Το σήμα αυτό ονομάζεται *αμφίπλευρο σήμα*. Στην περίπτωση αυτή διαχωρίζουμε το $I(\sigma)$ σε δύο τμήματα. Στο πρώτο τμήμα $I_-(\sigma)$ τα όρια ολοκλήρωσης είναι $-\infty$ και 0

$$I_-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt$$

Στο δεύτερο τμήμα $I_+(\sigma)$ τα όρια ολοκλήρωσης είναι 0 και ∞

$$I_+(\sigma) = \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt$$

δηλαδή,

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt + \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt = I_-(\sigma) + I_+(\sigma)$$

Για να είναι το $I(\sigma)$ πεπερασμένο πρέπει και τα δύο επιμέρους ολοκληρώματα να είναι πεπερασμένα. Αυτό συνεπάγεται ότι το $|x(t)|$ πρέπει να είναι φραγμένο και για τις θετικές και για τις αρνητικές τιμές του χρόνου.

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να φράξουμε το $|x(t)|$ για τις θετικές και για τις αρνητικές τιμές του χρόνου βρίσκοντας τις ελάχιστες σταθερές $M > 0$ και σ_θ τέτοιες ώστε

$$|x(t)| \leq M e^{\sigma_\theta t}, \quad t > 0,$$

και τη μέγιστη σταθερά σ_α τέτοια ώστε

$$|x(t)| \leq M e^{\sigma_\alpha t}, \quad t < 0,$$

Το σήμα $x(t)$ το οποίο ικανοποιεί τα φράγματα αυτά χαρακτηρίζεται ως σήμα *εκθετικής τάξης*. Τα φράγματα υποδηλώνουν ότι το $|x(t)|$ δεν αυξάνεται ταχύτερα από το εκθετικό σήμα $e^{\sigma_\alpha t}$ για τις θετικές τιμές του χρόνου και $e^{-\sigma_\alpha t}$ για τις αρνητικές τιμές του χρόνου. Σημειώνεται ότι υπάρχουν σήματα τα οποία δεν είναι εκθετικής τάξης, για παράδειγμα τα σήματα e^{t^2} και t^{3t} . Τα σήματα αυτά δεν εμφανίζονται σε φυσικές εφαρμογές και έτσι δεν μας δημιουργούν προβλήματα.

Υποθέτοντας ότι το σήμα $x(t)$ είναι εκθετικής τάξης έχουμε για το ολοκλήρωμα $I_-(\sigma)$

$$\begin{aligned} I_-(\sigma) &= \int_{-\infty}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq M \int_{-\infty}^0 e^{(\sigma_\alpha - \sigma)t} dt \\ &= \frac{M}{\sigma_\alpha - \sigma} \left[e^{(\sigma_\alpha - \sigma)t} \Big|_{-\infty}^0 \right] \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

και για το ολοκλήρωμα $I_+(\sigma)$

$$\begin{aligned} I_+(\sigma) &= \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq M \int_0^{\infty} e^{(\sigma_\beta - \sigma)t} dt \\ &= \frac{M}{\sigma - \sigma_\beta} \left[e^{(\sigma_\beta - \sigma)t} \Big|_0^{\infty} \right] \end{aligned} \quad (6.1.29)$$

Παρατηρούμε ότι το $I_-(\sigma)$ είναι πεπερασμένο όταν $\sigma < \sigma_\alpha$ και το $I_+(\sigma)$ είναι πεπερασμένο όταν $\sigma > \sigma_\beta$. Το ολοκλήρωμα $I(\sigma)$ συγκλίνει για τις τιμές του σ για τις οποίες και τα δύο ολοκληρώματα $I_-(\sigma)$ και $I_+(\sigma)$ συγκλίνουν. Άρα, ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει για τις τιμές του σ οι οποίες ικανοποιούν τη $\sigma_\beta < \sigma < \sigma_\alpha$.

Η περιοχή σύγκλισης ενός αμφίπλευρου σήματος είναι μία ζώνη στο μιγαδικό επίπεδο με όρια τις ευθείες $\sigma = \sigma_\alpha$ και $\sigma = \sigma_\beta$.

Το σήμα $x(t) = e^{b|t|}$, του οποίου ο μετασχηματισμός Laplace βρέθηκε στο Παράδειγμα 6.1.5, είναι ένα αμφίπλευρο σήμα.

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση όπου $\sigma_\beta > \sigma_\alpha$, δεν υπάρχουν τιμές του σ για τις οποίες ο μετασχηματισμός Laplace συγκλίνει.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία το σήμα $x(t) = 0$ για $t > T_2$. Ένα σήμα που ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή ονομάζεται *αριστερόπλευρο σήμα*.

Στην περίπτωση το $I(\sigma)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \int_{-\infty}^0 |x(t)|e^{\sigma t} dt + \int_0^{T_2} |x(t)|e^{\sigma t} dt \\ &\leq \frac{M}{\sigma_\alpha - \sigma} \left[e^{(\sigma_\alpha - \sigma)t} \right]_{-\infty}^0 + \begin{cases} \frac{-W}{\sigma} \left[e^{-\sigma t} \right]_0^{T_2}, & \sigma \neq 0 \\ M(T_2 - 0), & \sigma = 0 \end{cases} \quad (6.1.30) \end{aligned}$$

Από την παραπάνω παρατηρούμε ότι η περιοχή σύγκλισης ενός αριστερόπλευρου σήματος αποτελείται από τις τιμές της μεταβλητής s για τις οποίες το πραγματικό μέρος ικανοποιεί τη $\sigma < \sigma_\alpha$, δηλαδή

Η περιοχή σύγκλισης ενός αριστερόπλευρου σήματος είναι το αριστερό ημιεπίπεδο με όριο την ευθεία $\sigma = \sigma_\alpha$.

Το σήμα $x(t) = -e^{-at}u(-t)$, το οποίο μελετήσαμε στο Παράδειγμα 6.1.2, είναι ένα αριστερόπλευρο σήμα.

Τέλος, θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία το σήμα $x(t) = 0$ για $t < T_2$. Ένα σήμα που ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή ονομάζεται *δεξιόπλευρο σήμα*. Με όμοιο τρόπο παρατηρούμε ότι η περιοχή σύγκλισης ενός δεξιόπλευρου σήματος αποτελείται από τις τιμές της μεταβλητής s για τις οποίες το πραγματικό μέρος ικανοποιεί τη $\sigma > \sigma_\beta$.

Η περιοχή σύγκλισης ενός δεξιόπλευρου σήματος είναι το δεξιό ημιεπίπεδο με όριο την ευθεία $\sigma = \sigma_\beta$.

Το σήμα $x(t) = e^{-at}u(t)$, το οποίο μελετήσαμε στο Παράδειγμα 6.1.1, είναι ένα δεξιόπλευρο σήμα.

6.1.3 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε μερικές ιδιότητες του ML. Οι ιδιότητες αυτές θα μας βοηθήσουν στον υπολογισμό του ML σημάτων, χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα ορισμού. Αρκετές από τις ιδιότητες θυμίζουν τις ιδιότητες του MF. Για τις αποδείξεις των ιδιοτήτων, όπου αυτές δεν είναι προφανείς, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο [1].

(1) Γραμμικότητα

Αν $x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s)$ με ΠΣ R_1 και $x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s)$ με ΠΣ R_2 , τότε για οποιεσδήποτε σταθερές a και b είναι

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{L} aX_1(s) + bX_2(s) \text{ με ΠΣ } R = R_1 \cap R_2$$

δηλαδή η περιοχή σύγκλισης του γραμμικού συνδυασμού είναι η τομή των επιμέρους περιοχών σύγκλισης των $X_1(s)$ και $X_2(s)$. Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δυνατόν η

περιοχή σύγκλισης να είναι μεγαλύτερη, όταν κάποια μηδενικά της μίας συνάρτησης ακυρώνουν κάποιους πόλους της άλλης.

(2) Μετατόπιση στο χρόνο

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R τότε για οποιαδήποτε χρονική τιμή t_0 ισχύει

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(s) \text{ με την ίδια ΠΣ } R$$

(3) Μετατόπιση στη μιγαδική συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R , τότε

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{L} X(s - s_0) \text{ με ΠΣ } R + \Re[s_0]$$

όπου η σταθερά s_0 , στη γενική περίπτωση, είναι μιγαδική ποσότητα. Η ΠΣ του $X(s - s_0)$ είναι η ΠΣ του $X(s)$ μετατοπισμένη κατά $\Re[s_0]$.

(4) Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ $\sigma_1 < \Re[s] < \sigma_2$, τότε για οποιαδήποτε σταθερά a

$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \text{ με ΠΣ } \frac{\sigma_1}{a} < \Re[s] < \frac{\sigma_2}{a}$$

(5) Παραγωγή στη συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R , τότε

$$(-t)^n x(t) \xleftrightarrow{L} \frac{d^n X(s)}{ds^n} \text{ με ΠΣ } R$$

(6) Ολοκλήρωση στη συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R , τότε

$$\frac{x(t)}{t} \xleftrightarrow{L} \int_s^\infty X(\xi) d\xi \text{ με ΠΣ } R$$

(7) Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R , τότε

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s) \text{ με την ίδια ΠΣ } R$$

Η ΠΣ του $sX(s)$ μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την R , αν η $X(s)$ έχει ως απλό πόλο τον $s = 0$ ο οποίος ακυρώνεται με τον πολλαπλασιασμό με s . Επαγωγικά μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω ιδιότητα

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{L} s^n X(s) \text{ με την ίδια ΠΣ } R$$

(8) Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R , τότε

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s) \text{ με ΠΣ την } R \cap \{\Re[s] > 0\}$$

Η ΠΣ του $(1/s)X(s)$ μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την $R \cap \{\Re[s] > 0\}$, αν ο πόλος στο μηδέν ακυρώνεται με αντίστοιχο μηδενικό της $X(s)$.

(9) Θεώρημα της συνέλιξης στο χρόνο

Αν $x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)$ με ΠΣ R_1 και $x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s)$ με ΠΣ R_2 , τότε

$$y(t) = x_1(t) \star x_2(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

με περιοχή σύγκλισης την $R_1 \cap R_2$, δηλαδή η περιοχή σύγκλισης του γινομένου $X_1(s) \cdot X_2(s)$ είναι η τομή των επιμέρους περιοχών σύγκλισης των $X_1(s)$ και $X_2(s)$. Είναι δυνατόν να ορίζεται και μεγαλύτερη περιοχή σύγκλισης, αν κάποια μηδενικά της μιας συνάρτησης ακυρώνουν κάποιους πόλους της άλλης. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι όπως και στην περίπτωση του MF, η *συνέλιξη μετασχηματίζεται σε γινόμενο*.

Πέρα από τα στοιχειώδη σήματα, τα οποία μελετήθηκαν στα Παραδείγματα 6.1.1 - 6.1.6, υπάρχουν και αρκετά άλλα που επίσης εμφανίζονται ως συστατικά μέρη άλλων σημάτων, που συναντάμε στη μελέτη γραμμικών συστημάτων. Οι ML των σημάτων αυτών υπολογίζονται με τη βοήθεια του ορισμού και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace. Στον Πίνακα 6.1 υπάρχουν οι ιδιότητες του ML, ενώ στον Πίνακα 6.2 υπάρχουν οι ML και οι αντίστοιχες περιοχές σύγκλισης για τις πλέον συνηθισμένες και χρήσιμες περιπτώσεις.

6.2 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Αν σ είναι ένας πραγματικός αριθμός, έχουμε παρατηρήσει ότι ο ML $X(s)$ του σήματος $x(t)$ συμπίπτει με το MF του σήματος $x_\sigma(t) = x(t)e^{-\sigma t}$ σε όλα τα σημεία του μιγαδικού

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.1 Οι ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	ML	Πεδίο σύγκλισης
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$	$R = \{s: \sigma_1 < \Re[s] < \sigma_2\}$ R_1 R_2
Γραμμικότητα	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	$R_1 \cap R_2$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	R
Μετατόπιση στη μιγαδική συχνότητα	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$R + \Re[s_0]$
Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{R}{a}$
Παραγωγή στη συχνότητα	$(-t)^n x(t)$	$\frac{d^n}{ds^n} X(s)$	R
Ολοκλήρωση στη συχνότητα	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^\infty X(\xi) d\xi$	R
ML παραγώγου	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	R
ML ολοκληρώματος	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	R
Η ιδιότητα της συνέλιξης	$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$	$Y(s) = X_1(s) \cdot X_2(s)$	$R_1 \cap R_2$
Περιοδικά σήματα	$x(t) = x(t+T)$	$X(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T x(t) e^{-st} dt$	$\Re[s] > 0$

επιπέδου- s που ανήκουν στην ευθεία $\Re[s] = \sigma$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \text{ ή} \\
 X(\sigma + j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_\sigma(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6.2.1)
 \end{aligned}$$

Έτσι, αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αντιστροφής του MF, παίρνουμε

$$x(t) e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1} [X(\sigma + j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6.2.2)$$

ή πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $e^{\sigma t}$ έχουμε

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega \quad (6.2.3)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2 Μετασχηματισμοί Laplace μερικών βασικών σημάτων

	Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	Περιοχή σύγκλισης
1	$\delta(t)$	1	Για κάθε s
2	$u(t)$	$1/s$	$\Re[s] > 0$
3	$-u(-t)$	$1/s$	$\Re[s] < 0$
4	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re[s] > -\Re[a]$
5	$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re[s] < -\Re[a]$
6	$\frac{t^m}{m!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{m+1}}$	$\Re[s] > -\Re[a]$
7	$-\frac{t^m}{m!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^{m+1}}$	$\Re[s] < -\Re[a]$
8	$\delta(t-T), T \geq 0$	e^{-sT}	Για κάθε s
9	$[\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re[s] > 0$
10	$[\sin(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re[s] > 0$
11	$[e^{-at} \cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\Re[s] > -\Re[a]$
11	$[e^{-at} \sin(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\Re[s] > -\Re[a]$
13	$u_n(t) = \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	s^n	Για κάθε s

με αλλαγή μεταβλητής από $\sigma + j\omega$ σε s οδηγούμαστε στην εξίσωση αντιστροφής του ML (είναι $ds = j d\omega$ αφού η σ είναι σταθερά) ή

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (6.2.4)$$

Το ολοκλήρωμα έχει την έννοια ότι η ολοκλήρωση εκτελείται πάνω στην ευθεία $\Re[s] = \sigma$, η οποία πρέπει να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του $X(s)$.

6.2.1 Υπολογισμός του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace

Ο απευθείας υπολογισμός του αντίστροφου ML μέσω της επίλυσης του ολοκληρώματος της (6.2.4) απαιτεί εφαρμογή τεχνικών ολοκλήρωσης μιγαδικών συναρτήσεων. Η μέθοδος αυτή μπορεί να αποδειχθεί επίπονη διαδικασία και για το λόγο αυτό συνήθως ακολουθούνται έμμεσοι τρόποι υπολογισμού του αντίστροφου ML.

Αν η μορφή της συνάρτησης $X(s)$ είναι απλή και μπορεί εύκολα να εκφραστεί ως άθροισμα επιμέρους στοιχειωδών όρων, τότε με τη χρήση των γνωστών ML (Πίνακας

6.2) και των ιδιοτήτων του ML μπορούμε απευθείας να υπολογίσουμε τον $L^{-1}[X(s)] = x(t)$. Όπως έχουμε παρατηρήσει και στα αντίστοιχα παραδείγματα, στα περισσότερα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στη θεωρία των συστημάτων, ο ML έχει τη μορφή ρητής συνάρτησης. Στις περιπτώσεις αυτές ο ML μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα απλών κλασμάτων, για καθένα από τα οποία υπολογίζουμε τον αντίστροφο ML, με τη βοήθεια του Πίνακα 6.2. Στο Παράρτημα Β περιγράφονται οι τρόποι ανάλυσης ρητών συναρτήσεων σε απλά κλάσματα. Στα παραδείγματα που ακολουθούν εφαρμόζουμε τη μέθοδο αυτή.

Παράδειγμα 6.2.1 (Οι ρίζες του παρονομαστή είναι απλές και πραγματικές)

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης $X(s)$, όπου

$$X(s) = \frac{3s + 7}{s^2 + 4s + 3}, \text{ με ΠΣ } \Re[s] > -1 \quad (6.2.5)$$

Λύση Οι ρίζες του παρονομαστή είναι $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = -3$. Η $X(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα απλών κλασμάτων

$$X(s) = \frac{3s + 7}{s^2 + 4s + 3} = \frac{C_1}{s + 1} + \frac{C_2}{s + 3} \quad (6.2.6)$$

και υπολογίζουμε τις σταθερές C_1 και C_2 ως εξής:

$$C_1 = (s + 1)X(s)|_{s=-1} = \frac{3s + 7}{s + 3} \Big|_{s=-1} = 2$$

και

$$C_2 = (s + 3)X(s)|_{s=-3} = \frac{3s + 7}{s + 1} \Big|_{s=-3} = 1$$

Άρα

$$X(s) = \frac{2}{s + 1} + \frac{1}{s + 3} \quad (6.2.7)$$

Ο $L^{-1}[X(s)]$ είναι ίσος με το άθροισμα των αντίστροφων ML των απλών κλασμάτων οι οποίοι βρίσκονται εύκολα με τη βοήθεια του ζεύγους (4) του Πίνακα 6.2. Τελικά ο ζητούμενος αντίστροφος ML είναι

$$x(t) = [2e^{-t} + e^{-3t}] u(t) \quad (6.2.8)$$

Παράδειγμα 6.2.2 (Υπαρξη πολλαπλής πραγματικής ρίζας στον παρονομαστή)

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης $X(s)$, όπου

$$X(s) = \frac{s^2 - 3s + 1}{(s - 1)^2(s - 2)}, \text{ με ΠΣ } \Re[s] > 2 \quad (6.2.9)$$

Λύση Ο παρονομαστής έχει μία διπλή πραγματική ρίζα την $\rho_1 = 1$ και μία απλή την $\rho_2 = 2$. Η $X(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα απλών κλασμάτων

$$X(s) = \frac{C_{11}}{s-1} + \frac{C_{12}}{(s-1)^2} + \frac{C_{21}}{s-2} \quad (6.2.10)$$

και υπολογίζουμε τις σταθερές C_{11} , C_{12} και C_{21}

$$C_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds} [(s-1)^2 X(s)] \Big|_{s=1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{s^2 - 3s + 1}{s-2} \right] \Big|_{s=1} = 2$$

και

$$C_{12} = (s-1)^2 X(s) \Big|_{s=1} = \frac{s^2 - 3s + 1}{s-2} \Big|_{s=1} = 1$$

$$C_{21} = (s-2)X(s) \Big|_{s=2} = \frac{s^2 - 3s + 1}{(s-1)^2} \Big|_{s=2} = -1$$

Άρα

$$X(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-2} \quad (6.2.11)$$

Με τη βοήθεια των ζευγών ML (4) και (6) του Πίνακα 6.2, ο $L^{-1}[X(s)]$ προκύπτει

$$x(t) = [te^t + 2e^t - e^{2t}] u(t) \quad (6.2.12)$$

Παράδειγμα 6.2.3 (Υπαρξη μιγαδικών ριζών στον παρονομαστή)

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης $X(s)$, όπου

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13}, \text{ με } \text{ΠΣ } \Re[s] > -2 \quad (6.2.13)$$

Λύση Οι ρίζες του παρονομαστή είναι $\rho_1 = -2+3j$ και $\rho_2 = -2-3j$. Η $X(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα απλών κλασμάτων

$$X(s) = \frac{C_1}{s+2-3j} + \frac{C_2}{s+2+3j} \quad (6.2.14)$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές C_1 και C_2

$$C_1 = (s+2-3j)X(s) \Big|_{s=-2+3j} = \frac{s+2}{s+2+3j} \Big|_{s=-2+3j} = \frac{1}{2}$$

και

$$C_2 = (s+2+3j)X(s) \Big|_{s=-2-3j} = \frac{s+2}{s+2-3j} \Big|_{s=-2-3j} = \frac{1}{2}$$

Άρα

$$X(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+2+3j} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2-3j} \quad (6.2.15)$$

Ο αντίστροφος ML λόγω της (4) του Πίνακα 6.2 είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \left[e^{-(2+3j)t} + e^{-(2-3j)t} \right] u(t) \\ &= \frac{1}{2} e^{-2t} \left[e^{-3jt} + e^{3jt} \right] u(t) \\ &= e^{-2t} \cos(3t) u(t) \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

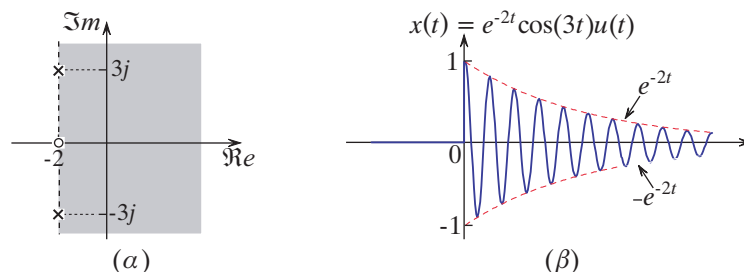
Στην περίπτωση που έχουμε μιγαδικές ρίζες, μπορούμε να ακολουθήσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο, ο οποίος βασίζεται στα ζεύγη ML (9), (10), (11) και (12) του Πίνακα 6.2. Η $X(s)$ γράφεται

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} \quad (6.2.17)$$

Με τη βοήθεια του ζεύγους ML (11) στο Πίνακα 6.2 παρατηρούμε ότι

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = e^{-2t} \cos(3t) u(t) \quad (6.2.18)$$

Στο Σχήμα 6.7 φαίνονται οι συζυγείς μιγαδικοί πόλοι, οι οποίοι βρίσκονται στο αρνητικό ημιεπίπεδο, το μηδενικό και η περιοχή σύγκλισης του $X(s)$, η οποία περιέχει το φανταστικό άξονα. Παρατηρούμε ότι το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό αφού το πεδίο σύγκλισης είναι το δεξιό ημιεπίπεδο και είναι ένα φθίνον συνημιτονοειδές σήμα.



Σχήμα 6.7 (α) Η περιοχή σύγκλισης, οι πόλοι και το μηδενικό του ML (β) του σήματος $x(t)$ στο Παράδειγμα 6.2.3.

6.3 Ο ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Στην Παράγραφο 6.1 ορίσαμε τον ML. Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε το *Μονόπλευρο Μετασχηματισμό Laplace* (MML) του σήματος $x(t)$. Θα εστιάσουμε στα βασικά σημεία του MML και κυρίως σε αυτά που τον διαφοροποιούν από το ML.

Η διαφορά μεταξύ των δύο μετασχηματισμών εντοπίζεται στα όρια ολοκλήρωσης του ορισμού. Αν το κάτω όριο στο ολοκλήρωμα στη σχέση (6.1.3) είναι το μηδέν, τότε ορίζεται ο *μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace*

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{X}(s) = X^+(s) \equiv \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (6.3.1)$$

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $s = \sigma + j\omega$ πάνω στο οποίο υπάρχει και ορίζεται η $\mathcal{X}(s)$, όπου δηλαδή το αντίστοιχο ολοκλήρωμα ορισμού συγκλίνει, ονομάζεται *περιοχή σύγκλισης* (ΠΣ) της $\mathcal{X}(s)$.

Προφανώς, αν δύο σήματα είναι διαφορετικά για $t < 0$ και ίσα για $t \geq 0$, τότε έχουν τον ίδιο MML και διαφορετικό ML. Για αιτιατά σήματα, $x(t) = 0$ για $t < 0$, ο ML και ο MML συμπίπτουν. Με άλλα λόγια ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace του σήματος $x(t)u(t)$. Εφόσον το σήμα $x(t)u(t)$ είναι αιτιατό σήμα, η περιοχή σύγκλισης του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace είναι πάντα το μέγιστο δεξιό ημιεπίπεδο που δεν περιέχει πόλους του συστήματος. Η διαφορά μεταξύ των δύο ορισμών είναι ουσιαστική, και όπως θα δούμε, παρέχει στο MML τη δυνατότητα επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες έχουν *μη μηδενικές αρχικές συνθήκες*. Όταν το σήμα περιέχει συναρτήσεις $\delta(t)$, ο ορισμός του ορίου στο μηδέν απαιτεί προσοχή, διότι το αποτέλεσμα θα εξαρτάται εάν προσεγγίζουμε το μηδέν από αριστερά ή από δεξιά. Στην περίπτωση μας θεωρούμε το όριο από αριστερά ($t \rightarrow 0^-$) και επομένως η συνάρτηση $\delta(t)$ εμπεριέχεται στο ολοκλήρωμα. Εάν δεν υπάρχουν συναρτήσεις $\delta(t)$, το παραπάνω σχόλιο είναι άνευ σημασίας.

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace έχει παρόμοιες ιδιότητες με το μετασχηματισμό Laplace τις οποίες παραθέτουμε στον Πίνακα 6.3. Μία διαφορά υπάρχει στην ιδιότητα παραγωγίσης στο χρόνο.

(1) Παραγωγή στο πεδίο του χρόνου

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{X}(s)$ με ΠΣ R και η συνάρτηση (σήμα) $x(t)$ είναι παραγωγίσιμη για $t \geq 0$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου της είναι

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s\mathcal{X}(s) - x(0^-) \text{ με την ίδια ΠΣ } R$$

Απόδειξη

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= [x(t)e^{-st}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} sx(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)e^{-st}] - \lim_{t \rightarrow 0} [x(t)e^{-st}] + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Δεδομένου ότι η $x(t)$ είναι εκθετικής τάξης θα υπάρχει $M > 0$ και t_0 για τα οποία

$$|x(t)e^{-st}| = |x(t)| e^{-\sigma t} < M e^{at} e^{-\sigma t} = M e^{(\sigma-a)t}$$

για κάθε $t \geq t_0$. Έτσι, $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)e^{-st}] = 0$ όταν $\Re[s] > a$. Επίσης, είναι $\lim_{t \rightarrow 0} [x(t)e^{-st}] = x(0^-)$ και $\int_0^\infty x(t)e^{-st} dt = \mathcal{X}(s)$. Επομένως, έχουμε

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s\mathcal{X}(s) - x(0^-), \quad \Re[s] > a$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή το κάτω όριο του ολοκληρώματος ορισμού του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace είναι το μηδέν, στο μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace της παραγώγου του $x(t)$ υπάρχει η αρχική συνθήκη $x(0^-)$.

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου τάξης n είναι

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^n \mathcal{X}(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0^-} - \dots - \left. \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

Μία δεύτερη διαφορά υπάρχει στην ιδιότητα της ολοκλήρωσης στο χρόνο.

(2) Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{X}(s)$ με ΠΣ R , τότε

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \mathcal{X}(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau = \frac{\mathcal{X}(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s}$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι $\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$. Η $y(t)$ είναι παραγωγίσιμη, αν η $x(t)$ είναι συνεχής. Επίσης είναι εκθετικής τάξης. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγωγισής στο πεδίο του χρόνου έχουμε

$$\mathcal{L} \left[\frac{dy(t)}{dt} \right] = \mathcal{L}[x(t)] \Rightarrow s\mathcal{Y}(s) - y(0^-) = \mathcal{X}(s)$$

Επομένως, έχουμε

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\mathcal{X}(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s}$$

Παρατηρούμε ότι στο μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace του ολοκληρώματος του $x(t)$ υπάρχει η αρχική συνθήκη $y(0^-)$.

Τέλος, ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace παρέχει τη δυνατότητα να προσδιορισθεί η αρχική τιμή $x(0^+)$ και το $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ με το θεώρημα της αρχικής και τελικής τιμής και όχι μέσω του ίδιου του σήματος $x(t)$.

(3) Θεώρημα αρχικής τιμής

Έστω το σήμα $x(t)$, το οποίο δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο $t = 0$, με MML $\mathcal{X}(s)$ και περιοχή σύγκλισης $\Re[s] > \sigma_0$. Τότε ισχύει

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{X}(s) \text{ (Αρχική τιμή)}$$

όπου $x(0^+)$ είναι η τιμή του σήματος $x(t)$ όταν η μεταβλητή t πλησιάζει το μηδέν από θετικές τιμές.

(4) Θεώρημα τελικής τιμής

Έστω το σήμα $x(t)$, με MML $\mathcal{X}(s)$ και περιοχή σύγκλισης $\Re[s] > \sigma_0$. Αν η $s\mathcal{X}(s)$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο φανταστικό άξονα και στο δεξιό μιγαδικό ημιπίεδο, τότε ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{X}(s) \text{ (Τελική τιμή)}$$

Το θεώρημα της τελικής τιμής χρησιμοποιείται στη μελέτη γραμμικών συστημάτων για τον προσδιορισμό των τιμών ισορροπίας και της μόνιμης κατάστασης τους.

Οι ιδιότητες αυτές αποτελούν τη *δύναμη του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace* γιατί έχουμε τη δυνατότητα να επιλύουμε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και να αναλύουμε ΓΧΑ συστήματα τα οποία δεν βρίσκονται σε ηρεμία.

6.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE

Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε τις εφαρμογές των μετασχηματισμών Laplace. Ειδικότερα θα αξιοποιήσουμε τη δυνατότητα που παρέχει ο MML για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων οι οποίες έχουν μη μηδενικές αρχικές συνθήκες και θα την εφαρμόσουμε στη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων. Τελειώνοντας, θα εξετάσουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της θέσης των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο με τις ιδιότητες της αιτιότητας και της ευστάθειας ενός ΓΧΑ συστήματος.

6.4.1 Επίλυση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με τη βοήθεια MML

Λόγω της ιδιότητας του MML που αναφέρεται στην παράγωγο και το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης, έχουμε τη δυνατότητα να επιλύουμε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Η γενική μορφή μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = g(t) \quad (6.4.1)$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(t)|_{t=0} = b_0, \quad \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0} = b_1, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0} = b_{n-1} \quad (6.4.2)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3 Οι ιδιότητες του Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μονόπλευρος ML
	$x(t)$	$\mathcal{X}(s)$
	$x_1(t)$	$\mathcal{X}_1(s)$
	$x_2(t)$	$\mathcal{X}_2(s)$
Γραμμικότητα	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$a\mathcal{X}_1(s) + b\mathcal{X}_2(s)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{s_0 t} x(t)$	$\mathcal{X}(s - s_0)$
Κλιμάκωση στο χρόνο	$x(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} \mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
Συνέλιξη $x_1(t) = x_2(t) = 0$ για $t < 0$	$x_1(t) \star x_2(t)$	$\mathcal{X}_1(s) \cdot \mathcal{X}_2(s)$
Παραγωγή στο χρόνο*	$\frac{d}{dt} x(t)$	$s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$
Παραγωγή στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} \mathcal{X}(s)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο*	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{\mathcal{X}(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s}$
Αρχικής τιμής	$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{X}(s)$	
Τελικής τιμής	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{X}(s)$	

* Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν, οι ιδιότητες της παραγωγής και τις ολοκλήρωσης του MML είναι οι ίδιες με τις αντίστοιχες του ML.

Τα βήματα που ακολουθούμε για την επίλυση της είναι:

1. Παίρνουμε το MML και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Λόγω της γραμμικότητας, ο MML του αριστερού μέρους ισούται με το άθροισμα των MML των επιμέρους όρων.
2. Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς τον MML $\mathcal{X}(s)$ της συνάρτησης $x(t)$.
3. Βρίσκουμε τον $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{X}(s)]$, δηλαδή τη λύση $x(t)$.

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 6.4.1

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) + 2 \int_{-\infty}^t x(\xi) d\xi = u(t) \quad (6.4.3)$$

με αρχικές συνθήκες $x(0)^- = 2$ και $\int_{-\infty}^{0^-} x(\xi) d\xi = 0$.

Λύση Εφαρμόζοντας MML και στα δύο μέρη της (6.4.3) και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που αναφέρονται στην παράγωγο, το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης και τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$s\mathcal{X}(s) - x(0^-) + 3\mathcal{X}(s) + \frac{2\mathcal{X}(s)}{s} + \frac{2}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\xi) d\xi = \frac{1}{s}$$

ή

$$s\mathcal{X}(s) - 2 + 3\mathcal{X}(s) + \frac{2\mathcal{X}(s)}{s} = \frac{1}{s}$$

και τελικά

$$\mathcal{X}(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2} = -\frac{1}{s + 1} + \frac{3}{s + 2} \quad (6.4.4)$$

Εφόσον $x(t) = 0$, για $t < 0$, οι $\mathcal{X}(s)$ και $X(s)$ ταυτίζονται. Άρα, ο αντίστροφος MML της $\mathcal{X}(s)$ δίνει τη λύση της διαφορικής εξίσωσης που είναι

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{X}(s)] = [-e^{-t} + 3e^{-2t}] u(t) \quad (6.4.5)$$

6.4.2 Η χρήση του μετασχηματισμού Laplace στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων

Στην παράγραφο αυτή θα εστιάσουμε σε εφαρμογές του ML στη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων βασισμένοι στη γνώση των αντίστοιχων σημάτων εισόδου και εξόδου. Στο Κεφάλαιο 2, είδαμε ότι η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος συνδέεται με την είσοδό του $x(t)$ με το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

$$y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau) d\tau \quad (6.4.6)$$

Λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης του ML έχουμε

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \text{ με ΠΣ τουλάχιστον την } R_H \cap R_X \quad (6.4.7)$$

όπου $H(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος (Ενότητα 2.5).

Παρατηρούμε ότι η $H(s)$ δίνεται ως πηλίκο των ML της εξόδου του συστήματος προς τον ML της εισόδου του συστήματος, δηλαδή $H(s) = Y(s)/X(s)$.

Στο Κεφάλαιο 2, επίσης, έχουμε δει ότι αν εκμεταλλευθούμε τις φυσικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των στοιχείων ενός συστήματος ΓΧΑ, καταλήγουμε σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, η οποία έχει τη γενική μορφή

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (6.4.8)$$

όπου a_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N$ και b_k , $k = 0, 1, 2, \dots, M$ πραγματικές σταθερές, οι οποίες περιγράφουν το σύστημα. Εφαρμόζοντας το ML και στα δύο μέλη της (6.4.8), καταλήγουμε στη σχέση

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (6.4.9)$$

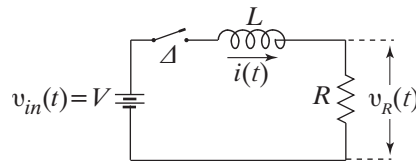
Από την (6.4.9) υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με τη βοήθεια των συντελεστών a_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N$ και b_k , $k = 0, 1, 2, \dots, M$.

Παρατήρηση: Τόσο η (6.4.7) όσο και η (6.4.9), προϋποθέτουν ότι γνωρίζουμε τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις για $t > -\infty$, με άλλα λόγια για μηδενικές αρχικές συνθήκες. Εάν οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις είναι αιτιατές και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν, θα φτάσουμε στις (6.4.7) και (6.4.9) και με τον MML, που σε αυτήν την περίπτωση ταυτίζεται με τον ML. Δηλαδή, η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ έχει νόημα μόνο κάτω από μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Τονίζεται ότι, επειδή η συνάρτηση $H(s)$ χαρακτηρίζει το σύστημα, θα πρέπει λοιπόν να μην εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες στις οποίες βρίσκεται το σύστημα.

Παράδειγμα 6.4.2

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του κυκλώματος του Σχήματος 6.8.



Σχήμα 6.8 Το κύκλωμα του Παραδείγματος 6.4.2.

Λύση Εφαρμόζουμε το δεύτερο κανόνα Kirchhoff στο κύκλωμα και παίρνουμε

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v_{in}(t) \quad (6.4.10)$$

και επειδή $v_R = iR$, $\frac{dv_R}{dt} = R \frac{di}{dt}$ έχουμε

$$\frac{dv_R(t)}{dt} + \frac{R}{L} v_R(t) = \frac{R}{L} v_{in}(t) \quad (6.4.11)$$

Έτσι, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (6.4.11) παίρνουμε

$$sV_R(s) + \frac{R}{L} V_R(s) = \frac{R}{L} V_{in}(s)$$

από την οποία προσδιορίζεται η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος

$$H(s) = \frac{R/L}{s + R/L} \quad (6.4.12)$$

Το σύστημα έχει ένα πόλο στο σημείο $-R/L$, με αποτέλεσμα το ΠΣ είναι $\Re[s] > -R/L$, αφού το σύστημα ως φυσικό σύστημα πρέπει να είναι αιτιατό. Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t) \quad (6.4.13)$$

Αν δεν έχουμε αρχικές συνθήκες, τότε η έξοδος συστήματος προσδιορίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης στο χρόνο γνωρίζοντας τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και το ML του σήματος εισόδου.

Παράδειγμα 6.4.3

Δίνεται το κύκλωμα του Σχήματος 6.8. Αν το κύκλωμα αρχικά ηρεμεί και στην είσοδό του, κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, εφαρμόσουμε πηγή σταθερής τάσης V , να προσδιοριστεί η τάση στα άκρα της αντίστασης, $v_R(t)$, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση Επειδή η είσοδος είναι πηγή σταθερής τάσης, η οποία εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, έχουμε

$$v_{in}(t) = Vu(t) \xleftrightarrow{L} V_{in}(s) = \frac{V}{s}, \quad \Re[s] > 0 \quad (6.4.14)$$

Το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία και ο ML της εξόδου $V_R(s)$ υπολογίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης που δίνει

$$\begin{aligned} V_R(s) = H(s)V_{in}(s) &= \frac{V(R/L)}{s[s + (R/L)]} \\ &= V \frac{R}{L} \left(\frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s + (R/L)} \right) \\ &= V \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + (R/L)} \right), \quad \Re[s] > 0 \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

όπου η $V_R(s)$ έχει αναλυθεί σε απλά κλάσματα και οι σταθερές $C_1 = L/R$ και $C_2 = -L/R$ έχουν προκύψει με το γνωστό τρόπο. Η έξοδος $v_R(t)$ υπολογίζεται με τον αντίστροφο ML της $V_R(s)$, δηλαδή

$$v_R(t) = Vu(t) - Ve^{-\frac{R}{L}t}u(t) = V \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) u(t) \quad (6.4.16)$$

Αν έχουμε αρχικές συνθήκες, τότε στη διαφορική εξίσωση (6.4.8), λόγω των ιδιοτήτων της παραγώγισης στο χρόνο και της ολοκλήρωσης στο χρόνο που έχει ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace, συμπεριλαμβάνουμε τις αρχικές συνθήκες και στην $Y(s) = H(s)X(s)$ εμφανίζεται και ένας επιπλέον όρος ο οποίος προέρχεται από τις αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα 6.4.4

Δίνεται το κύκλωμα του Σχήματος 6.8. Αν η τάση στα άκρα της αντίστασης αρχικά είναι $v_R(0^-)$ και κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, εφαρμόσουμε πηγή σταθερής τάσης V , να προσδιοριστεί η τάση στα άκρα της αντίστασης, $v_R(t)$, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση Επειδή το σύστημα έχει αρχικές συνθήκες, εφαρμόζοντας το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης (6.4.11), που χαρακτηρίζει το κύκλωμα, ενσωματώνουμε τις αρχικές συνθήκες και έχουμε

$$\begin{aligned} s\mathcal{V}_R(s) - v_R(0^-) + \frac{R}{L}\mathcal{V}_R(s) &= \frac{R}{L}\mathcal{V}_{in}(s) \\ \left(s + \frac{R}{L}\right)\mathcal{V}_R(s) &= \frac{R}{L}\mathcal{V}_{in}(s) + v_R(0^-) \\ \mathcal{V}_R(s) &= \frac{R/L}{s + R/L}\mathcal{V}_{in}(s) + \frac{1}{s + R/L}v_R(0^-) \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

Επειδή το σήμα εισόδου είναι αιτιατό, ο MML του είναι ίσος με το ML

$$v_{in}(t) = Vu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{V}_{in}(s) = \frac{V}{s} \quad (6.4.18)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_R(s) &= \frac{R/L}{s + R/L} \frac{V}{s} + \frac{1}{s + R/L} v_R(0^-) \\ \mathcal{V}_R(s) &= V \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right) + v_R(0^-) \frac{1}{s + R/L} \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

Συγκρίνοντας την (6.4.15) με την (6.4.19) παρατηρούμε ότι ο $\mathcal{V}_R(s)$ περιέχει έναν επιπλέον όρο ο οποίος εξαρτάται από την αρχική συνθήκη στην οποία βρίσκεται το σύστημα. Η έξοδος $v_R(t)$ υπολογίζεται με τον αντίστροφο ML της $\mathcal{V}_R(s)$, δηλαδή,

$$v_R(t) = V \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) u(t) + v_R(0^-) e^{-\frac{R}{L}t} u(t) \quad (6.4.20)$$

Παράδειγμα 6.4.5

Δίνεται το κύκλωμα του Σχήματος 6.8. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου όταν το σήμα εισόδου είναι $x(t) = te^{2t}u(t)$. Δίνεται ότι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι $\tau = L/R = 0,2\text{sec}$ και το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία.

Λύση Με τη βοήθεια των (6.4.12) και (6.1.23) βρίσκονται οι ML της κρουστικής απόκρισης του συστήματος και του σήματος εισόδου $x(t)$

$$H(s) = \frac{5}{s+5}, \text{ με } \Re[s] > -5$$

και

$$X(s) = \frac{1}{(s-2)^2}, \text{ με } \Re[s] > 2$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι η σταθερά χρόνου του συστήματος είναι 0, 2sec. Με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης βρίσκεται ο ML της εξόδου του συστήματος

$$Y(s) = \frac{5}{(s-2)^2(s+5)}, \text{ με } \Re[s] > 2 \quad (6.4.21)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα εισόδου δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, επομένως δεν υπάρχει ο MF του και ως εκ τούτου δεν είναι δυνατή η χρήση των μεθόδων που χρησιμοποιούν μετασχηματισμούς Fourier για τη λύση του προβλήματος.

Παράδειγμα 6.4.6

Να προσδιορισθεί η αρχική και η τελική τιμή του σήματος $x(t)$ του οποίου ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\mathcal{X}(s) = \frac{7s + 10}{s(s + 2)}$$

Λύση Εφαρμόζοντας το θεώρημα της αρχικής τιμής βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} x(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{7s + 10}{s(s + 2)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{7s + 10}{(s + 2)} \\ &= 7 \end{aligned} \quad (6.4.22)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της τελικής τιμής βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} x(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{7s + 10}{s(s + 2)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{7s + 10}{(s + 2)} \\ &= 5 \end{aligned} \quad (6.4.23)$$

Σημειώνεται ότι η αρχική και η τελική τιμή μπορεί να βρεθεί αφού προσδιορισθεί η αναλυτική μορφή του σήματος και στη συνέχεια προσδιορισθεί η αρχική και η τελική τιμή του σήματος. Πράγματι, παρατηρούμε ότι ο $\mathcal{X}(s)$ είναι ο MML του σήματος $x(t) = 5u(t) + 2e^{-2t}u(t)$ από την οποία επαληθεύουμε ότι $x(0^+) = 7$ και $x(\infty) = 5$.

6.4.3 Παρατηρήσεις για την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace

Όπως γνωρίζουμε, ο ML είναι συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής s . Υπενθυμίζουμε ότι οι ρίζες του αριθμητή $N(s)$ στην (6.1.16) ονομάζονται μηδενικά της $H(s)$. Προφανώς στα σημεία αυτά η $H(s)$ μηδενίζεται. Επίσης, οι ρίζες του παρονομαστή $D(s)$, όπου η $H(s)$ δεν ορίζεται, ονομάζονται πόλοι της $H(s)$.

Για να είναι ένα σύστημα αιτιατό πρέπει η περιοχή σύγκλισης να είναι το δεξιό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση $-\Re[a_k]_{max}$, όπου a_k με $k = 1, 2, \dots$ είναι οι πόλοι της $H(s)$

και max συμβολίζει τον πόλο με το μέγιστο πραγματικό μέρος (βλέπε Παράδειγμα 6.1.3). Με άλλα λόγια, το πεδίο σύγκλισης ενός αιτιατού συστήματος είναι το μέγιστο δυνατό δεξιό ημιεπίπεδο, το οποίο δεν περιέχει πόλους της $H(s)$.

Αν ο βαθμός του πολωνύμου του $N(s)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του πολωνύμου $D(s)$, τότε, πριν αναλύσουμε σε απλά κλάσματα, πρέπει να εκτελέσουμε τη διαίρεση $N(s)/D(s)$. Στην περίπτωση αυτή η $H(s)$ περιλαμβάνει όρους της μορφής cs^k , $k > 0$. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα στη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, του οποίου υπάρχει ο όρος cs . Τότε, αν η είσοδος του συστήματος είναι η $u(t)$, η οποία έχει ML ίσο με $1/s$, η έξοδος του συστήματος θα είναι η $y(t) = L^{-1}[cs(1/s)] = cd(t)$. Παρατηρούμε ότι, η έξοδος του συστήματος δεν είναι φραγμένη, σε αντίθεση με την είσοδό του η οποία είναι φραγμένη. Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε σε ένα πρώτο συμπέρασμα:

“όταν ο βαθμός του πολωνύμου του $N(s)$ είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του πολωνύμου $D(s)$ το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές”.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι πέρα από τη σχέση των βαθμών των πολωνύμων $N(s)$ και $D(s)$, η θέση των πόλων της $H(s)$ καθορίζει την ευστάθεια του συστήματος. Στο Παράδειγμα 2.4.1 έχουμε δει ότι για να είναι ένα σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει η κρουστική απόκρισή του να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη. Στην περίπτωση όμως αυτή υπάρχει ο MF της, δηλαδή η απόκριση συχνότητας του συστήματος $H(\omega)$. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι για να υπάρχει ο MF πρέπει το πεδίο σύγκλισης του ML να περιέχει το φανταστικό άξονα. Έτσι:

“για να είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές, πρέπει ο φανταστικός άξονας να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του ML”.

Συνδυάζοντας τώρα τα παραπάνω καταλήγουμε ότι για να είναι ένα σύστημα ταυτόχρονα αιτιατό και ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει

1. η περιοχή σύγκλισης να είναι το δεξιό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση $-\Re[a_k]_{max}$ και
2. ο φανταστικός άξονας να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του ML.

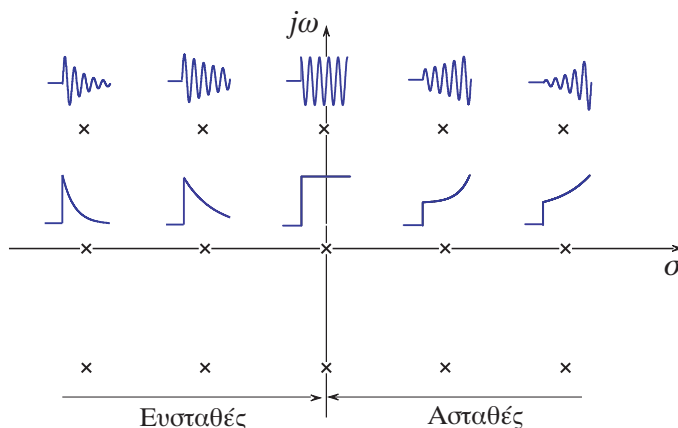
Γενικότερα, η θέση των πόλων του ML $X(s)$ ενός σήματος στο μιγαδικό επίπεδο- s προσδιορίζει τη συμπεριφορά του σήματος. Ειδικότερα, ισχύουν τα εξής

1. Απλοί πόλοι στο αρνητικό ημιεπίπεδο ($\Re[s] < 0$ και $\Im m[s] = 0$) του επιπέδου- s αντιστοιχούν σε σήματα τα οποία στο πεδίο του χρόνου είναι πολλαπλασιασμένα με $e^{-|a|t}$ που φθίνει εκθετικά προς το μηδέν, καθώς $t \rightarrow \infty$. Σε αντίθεση, απλοί

πόλοι στο δεξιό ημιεπίπεδο του s αντιστοιχούν σε σήματα πολλαπλασιασμένα με $e^{|a|t}$, που αυξάνεται εκθετικά προς το άπειρο καθώς $t \rightarrow \infty$.

2. Απλοί πόλοι στο φανταστικό άξονα αντιστοιχούν σε σήματα των οποίων το πλάτος παραμένει σταθερό με το χρόνο, ενώ πολλαπλοί πόλοι στο φανταστικό άξονα αντιστοιχούν σε σήματα πολλαπλασιασμένα με t^n .
3. Μιγαδικοί συζυγείς πόλοι αντιστοιχούν σε σήματα που υφίστανται ταλάντωση, ήτοι περιέχουν ημιτονικούς όρους (Παράδειγμα 6.2.3). Αν το πραγματικό μέρος των συζυγών πόλων είναι μηδέν, τότε έχουμε αμείωτες ταλαντώσεις, ενώ αν το πραγματικό μέρος είναι μη μηδενικό, έχουμε ταλαντώσεις εκθετικά αύξουσες, αν οι συζυγείς πόλοι βρίσκονται στο θετικό ημιεπίπεδο, ή εκθετικά φθίνουσες, αν οι συζυγείς πόλοι βρίσκονται στο αρνητικό ημιεπίπεδο.

Παρόμοια ισχύουν και για την κρουστική απόκριση ενός συστήματος ανάλογα με τη θέση των πόλων της $H(s)$ στο μιγαδικό επίπεδο. Στο Σχήμα 6.9 παριστάνονται οι ιδιότητες ενός αιτιατού συστήματος και η συμπεριφορά της κρουστικής απόκρισής του, όπως αυτή προσδιορίζεται από τη θέση των πόλων του στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 6.9 Οι ιδιότητες ενός συστήματος και η συμπεριφορά της κρουστικής του απόκρισης ανάλογα με τη θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς του στο μιγαδικό επίπεδο.

Παράδειγμα 6.4.7

Να δείχθει ότι το κύκλωμα του Σχήματος 6.8 είναι ευσταθές σύστημα.

Λύση Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος έχει ένα πόλο στη θέση $-(R/L) < 0$, δηλαδή στο αρνητικό ημιεπίπεδο. Επειδή το σύστημα ως πραγματικό σύστημα είναι αιτιατό, το πεδίο σύγκλισης πρέπει να είναι $\Re\{s\} > -\frac{R}{L}$. Παρατηρούμε ότι στο πεδίο σύγκλισης περιέχεται ο φανταστικός άξονας, με αποτέλεσμα το σύστημα να είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 6.4.8

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} \quad (6.4.24)$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση Η $H(s)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα της μορφής

$$H(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{s+2} + \frac{2}{3} \frac{1}{s-1} \quad (6.4.25)$$

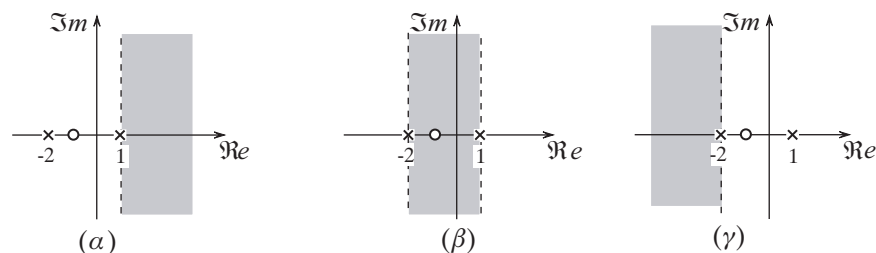
Για το ΓΧΑ σύστημα του παραδείγματος δεν προσδιορίζεται η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς. Οι πιθανές περιοχές σύγκλισης είναι οι τρεις, οι οποίες εικονίζονται στο Σχήμα 6.10. Αν το σύστημα είναι αιτιατό, η περιοχή σύγκλισης είναι $\Re[s] > 1$ (Σχήμα 6.10α) και η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \left[\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{2}{3} e^t \right] u(t) \quad (6.4.26)$$

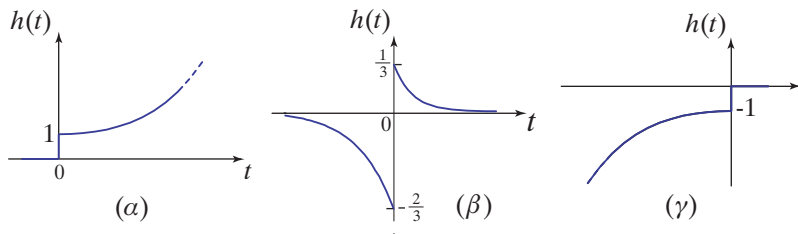
Στο Σχήμα 6.11α φαίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος όταν η περιοχή σύγκλισης είναι $\Re[s] > 1$. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα είναι αιτιατό αφού το πεδίο σύγκλισης είναι το μέγιστο δεξιό ημιεπίπεδο το οποίο δεν περιέχει πόλους. Το σύστημα δεν είναι όμως ευσταθές, αφού δεν περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης ο φανταστικός άξονας. Το ότι το σύστημα δεν είναι ευσταθές φαίνεται και από το ότι $h(t) \rightarrow \infty$ όταν $t \rightarrow \infty$.

Αν το σύστημα είναι ευσταθές, η περιοχή σύγκλισης είναι $-2 < \Re[s] < 1$ (Σχήμα 6.10β) και η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \frac{1}{3} e^{-2t} u(t) - \frac{2}{3} e^t u(-t) \quad (6.4.27)$$



Σχήμα 6.10 Οι πιθανές περιοχές σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς για το σύστημα του Παραδείγματος 6.4.8 (α) αιτιατό (β) ευσταθές και (γ) μη αιτιατό μη ευσταθές σύστημα.



Σχήμα 6.11 Οι πιθανές κρουστικές αποκρίσεις για το σύστημα του Παραδείγματος 6.4.8 (α) αιτιατό, (β) ευσταθές και (γ) μη αιτιατό μη ευσταθές σύστημα.

Στο Σχήμα 6.11β φαίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος όταν η περιοχή σύγκλισης είναι $-2 < \Re[s] < 1$. Παρατηρείστε ότι το σύστημα τώρα είναι ευσταθές, δεν είναι όμως αιτιατό.

Τέλος, αν η περιοχή σύγκλισης του συστήματος είναι $\Re[s] < -2$ (Σχήμα 6.10γ), το σύστημα δεν είναι ούτε αιτιατό, ούτε ευσταθές και η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \left[-\frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^t \right] u(-t) \quad (6.4.28)$$

Στο Σχήμα 6.11γ φαίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος όταν η περιοχή σύγκλισης είναι $\Re[s] < -2$.

Παράδειγμα 6.4.9

Δίνεται το γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα του οποίου η σχέση σήματος εισόδου εξόδου περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}x(t) - 2x(t) \quad (6.4.29)$$

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του αντιστρόφου συστήματος. Για το σύστημα αυτό υπάρχει αντίστροφο σύστημα το οποίο να είναι ευσταθές και αιτιατό;

Λύση Λαμβάνοντας μετασχηματισμό Laplace στα μέλη της (6.4.29) έχουμε

$$Y(s)(s + 3) = X(s)(s^2 + s - 2)$$

από την οποία βρίσκεται η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + s - 2}{s + 3} \quad (6.4.30)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του αντίστροφου συστήματος είναι

$$\begin{aligned} H^{\text{avt}}(s) &= \frac{1}{H(s)} \\ &= \frac{s + 3}{s^2 + s - 2} \\ &= \frac{s + 3}{(s - 1)(s + 2)} \end{aligned} \quad (6.4.31)$$

Το αντίστροφο σύστημα έχει δύο πόλους στο σημεία $s = 1$ και $s = -2$. Οι δύο πόλοι βρίσκονται εκατέρωθεν του φανταστικού άξονα, επομένως δεν είναι δυνατόν το μέγιστο δεξιό ημιεπίπεδο που δεν περιέχει πόλους (αιτιατό σύστημα) να περιέχει το φανταστικό άξονα (ευσταθές σύστημα). Άρα, για το σύστημα (6.4.30) δεν υπάρχει αντίστροφο σύστημα το οποίο να είναι συγχρόνως αιτιατό και ευσταθές.

Σύνοψη Κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό ορίσαμε το μετασχηματισμό Laplace και το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace, παρουσιάστηκαν οι ιδιότητές τους και υπολογίσαμε τους ML ορισμένων βασικών σημάτων, τα οποία συναντάμε στη μελέτη γραμμικών συστημάτων. Στη συνέχεια προσδιορίσαμε τον αντίστροφο ML. Είδαμε ότι, αν η μορφή του ML είναι απλή, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ML με τη βοήθεια του Πίνακα 6.2. Αν ο ML δεν έχει απλή μορφή αλλά είναι ρητή συνάρτηση, τότε αναλύουμε τη συνάρτηση σε απλά κλάσματα και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του ML και του Πίνακα 6.2 υπολογίζουμε εύκολα το σήμα χωρίς να καταφύγουμε στην εξίσωση αντιστροφής.

Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό αναπτύξαμε διάφορες εφαρμογές του ML. Ειδικότερα εξετάσαμε τη δυνατότητα που έχει ο MML να επιλύει γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, οι οποίες δεν έχουν μηδενικές αρχικές συνθήκες. Η δυνατότητα αυτή οφείλεται στις ιδιότητες του MML που αναφέρονται στην παράγωγο και το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης. Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν οι εφαρμογές των μετασχηματισμών Laplace σε ότι αφορά τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων. Προσδιορίσαμε τη συνάρτηση μεταφοράς συστήματος από τη διαφορική εξίσωση που συνδέει την έξοδο και την είσοδο του συστήματος, υποθέτοντας ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές. Επίσης, με τη βοήθεια της διαφορικής εξίσωσης, προσδιορίσαμε το MML της εξόδου συστήματος, το οποίο μπορεί να μη βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας, και αντιστρέφοντας το MML προσδιορίσαμε την έξοδο του συστήματος. Τέλος, παρουσιάστηκαν τα συμπεράσματα που εξάγουμε από την περιοχή σύγκλισης και τη θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο· αυτά αφορούν στην ευστάθεια και στην αιτιότητα του συστήματος καθώς και στη συμπεριφορά της κρουστικής απόκρισής του.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

6.1 Να υπολογιστεί το αιτιατό σήμα που έχει μετασχηματισμό Laplace

$$\alpha) X(s) = \frac{3s+7}{s^2+4s+3} \quad \beta) X(s) = \frac{3s-5}{s^2-2s-3}$$

$$\gamma) X(s) = \frac{s}{s^2+4} \quad \delta) X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13}$$

$$\epsilon) X(s) = \frac{2s^2+12}{s^3+4s} \quad \sigma) X(s) = \frac{s^2+5s+15}{s^3+3s^2}$$

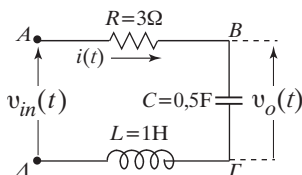
6.2 Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x_1(t) = u(t) - u(t-1)$ και $x_2(t) = u(t) - u(t-2)$ με τη βοήθεια της ιδιότητας της συνέλιξης του μετασχηματισμού Laplace.

6.3 Να βρεθούν τα αιτιατά σήματα των οποίων οι μετασχηματισμοί Laplace είναι

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad \text{και} \quad X_2(s) = \frac{s + 1}{(s + 3)(s^2 + 4s + 5)} \quad (6.4.32)$$

6.4 Για το κύκλωμα RLC που περιγράφεται στο Σχήμα 6.12.

1. Να προσδιοριστεί η γραμμική διαφορική εξίσωση η οποία συνδέει την είσοδο του κυκλώματος $v_{in}(t)$ και την έξοδο του $v_o(t)$.
2. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Είναι το σύστημα ευσταθές;
3. Αν η είσοδος του κυκλώματος είναι $v_{in}(t) = e^{-3t}u(t)$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, να υπολογίσετε την έξοδο $v_o(t)$ για $t > 0$, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι $v_o(0^-) = 1$ και $\left. \frac{dv_o(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = 2$.



Σχήμα 6.12 Το κύκλωμα του Προβλήματος 6.4.

6.5 Η συνάρτηση μεταφοράς, ενός ΓΧΑ αιτιατού συστήματος, είναι

$$H(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2} \quad (6.4.33)$$

Να υπολογιστεί η απόκριση $y(t)$ του συστήματος όταν το σήμα εισόδου $x(t)$ δίνεται από την

$$x(t) = e^{-|t|}, \quad -\infty < t < \infty \quad (6.4.34)$$

Να προσδιορίσετε το πεδίο σύγκλισης κάθε φορά που παρουσιάζεται μετασχηματισμός Laplace.

6.6 Η απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος στο σήμα

$$x(t) = u(t)$$

είναι το σήμα

$$y(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί η είσοδος του συστήματος όταν το σήμα εξόδου είναι

$$y_1(t) = (2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$$

6.7 Στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση

$$h(t) = e^{-2t}u(t)$$

Εφαρμόζεται το σήμα

$$x(t) = e^{-3t}u(t)$$

Να βρεθεί το σήμα εξόδου $y(t)$, του συστήματος

1. όταν το σύστημα αρχικά ηρεμεί και
2. όταν $y(0^-) = 1$.

6.8 Δίνεται το ευσταθές γραμμικά αναλλοίωτο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

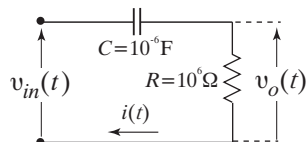
$$H(s) = \frac{2}{2-s}$$

1. Να βρεθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$, του συστήματος.
2. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί η έξοδος του όταν το σήμα εισόδου είναι

$$x(t) = 2e^{-2t}u(t)$$

6.9 Δίνεται το RC σε σειρά κύκλωμα του Σχήματος 6.13. Να υπολογιστούν

1. η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του κυκλώματος,
2. η κρουστική απόκριση $h(t)$ του κυκλώματος και
3. η συχνότητα - 3 dB.



Σχήμα 6.13 Το κύκλωμα του Προβλήματος 6.9.

Βιβλιογραφία

- 6.1 Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, Λ. Κοφίδης, “Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων”, *Τυπωθήτω - Γιώργος Δαρδανός*, Αθήνα 2003.
- 6.2 Α. Μάργαρης, “Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου”, *Εκδόσεις Τζιόλα* 2012.
- 6.3 S. Haykin, B. Veen, “Signal and Systems”, *John & Wiley Sons, Inc.* 2003
- 6.4 A. V. Oppenheim, R. S. Willsky, I. T. Young, “Signal and Systems”, *Prentice - Hall Inc.*, N. Y., 1983.