ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ο βασικός σκοπός του παραρτήματος είναι να παρουσιάσει τον τρόπο ανάλυσης μιας ρητής συνάρτησης, δηλαδή, μιας συνάρτησης η οποία μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο πολυωνύμων της μεταβλητής, σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)$ η οποία έχει τη μορφή

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \, \ldots \, + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \, \ldots \, + a_1 x + a_0}$$

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση στην οποία ο βαθμός του αριθμητή, m, είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή, n $(m < n)$ και στη συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση που ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του παρονομαστή.

Β.1 Ο ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ $N(x)$ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ ΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΤΟΥ $D(x)$.

Όταν ο βαθμός του πολυώνυμου του αριθμητή $N(x)$, είναι μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου του παρονομαστή $D(x)$, δηλαδή είναι $m < n$, αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων

$$D(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \rho_i) \tag{B.1.1}$$

όπου ρ_1, ρ_2, $\ldots$, ρ_n οι ρίζες του $D(x)$. Ανάλογα με τη φύση των ριζών διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Β.1.1 Ρίζες διακεκριμένες και πραγματικές

Ας θεωρήσουμε ότι ο βαθμός του παρονομαστή είναι 2, οπότε η συνάρτηση $f(x)$ γράφεται διαδοχικά

$$f(x) = \frac{b_1 x + b_0}{x^2 + a_1 x + a_0} = \frac{b_1 x + b_0}{(x - \rho_1)(x - \rho_2)} = \frac{C_1}{x - \rho_1} + \frac{C_2}{x - \rho_2} \tag{B.1.2}$$

Το πρόβλημα είναι να υπολογίσουμε τις σταθερές C_1 και C_2. Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών έχουμε διαδοχικά:

$$b_1x + b_0 = C_1(x - \rho_2) + C_2(x - \rho_1) = (C_1 + C_2)x - (C_1\rho_2 + C_2\rho_1)$$

από την οποία έχουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= b_1 \\ C_1\rho_2 + C_2\rho_1 &= -b_0 \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος δίνει τις τιμές των σταθερών C_1 και C_2

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{b_1\rho_1 + b_0}{\rho_1 - \rho_2} \\ C_2 &= \frac{b_1\rho_2 + b_0}{\rho_2 - \rho_1} \end{aligned} \tag{B.1.3}$$

Αν και ο τρόπος αυτός ισχύει πάντα, υπάρχει μια πιο εύκολη μέθοδος. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη σταθερά C_1 πολλαπλασιάζουμε την (B.1.2) με $x - \rho_1$ και έχουμε

$$(x - \rho_1)f(x) = C_1 + C_2\frac{x - \rho_1}{x - \rho_2} \tag{B.1.4}$$

Αφού οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 είναι διακριτές, ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της (B.1.4) είναι ίσος με μηδέν για $x = \rho_1$, έτσι έχουμε

$$C_1 = (x - \rho_1)f(x)\big|_{x=\rho_1} = \frac{b_1\rho_1 + b_0}{\rho_1 - \rho_2} \tag{B.1.5}$$

όμοια βρίσκουμε και

$$C_2 = (x - \rho_2)f(x)\big|_{x=\rho_2} = \frac{b_1\rho_2 + b_0}{\rho_2 - \rho_1} \tag{B.1.6}$$

Οι δύο αυτοί τρόποι γενικεύονται, αν ο βαθμός του παρονομαστή είναι n, και έχουμε

$$f(x) = \frac{C_1}{x - \rho_1} + \frac{C_2}{x - \rho_2} + \ldots + \frac{C_n}{x - \rho_n} \tag{B.1.7}$$

και οι σταθερές υπολογίζονται από τον τύπο

$$C_k = (x - \rho_k)f(x)\big|_{x=\rho_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{B.1.8}$$

Β.1.2 Ρίζες πολλαπλές και πραγματικές

Ας υποθέσουμε ότι ο παρονομαστής έχει μία διπλή πραγματική ρίζα, την ρ_1, και μία απλή πραγματική ρίζα, την ρ_2, τότε η συνάρτηση $f(x)$ γράφεται:

$$f(x) = \frac{b_2x^2 + b_1x + b_0}{(x - \rho_1)^2(x - \rho_2)} \tag{B.1.9}$$

Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε ένα ανάπτυγμα της μορφής:

$$f(x) = \frac{C_{11}}{(x - \rho_1)} + \frac{C_{12}}{(x - \rho_1)^2} + \frac{C_{21}}{(x - \rho_2)} \tag{B.1.10}$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές C_{11}, C_{12} και C_{21} μπορούμε και εδώ να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών να εξισώσουμε τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων και να λύσουμε το σύστημα. Υπάρχει όμως και γιαυτή την περίπτωση ένας απλούστερος τρόπος.

Πολλαπλασιάζουμε την (B.1.10) με $(x - \rho_1)^2$ και έχουμε:

$$(x - \rho_1)^2 f(x) = C_{11}(x - \rho_1) + C_{12} + \frac{C_{21}(x - \rho_1)^2}{(x - \rho_2)} \tag{B.1.11}$$

Από την (B.1.11) υπολογίζουμε την C_{12} με τη σχέση:

$$C_{12} = (x - \rho_1)^2 f(x)\big|_{x=\rho_1} = \frac{b_2\rho_1^2 + b_1\rho_1 + b_0}{\rho_1 - \rho_2} \tag{B.1.12}$$

Για να υπολογίσουμε το C_{11} διαφορίζουμε την (B.1.11) ως προς x και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[(x - \rho_1)^2 f(x)\right] &= C_{11} + C_{21}\frac{2(x - \rho_1)(x - \rho_2) - (x - \rho_1)^2}{(x - \rho_2)^2} \\ &= C_{11} + C_{21}\left[\frac{2(x - \rho_1)}{(x - \rho_2)} - \frac{2(x - \rho_1)^2}{(x - \rho_2)^2}\right] \end{aligned} \tag{B.1.13}$$

ο τελευταίος όρος της (B.1.13) είναι ίσος με μηδέν για $x = \rho_1$ έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{d}{dx}(x - \rho_1)^2 f(x)\bigg|_{x=\rho_1} \\ &= \frac{2b_2\rho_1 + b_1}{\rho_1 - \rho_2} - \frac{b_2\rho_1^2 + b_1\rho_1 + b_0}{(\rho_1 - \rho_2)^2} \end{aligned} \tag{B.1.14}$$

Ο συντελεστής C_{21} υπολογίζεται από τη γνωστή σχέση:

$$\begin{aligned} C_{21} &= (x - \rho_2)f(x)|_{x=\rho_2} \\ &= \frac{b_2\rho_2^2 + b_1\rho_2 + b_0}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \end{aligned} \tag{B.1.15}$$

Γενικά, αν το πολυώνυμο του παρονομαστή έχει τη ρίζα ρ_1 με πολλαπλότητα r και $n-r$ απλές ρίζες $\rho_2,\, \rho_3,\, \ldots,\, \rho_{n-r+1}$ τότε ο παρονομαστής αναλύεται

$$D(x) = (x-\rho_1)^r \prod_{i=2}^{n-r+1} (x-\rho_i) \tag{B.1.16}$$

έτσι συνάρτηση $f(x)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως

$$f(x) = \frac{C_{11}}{(x-\rho_1)} + \frac{C_{12}}{(x-\rho_1)^2} + \cdots + \frac{C_{1r}}{(x-\rho_1)^r} + \frac{C_{21}}{(x-\rho_2)} + \cdots + \frac{C_{(n-r)1}}{(x-\rho_{n-r})} \tag{B.1.17}$$

και οι συντελεστές $C_{1i}, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, r$ υπολογίζονται από την:

$$C_{1i} = \frac{1}{(r-i)!} \frac{d^{r-i}}{dx^{r-i}} \left[(x-\rho_1)^r f(x)\right]\Bigg|_{x=\rho_i} \tag{B.1.18}$$

οι υπόλοιπες σταθερές $C_{ki}, \quad 4 = 2,\, 3,\, \ldots,\, n-r$ υπολογίζονται με την (B.1.8).

B.1.3 Ύπαρξη μιγαδικών ριζών

Αν το πολυώνυμο $D(x)$ έχει ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών $\rho_1 = \sigma + j\omega$ και $\rho_2 = \rho_1^\star = \sigma - j\omega$, τότε η συνάρτηση $f(x)$ αναλύεται ως:

$$f(x) = \frac{C_1}{x-\rho_1} + \frac{C_2}{x-\rho_1^\star} + \frac{C_3}{(x-\rho_3)^r} + \cdots + \frac{C_n}{x-\rho_n} \tag{B.1.19}$$

Όλοι οι συντελεστές υπολογίζονται από την σχέση:

$$C_k = (x-\rho_k) f(x)\big|_{x=\rho_k},\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n \tag{B.1.20}$$

σημειώνεται ότι οι συντελεστές C_1 και C_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί ($C_2 = C_1^\star$). Σε περίπτωση που οι ρίζες εμφανίζονται με κάποια πολλαπλότητα, ακολουθείται η προηγούμενη μεθοδολογία.

B.2 Ο ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ $N(x)$ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ Η ΙΣΟΣ ΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΤΟΥ $D(x)$

Αν ο βαθμός του πολυώνυμου του αριθμητή $N(x)$, είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του πολυώνυμου του παρονομαστή $D(x)$, δηλαδή, $m \geq n$, κάνουμε τη διαίρεση και η συνάρτηση $f(x)$ γράφεται:

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \Pi(x) + \frac{g(x)}{D(x)} \tag{B.2.1}$$

Επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου $g(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του $D(x)$, ο όρος $\frac{g(x)}{D(x)}$ στην (B.2.1) αναλύεται σε απλά κλάσματα όπως σε κάποια από τις περιπτώσεις που περιγράψαμε.