Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες και όρια ακολουθιών.

2.1 Ακολουθίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1. *Χαρακτηρίζουμε* **ακολουθία** (**πραγματικών αριθμών**) *κάθε συνάρτηση* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *με πεδίο ορισμού το* $\mathbb{N}$ *και πραγματικές τιμές. Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *η αντίστοιχη τιμή* $x(n)$ *της συνάρτησης συμβολίζεται, παραδοσιακά,* x_n*. Δηλαδή, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *θέτουμε*

$$x_n = x(n).$$

Μπορούμε να πούμε, κάπως απλοϊκά, ότι ακολουθία είναι οποιαδήποτε άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά ο καθένας: ο πρώτος αριθμός x_1, ο δεύτερος x_2, ο τρίτος x_3 κ.τ.λ. Οι επιλεγμένοι αριθμοί, δηλαδή οι τιμές της ακολουθίας/συνάρτησης ονομάζονται **όροι** της ακολουθίας. Ο όρος x_{n+1} χαρακτηρίζεται **επόμενος** του x_n και ο x_{n-1} **προηγούμενος** του x_n. Η ανεξάρτητη μεταβλητή n, η οποία διατρέχει το $\mathbb{N}$, ονομάζεται **δείκτης** και *δείχνει* τη σειρά επιλογής των όρων της ακολουθίας. Αντί του συναρτησιακού συμβόλου $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε, παραδοσιακά, τα σύμβολα

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \quad \text{ή} \quad (x_n) \quad \text{ή} \quad (x_n)_{n=1}^{+\infty}.$$

Μπορούμε, φυσικά, να χρησιμοποιούμε κι άλλα γράμματα, εκτός των x, n, για να συμβολίσουμε ακολουθίες: (y_n), (x_k), (z_m) κ.τ.λ.

Στο εξής θα κάνουμε, χάριν συντομίας, μια άτυπη σύμβαση. *Κάθε φορά που κάποιο σύμβολο, όπως τα* n, m, k, *εμφανίζεται ως δείκτης όρου οποιασδήποτε ακολουθίας, θα εννοείται ότι το σύμβολο αυτό δηλώνει φυσικό αριθμό* (*μερικές φορές θα επιτρέπεται και η τιμή* 0), *έστω κι αν δεν αναφέρουμε ρητά ότι* $n \in \mathbb{N}$ *ή* $m \in \mathbb{N}$ *ή* $k \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 2.1.1. Η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ ή $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.2. Η ακολουθία (n) ή $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.3. Η ακολουθία (1) ή $(1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.4. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ ή $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.5. Η ακολουθία $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ ή $(\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.6. Η ακολουθία με n-οστό όρο ίσο με το πλήθος των θετικών διαιρετών του n, δηλαδή η ακολουθία $(1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, \dots)$. Δεν υπάρχει απλός τύπος για τον n-οστό όρο της ακολουθίας.

Παράδειγμα 2.1.7. Η ακολουθία $(m-n)_{n=1}^{+\infty}$ ή $(m-1, m-2, m-3, \dots, m-n, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.8. Η ακολουθία $(m-n)_{m=1}^{+\infty}$ ή $(1-n, 2-n, 3-n, \dots, m-n, \dots)$.

Στα δύο τελευταία παραδείγματα βλέπουμε ότι μερικές φορές χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, αντί του απλούστερου (x_n), για να δηλώσουμε ποιός, ανάμεσα σε διάφορα γράμματα, είναι ο δείκτης της ακολουθίας.

Προσέξτε: μια ακολουθία είναι συνάρτηση και όχι το σύνολο τιμών της. Με πιο απλά λόγια, μια ακολουθία είναι διαδοχική επιλογή αριθμών και όχι το σύνολο των αριθμών αυτών. Το σύνολο των όρων της ακολουθίας $(1)_{n=1}^{+\infty}$ είναι το μονοσύνολο $\{1\}$. Η ακολουθία, όμως, είναι η διαδοχική επιλογή $(1, 1, 1, \dots)$. Το πλήθος των όρων μιας ακολουθίας είναι πάντοτε άπειρο, ενώ άλλες ακολουθίες έχουν άπειρο σύνολο όρων και άλλες έχουν πεπερασμένο σύνολο όρων. Επίσης, δύο διαφορετικές ακολουθίες μπορεί να έχουν το ίδιο σύνολο όρων. Για παράδειγμα, οι $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, $(1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots)$ είναι διαφορετικές ακολουθίες αλλά και οι δύο έχουν σύνολο όρων το $\{-1, 1\}$. Οι $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$, $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots)$ είναι διαφορετικές ακολουθίες αλλά και οι δύο έχουν σύνολο όρων το $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2. *Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται* **αύξουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} \geq x_n$ για κάθε n,* **γνησίως αύξουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} > x_n$ για κάθε n,* **φθίνουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε n και* **γνησίως φθίνουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} < x_n$ για κάθε n.*

Η (x_n) χαρακτηρίζεται **μονότονη** *αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα και* **γνησίως μονότονη** *αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.*

Η (x_n) χαρακτηρίζεται **σταθερή** *αν όλοι οι όροι της είναι ίσοι μεταξύ τους, δηλαδή αν υπάρχει c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για κάθε n. Φυσικά, μια τέτοια ακολουθία συμβολίζεται (c) ή $(c, c, c, \dots, c, \dots)$.*

Μια σταθερή ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα. Στα παραδείγματα 2.1.1, 2.1.5, 2.1.7 οι ακολουθίες είναι γνησίως φθίνουσες, στα παραδείγματα 2.1.2, 2.1.8 οι ακολουθίες είναι γνησίως αύξουσες, στο παράδειγμα 2.1.3 η ακολουθία είναι σταθερή και στα παραδείγματα 2.1.4, 2.1.6 οι ακολουθίες δεν είναι μονότονες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3. *Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται* **άνω φραγμένη** *αν το σύνολο των όρων της είναι άνω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχει u με την ιδιότητα: ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n. Κάθε τέτοιος u χαρακτηρίζεται* **άνω φράγμα** *της (x_n).*

Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένη** *αν το σύνολο των όρων της είναι κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχει l με την ιδιότητα: ισχύει $l \leq x_n$ για κάθε n. Κάθε τέτοιος l χαρακτηρίζεται* **κάτω φράγμα** *της (x_n).*

Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **φραγμένη** *αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν l και u με την ιδιότητα: ισχύει $l \leq x_n \leq u$ για κάθε n.*

Παρατηρούμε ότι, αν ο u είναι άνω φράγμα της ακολουθίας (x_n), τότε κάθε $u' \geq u$ είναι άνω φράγμα της και, αν ο l είναι κάτω φράγμα της (x_n), τότε κάθε $l' \leq l$ είναι κάτω φράγμα της.

Παράδειγμα 2.1.9. Κάθε σταθερή ακολουθία (c) είναι φραγμένη.

Παράδειγμα 2.1.10. Οι ακολουθίες $(\frac{1}{n})$, $\big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big)$, $(\frac{n-1}{n})$, $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένες αφού όλοι οι όροι τους ανήκουν στο διάστημα $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 2.1.11. Η ακολουθία $\big(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\big)$ ή $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, \dots)$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη. Προφανώς, κάθε $l \leq 0$ είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας. Από την άλλη μεριά, αν υπήρχε άνω φράγμα της ακολουθίας αυτής, το σύνολο των περιττών φυσικών θα ήταν άνω φραγμένο. Αυτό δεν ισχύει και η ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη.

Παράδειγμα 2.1.12. Η ακολουθία $(-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, 0, \dots)$, δηλαδή η αντίθετη της προηγούμενης, είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη. Αν κάποιος l ήταν κάτω φράγμα της, δηλαδή αν όλοι οι όροι της ήταν $\geq l$, τότε όλοι οι όροι της προηγούμενης ακολουθίας θα ήταν $\leq -l$, οπότε η προηγούμενη ακολουθία θα ήταν άνω φραγμένη.

Παράδειγμα 2.1.13. Η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ ή $(1,-2,3,-4,5,-6,\ldots)$ δεν είναι άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη. Πράγματι, αν η ακολουθία ήταν άνω φραγμένη, το σύνολο των περιττών φυσικών θα ήταν άνω φραγμένο και, αν η ακολουθία ήταν κάτω φραγμένη, το σύνολο των άρτιων φυσικών θα ήταν άνω φραγμένο.

Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, δηλαδή ότι υπάρχουν l, u ώστε να ισχύει

$$l \leq x_n \leq u$$

για κάθε n. Με άλλα λόγια, ισχύει $x_n \in [l,u]$ για κάθε n. Τώρα, όμως, μπορούμε να βρούμε ένα συμμετρικό ως προς τον 0 διάστημα $[-M,M]$ το οποίο να περιέχει το διάστημα $[l,u]$, οπότε ισχύει

$$-M \leq x_n \leq M$$

ή, ισοδύναμα, $|x_n| \leq M$ για κάθε n. Δηλαδή, αν μια ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, τότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n. Το αντίστροφο είναι κι αυτό σωστό: αν υπάρχει M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n, τότε ισχύει $-M \leq x_n \leq M$ για κάθε n, οπότε ο M είναι άνω φράγμα και ο $-M$ είναι κάτω φράγμα της (x_n). Επομένως:

Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n.

Ας υποθέσουμε ότι κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα ισχύει ή όχι ανάλογα με τις τιμές που παίρνει ο φυσικός n. Για παράδειγμα: “ο n διαιρεί τον 234” ή “ο 4 διαιρεί τον n” ή “$n^2 - n > 8$” ή “$x_n < x_{n+1}$” για κάποια συγκεκριμένη ακολουθία (x_n).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4. *Λέμε ότι μια συγκεκριμένη ιδιότητα, η οποία εξαρτάται από τον φυσικό n,* **ισχύει τελικά** *ή, ισοδύναμα, ότι* **ισχύει από κάποιον** n **και πέρα** *αν υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει η ιδιότητα αυτή για κάθε $n \geq n_0$.*

Αν ο n είναι ο δείκτης μιας συγκεκριμένης ακολουθίας (x_n) και η ιδιότητα για την οποία μιλάμε αναφέρεται στους όρους της (x_n), τότε λέμε ότι η (x_n) έχει *τελικά* ή, ισοδύναμα, *από κάποιον n και πέρα* την ιδιότητα αυτή. Τέτοιες ιδιότητες είναι για παράδειγμα οι: $x_{n+1} \leq x_n$, $x_{n+1} > x_n$, $x_n \leq u$, $x_n = c$. Αν μια από αυτές ισχύει τελικά, λέμε ότι η (x_n) είναι, αντιστοίχως, *τελικά φθίνουσα, τελικά γνησίως αύξουσα, τελικά άνω φραγμένη με άνω φράγμα τον u, τελικά σταθερή c.*

Παράδειγμα 2.1.14. Η ακολουθία $(1, \frac{2}{3}, 7, -2, -1, -1, -1, -1, \ldots)$ είναι τελικά σταθερή, διότι είναι σταθερή από τον πέμπτο όρο και πέρα.

Παράδειγμα 2.1.15. Η ακολουθία $(n^2 - 14n + 8)$ είναι τελικά γνησίως αύξουσα. Πράγματι, ο $n^2 - 14n + 8 = (n-7)^2 - 41$ αυξάνεται γνησίως για $n \geq 7$ ενώ, αντιθέτως, οι αρχικοί επτά όροι φθίνουν γνησίως.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο ιδιότητες που εξαρτώνται από τον φυσικό n και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $n_0{}'$, $n_0{}''$ ώστε η πρώτη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \geq n_0{}'$ και η δεύτερη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \geq n_0{}''$. Θεωρούμε τον

$$n_0 = \max\{n_0{}', n_0{}''\}.$$

Επειδή $n_0 \geq n_0{}'$, η πρώτη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0$. Επίσης, επειδή $n_0 \geq n_0{}''$, η δεύτερη ιδιότητα ισχύει κι αυτή για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύουν *και οι δύο* ιδιότητες για κάθε $n \geq n_0$. Το σχήμα που περιγράψαμε διατυπώνεται ως εξής:

Αν μια ιδιότητα ισχύει τελικά και μια άλλη ιδιότητα ισχύει τελικά κι αυτή, τότε ισχύουν τελικά και οι δύο, ταυτόχρονα, ιδιότητες.

Παράδειγμα 2.1.16. Ισχύει $n^2 - 3n \geq 37$ για κάθε $n \geq 8$. Επίσης, ισχύει $\frac{2n+1}{n+1} > \frac{25}{13}$ για κάθε $n \geq 13$. Άρα ισχύει $n^2 - 3n \geq 37$ *και* $\frac{2n+1}{n+1} > \frac{25}{13}$ για κάθε $n \geq \max\{8, 13\} = 13$.

Το προηγούμενο συμπέρασμα αληθεύει και για τρεις ή τέσσερις ή, γενικά, *πεπερασμένου πλήθους* ιδιότητες: αντί να θεωρήσουμε τον μέγιστο από δύο φυσικούς, τους n_0', n_0'', θα θεωρήσουμε τον μέγιστο από τρεις ή τέσσερις αντίστοιχους φυσικούς, έναν για κάθε ιδιότητα. Δεν μπορούμε, όμως, να επεκτείνουμε το παραπάνω επιχείρημα σε άπειρες ιδιότητες διότι άπειροι φυσικοί μπορεί να μην έχουν μέγιστο!

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5. *Το νόημα του ότι μια ιδιότητα* **ισχύει για άπειρους** n *είναι σαφές.*

Παράδειγμα 2.1.17. Ισχύει $(-1)^{n-1} > 0$ για άπειρους n, αφού ισχύει για κάθε περιττό n. Ομοίως, ισχύει και η αντίθετη ιδιότητα $(-1)^{n-1} \leq 0$ για άπειρους n, αφού ισχύει για κάθε άρτιο n.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι μπορεί μια ιδιότητα να ισχύει για άπειρους n αλλά να μην είναι σωστό ότι ισχύει από κάποιον n και πέρα. Από την άλλη μεριά, αν μια ιδιότητα ισχύει από κάποιον n και πέρα, τότε, προφανώς, αυτή ισχύει για άπειρους n.

Ασκήσεις.

2.1.1. Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα, αποδείξτε ότι είναι σταθερή.

2.1.2. Βρείτε το σύνολο των όρων της ακολουθίας $\left(\frac{a+b}{2} + (-1)^{n-1}\frac{a-b}{2}\right)$.
Αν $m \in \mathbb{N}$, βρείτε το σύνολο των όρων της ακολουθίας $\left(n - m[\frac{n}{m}]\right)_{n=1}^{+\infty}$. Θεωρήστε πρώτα τις περιπτώσεις $m = 1, 2, 3$.

2.1.3. Οι έξι πρώτοι όροι μιας άγνωστης ακολουθίας είναι: $1, 4, 9, 16, 25, 36$. Ο έβδομος πρέπει να είναι ο 49; ο 24; ή μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός;

2.1.4. Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη και ότι κάθε φθίνουσα ακολουθία είναι άνω φραγμένη.

2.1.5. Το *άθροισμα δύο ακολουθιών* (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n + y_n)$. Αποδείξτε ότι το άθροισμα δύο αυξουσών ή δύο φθινουσών ακολουθιών είναι, αντιστοίχως, αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία. Αποδείξτε ότι το άθροισμα δύο άνω φραγμένων ή δύο κάτω φραγμένων ακολουθιών είναι, αντιστοίχως, άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη ακολουθία.
Το *γινόμενο δύο ακολουθιών* (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n y_n)$. Διατυπώστε και αποδείξτε τα ανάλογα με τα παραπάνω αποτελέσματα, υποθέτοντας, επιπλέον, ότι ισχύει $x_n, y_n \geq 0$ για κάθε n.

2.1.6. Ποιές από τις $((-1)^{n-1}n)$, $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$, $\left(\frac{18-n}{n^2+n+1}\right)$, $\left(\frac{13^n}{n!}\right)$, $\left(\frac{n^{30}}{2^n}\right)$, $\left(2[\frac{n}{2}]\right)$, $\left(n - 3[\frac{n}{3}]\right)$ είναι *τελικά* μονότονες; τελικά άνω φραγμένες; τελικά κάτω φραγμένες ακολουθίες;

2.1.7. Αποδείξτε ότι μια ιδιότητα ισχύει για άπειρους n αν και μόνο αν για κάθε k υπάρχει κάποιος $n > k$ για τον οποίο η ιδιότητα ισχύει.
Αποδείξτε ότι μια ιδιότητα ισχύει για άπειρους n αν και μόνο αν είναι λάθος ότι η αντίθετη ιδιότητα ισχύει τελικά.

2.1.8. Αποδείξτε ότι, αν μια ακολουθία είναι τελικά άνω φραγμένη ή τελικά κάτω φραγμένη, τότε είναι, αντιστοίχως, άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη. Με άλλα λόγια, το να είναι ή όχι μια ακολουθία άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη δεν εξαρτάται από τους αρχικούς όρους της.

2.1.9. Έστω ότι το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας (x_n) είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι υπάρχει c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για άπειρους n.

2.1.10. [1] Έστω a, b, p, q, όπου οι p, q δεν είναι και οι δύο 0, και ακολουθία (x_n) που ορίζεται από τους δύο πρώτους όρους $x_1 = a$ και $x_2 = b$ και από τον αναδρομικό τύπο $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$.

[1] Εδώ περιγράφεται ο υπολογισμός του n-οστού όρου ακολουθίας που ορίζεται με τον γενικό *γραμμικό αναδρομικό τύπο* δεύτερης τάξης.

(i) Έστω $p \neq 0$, $q = 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n = bp^{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

(ii) Έστω $p = 0$, $q \neq 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n = aq^{\frac{n-1}{2}}$ για κάθε περιττό n και $x_n = bq^{\frac{n-2}{2}}$ για κάθε άρτιο n.

(iii) Έστω $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Αν η εξίσωση $x^2 = px + q$ έχει δύο πραγματικές λύσεις, τις ρ_1, ρ_2, βρείτε κ, λ ώστε να ισχύει $x_n = \kappa {\rho_1}^{n-1} + \lambda {\rho_2}^{n-1}$ για κάθε n.

Αν η εξίσωση $x^2 = px + q$ έχει μόνο μία πραγματική λύση, την ρ, βρείτε κ, λ ώστε να ισχύει $x_n = \kappa \rho^{n-1} + \lambda(n-1)\rho^{n-1}$ για κάθε n.

Αν η εξίσωση $x^2 = px + q$ έχει δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις, βρείτε κ, λ, ρ και $\theta \in [0, 2\pi)$ ώστε να ισχύει $x_n = \kappa \rho^{n-1} \cos((n-1)\theta) + \lambda \rho^{n-1} \sin((n-1)\theta)$ για κάθε n.

Υπολογίστε τον n-οστό όρο καθεμιάς από τις τέσσερις ακολουθίες[2] που ορίζονται με πρώτους όρους $x_1 = x_2 = 1$ και με τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+2} = 3x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$.

2.1.11. Ποιοί αρχικοί όροι (και με τι περιορισμούς) χρειάζονται για να ορισθεί η ακολουθία (x_n) με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n$; Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για καθέναν από τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+3} = \frac{x_n x_{n+2}}{x_{n+1}}$, $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}$ και $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$.

2.2 Όρια ακολουθιών, περιοχές.

Παράδειγμα 2.2.1. Οι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας $(\frac{1}{n})$ είναι οι:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots, \tfrac{1}{100}, \tfrac{1}{101}, \ldots, \tfrac{1}{100000}, \ldots, \tfrac{1}{100000000}, \ldots.$$

Είναι σαφές ότι, αν ο δείκτης n γίνει "αρκετά μεγάλος", το μέγεθος του αντίστοιχου όρου $\frac{1}{n}$ της ακολουθίας θα γίνει "όσο θέλουμε μικρό" ή, πιο παραστατικά, το σημείο $\frac{1}{n}$ θα πλησιάσει "όσο θέλουμε κοντά" το σημείο 0.

Παράδειγμα 2.2.2. Οι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας $(\frac{n-1}{n})$ είναι οι:

$$0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \ldots, \tfrac{99}{100}, \tfrac{100}{101}, \ldots, \tfrac{99999}{100000}, \ldots, \tfrac{99999999}{100000000}, \ldots.$$

Πάλι, αν ο δείκτης n γίνει "αρκετά μεγάλος", τότε η απόσταση του αντίστοιχου όρου $\frac{n-1}{n}$ από τον αριθμό 1 θα γίνει "όσο θέλουμε μικρή". Πράγματι, η απόσταση του $\frac{n-1}{n}$ από τον 1 είναι ίση με $|\frac{n-1}{n} - 1| = \frac{1}{n}$ και, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, αν ο n γίνει "αρκετά μεγάλος", ο αντίστοιχος $\frac{1}{n}$ θα γίνει "όσο θέλουμε μικρός".

Στα παραδείγματα αυτά είδαμε δύο ακολουθίες (x_n) με την εξής κοινή ιδιότητα:

Αν ο δείκτης n γίνει "αρκετά μεγάλος", η απόσταση του x_n από κάποιον x θα γίνει "όσο θέλουμε μικρή".

Επεξήγηση. Όταν λέμε ότι η απόσταση του x_n από τον x θα γίνει "όσο θέλουμε μικρή" εννοούμε ότι η $|x_n - x|$ θα γίνει "μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό". Όταν λέμε "αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος" εννοούμε "αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό". Μπορούμε, λοιπόν, να διατυπώσουμε πιο καθαρά την ιδιότητα που εξετάζουμε ως εξής:

Η $|x_n - x|$ θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό.

Ας δούμε ξανά το:

Παράδειγμα 2.2.1. Έστω η ακολουθία $(\frac{1}{n})$.

Η απόσταση του $\frac{1}{n}$ από τον 0 είναι ίση με $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$ και, όπως έχουμε ήδη πει, θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο φυσικό.

[2] Η δεύτερη ακολουθία είναι η γνωστή ακολουθία Fibonnaci και οι εφτά αρχικοί όροι της είναι οι $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$.

Τί σημαίνει αυτό;
Ας πάρουμε έναν οποιονδήποτε μικρό θετικό αριθμό, για παράδειγμα τον 0.000132. Μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει μικρότερη από τον 0.000132 αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο φυσικό; Με άλλα λόγια, ρωτάμε: *μεγαλύτερος από ποιόν φυσικό πρέπει να γίνει ο n ώστε η απόσταση $\frac{1}{n}$ να γίνει μικρότερη από τον* 0.000132; Αυτό είναι εύκολο: για να γίνει $\frac{1}{n} < 0.000132$ αρκεί να γίνει $n > \frac{1000000}{132} = 7575.75\ldots$. Ποιοί φυσικοί αριθμοί n είναι $> \frac{1000000}{132}$; Παρατηρούμε ότι ο φυσικός 7576 είναι $> \frac{1000000}{132}$ και, επομένως, αν ο n γίνει ≥ 7576, τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει < 0.000132. Ας πάρουμε, για δεύτερο παράδειγμα τον μικρό θετικό αριθμό 0.0000000000132. Με τους ίδιους συλλογισμούς βλέπουμε ότι, αν ο n γίνει ≥ 75757575758, τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει < 0.0000000000132. Αυτήν την διαδικασία μπορούμε, αν θέλουμε, να τήν επαναλάβουμε πολλές φορές: κάθε φορά θα επιλέγουμε έναν πολύ μικρό θετικό αριθμό (όπως τους 0.000132 και 0.0000000000132) και κατόπιν θα βρίσκουμε έναν κατάλληλο φυσικό (όπως τους 7576 και 75757575758). Δεν θέλουμε, όμως, κάτι τέτοιο. Αυτό που χρειάζεται είναι να αποδείξουμε ότι για *κάθε* θετικό αριθμό υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κατάλληλος φυσικός. Οι θετικοί αριθμοί είναι άπειροι και, όσες φορές κι αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία, ποτέ δεν θα τελειώσουμε. Γι αυτό πρέπει να θεωρήσουμε όχι συγκεκριμένους θετικούς αριθμούς αλλά τον *γενικό θετικό αριθμό* με ένα γενικό σύμβολο, για παράδειγμα το σύμβολο ϵ, και να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κατάλληλος φυσικός, ας τόν συμβολίσουμε n_0, ώστε, αν ο n γίνει $\geq n_0$, τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει $< \epsilon$. Αυτό, όμως, είναι ακριβώς το περιεχόμενο της Αρχιμήδειας ιδιότητας: *για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε ο $\frac{1}{n_0}$ και, επομένως, όλοι οι $\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+2}, \ldots$ να είναι $< \epsilon$.*
Είναι φανερό (και από τα παραδείγματα με τους δύο συγκεκριμένους ϵ που εξετάσαμε) ότι η τιμή του n_0 εξαρτάται από την τιμή του ϵ. Μπορούμε να υπολογίσουμε έναν n_0 (συναρτήσει του ϵ) από τον οποίο και πέρα ισχύει $\frac{1}{n} < \epsilon$; Θα κάνουμε ό,τι κάναμε για τα συγκεκριμένα παραδείγματα. Γράφουμε την $\frac{1}{n} < \epsilon$ ισοδύναμα ως $n > \frac{1}{\epsilon}$ (δηλαδή, λύνουμε ως προς n) και χρησιμοποιούμε το εξής απλό λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 2.1. *Αν $a \geq 0$, τότε ο $n_0 = [a] + 1$ είναι ο ελάχιστος φυσικός $n > a$. Αν $a < 0$, τότε ο $n_0 = 1$ είναι ο ελάχιστος φυσικός $n > a$.*

Απόδειξη. Προφανής. □

Για παράδειγμα: ο ελάχιστος φυσικός $n > -3$ είναι ο 1, ο ελάχιστος φυσικός $n > \frac{8}{3}$ είναι ο $3 = [\frac{8}{3}] + 1$ και ο ελάχιστος φυσικός $n > 2$ είναι και πάλι ο $3 = 2 + 1 = [2] + 1$.
Άρα (επειδή $\frac{1}{\epsilon} \geq 0$) ο n_0 που ψάχνουμε είναι ο $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. Εργαζόμενοι με τον γενικό θετικό ϵ, (εκτός από το ότι αυτό είναι το σωστό) έχουμε καταφέρει να βρούμε και έναν γενικό τύπο για έναν κατάλληλο n_0 συναρτήσει του ϵ, οπότε για κάθε συγκεκριμένο ϵ μπορούμε να υπολογίζουμε αμέσως έναν αντίστοιχο κατάλληλο n_0.

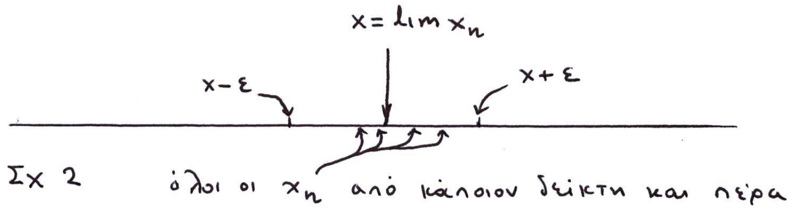
Βάσει της προηγούμενης συζήτησης, δίνουμε τον εξής γενικό ορισμό. Δείτε το σχήμα 2.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6. *Λέμε ότι η ακολουθία (x_n)* **συγκλίνει** *στον αριθμό x ή ότι η (x_n)* **τείνει** *στον x ή ότι ο x είναι* **όριο** *της (x_n) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνοπτικά: η (x_n) συγκλίνει στον x αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$.*
Το ότι η (x_n) συγκλίνει στον x το συμβολίζουμε

$$x_n \to x \quad \text{ή} \quad \lim x_n = x \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Αν η (x_n) δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό, λέμε ότι η (x_n) **αποκλίνει**.

Μπορούμε να πούμε, κάπως πιο παραστατικά, ότι *η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στον x αν ο n-οστός όρος x_n πλησιάζει απεριόριστα τον x όταν ο n γίνεται κατάλληλα μεγάλος.*



Αξίζει να διατυπώσουμε τον προηγούμενο ορισμό με τα σύμβολα της μαθηματικής λογικής:

$$x_n \to x \;\Leftrightarrow\; \left[\; \forall \epsilon > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} \;\forall n \in \mathbb{N} \;(n \ge n_0 \;\;\Rightarrow\;\; |x_n - x| < \epsilon) \;\right]$$

Για να αποδείξουμε ότι $x_n \to x$ θεωρούμε τον τυχόντα και γενικό $\epsilon > 0$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός n_0 (ο οποίος εξαρτάται από τον ϵ) τέτοιου ώστε

$$\text{το } n \ge n_0 \text{ συνεπάγεται } (\Rightarrow) \text{ το } |x_n - x| < \epsilon$$

ή, ισοδύναμα, ώστε

$$\text{το } |x_n - x| < \epsilon \text{ συνεπάγεται } \textit{από } (\Leftarrow) \text{ το } n \ge n_0.$$

Η ιδέα είναι να ξεκινήσουμε από τη σχέση $|x_n - x| < \epsilon$ και να περάσουμε σε μια επόμενη σχέση και από αυτήν να περάσουμε σε μια επόμενη σχέση και ούτω καθ' εξής μέχρι να φτάσουμε στην τελική σχέση $n \ge n_0$. Με άλλα λόγια: *να λύσουμε ως προς n την αρχική σχέση*. Το λογικό σχήμα έχει ως εξής:

$$|x_n - x| < \epsilon \;\Leftarrow\; P_1 \;\Leftarrow\; \cdots\cdots \;\Leftarrow\; P_m \;\Leftarrow\; n \ge n_0,$$

όπου $P_1, \ldots, P_m$ είναι οι ενδιάμεσες σχέσεις. Κάθε φορά που περνάμε από μια προηγούμενη σχέση σε μια επόμενη σχέση πρέπει να προσέχουμε δύο πράγματα: η προηγούμενη σχέση να συνεπάγεται *από* την επόμενη σχέση και η επόμενη σχέση να είναι απλούστερη από την προηγούμενη σχέση. Πολλές φορές συμβαίνει δύο διαδοχικές σχέσεις να είναι ισοδύναμες, αλλά αυτό δεν πειράζει. Το να συνεπάγεται η προηγούμενη σχέση την επόμενη μας είναι αδιάφορο. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να ισχύει οπωσδήποτε η αντίστροφη συνεπαγωγή.

Ας ξαναδούμε το παράδειγμα 2.2.1 πιο συνοπτικά.

Παράδειγμα 2.2.1. Θα αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{1}{n} \to 0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \ge n_0$. Ή, με άλλη διατύπωση, το $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ να συνεπάγεται από το $n \ge n_0$.
Τώρα, το $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $\frac{1}{n} < \epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $n > \frac{1}{\epsilon}$. Με σύμβολα:

$$|\tfrac{1}{n} - 0| < \epsilon \;\Leftarrow\; \tfrac{1}{n} < \epsilon \;\Leftarrow\; n > \tfrac{1}{\epsilon}.$$

Τώρα, το θεώρημα 1.1 αποδεικνύει ότι *πράγματι υπάρχει* n_0 ώστε $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Φυσικά, τότε η ανισότητα $n > \frac{1}{\epsilon}$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \ge n_0$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε από το $n \ge n_0$ να συνεπάγεται το $n > \frac{1}{\epsilon}$ και από αυτό να συνεπάγεται το $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \ge n_0 \;\Rightarrow\; n > \tfrac{1}{\epsilon} \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{n} < \epsilon \;\Rightarrow\; |\tfrac{1}{n} - 0| < \epsilon.$$

Μπορούμε (αν και δεν είναι υποχρεωτικό) να βρούμε *συγκεκριμένο* n_0. Πράγματι, επειδή $\frac{1}{\epsilon} \ge 0$, ο $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ είναι ο ελάχιστος $n > \frac{1}{\epsilon}$. Άρα, με αυτόν τον n_0 ή και με οποιονδήποτε μεγαλύτερο n_0, ισχύει $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \ge n_0$.

Παράδειγμα 2.2.3. Θα αποδείξουμε ότι η σταθερή ακολουθία (c) συγκλίνει στον c. Δηλαδή

$$c \to c.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε το $|c - c| < \epsilon$ να συνεπάγεται από το $n \geq n_0$. Το $|c-c| < \epsilon$ συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $0 < \epsilon$. Προφανώς, το $0 < \epsilon$ ισχύει για κάθε n (ακριβώς επειδή είναι σωστό και επειδή είναι ανεξάρτητο του n). Επομένως, με οποιονδήποτε n_0 (για παράδειγμα, τον $n_0 = 1$), ισχύει $|c - c| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Παράδειγμα 2.2.4. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η $((-1)^{n-1})$ συγκλίνει σε κάποιον x. Τότε για *κάθε* $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε από το $n \geq n_0$ να συνεπάγεται το $|(-1)^{n-1} - x| < \epsilon$. Όμως, όποιος κι αν είναι ο n_0, υπάρχουν *άρτιοι και περιττοί* $n \geq n_0$. Άρα, από τους άρτιους $n \geq n_0$ συνεπάγεται $|-1-x| < \epsilon$ και από τους περιττούς $n \geq n_0$ συνεπάγεται $|1 - x| < \epsilon$. Το $|-1-x| < \epsilon$ ισοδυναμεί με το $-1 \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ και το $|1 - x| < \epsilon$ ισοδυναμεί με το $1 \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Άρα, για κάθε $\epsilon > 0$ οι -1, 1 ανήκουν και οι δύο στο διάστημα $(x - \epsilon, x + \epsilon)$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο αν $0 < \epsilon \leq 1$, διότι τότε το συγκεκριμένο ανοικτό διάστημα έχει μήκος ≤ 2, και καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 2.2.5. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$.
Έστω $\epsilon > 0$. Το $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0\right| < \epsilon$ συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $\frac{1}{n} < \epsilon$ και αυτό συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $n > \frac{1}{\epsilon}$. Τώρα, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Με έναν τέτοιο n_0, από το $n \geq n_0$ συνεπάγεται το $n > \frac{1}{\epsilon}$ και από αυτό συνεπάγεται το $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$.

Παράδειγμα 2.2.6. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{n^2+1}{2n^3-n} \to 0$.
Έστω $\epsilon > 0$. Το $\left|\frac{n^2+1}{2n^3-n} - 0\right| < \epsilon$ συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $\frac{n^2+1}{2n^3-n} < \epsilon$ και αυτό συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $2n^3 - n > \frac{1}{\epsilon}(n^2 + 1)$. Τώρα, αντιλαμβανόμαστε ότι η τελευταία ανισότητα είναι δύσκολο να λυθεί ως προς n, οπότε κάνουμε κάτι λίγο διαφορετικό. Παρατηρούμε (μεγαλώνοντας τον αριθμητή και μικραίνοντας τον παρονομαστή) ότι

$$\frac{n^2+1}{2n^3-n} \leq \frac{n^2+n^2}{2n^3-n^3} = \frac{2}{n},$$

οπότε το $\frac{n^2+1}{2n^3-n} < \epsilon$ συνεπάγεται από (όμως, *δεν είναι ισοδύναμο* με) το $\frac{2}{n} < \epsilon$ και αυτό συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $n > \frac{2}{\epsilon}$. Και τελειώνουμε όπως σε προηγούμενα παραδείγματα. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$. Με έναν τέτοιον n_0, από το $n \geq n_0$ συνεπάγεται το $n > \frac{2}{\epsilon}$ και από αυτό συνεπάγεται το $\left|\frac{n^2+1}{2n^3-n} - 0\right| < \epsilon$.
Προσέξτε την "αντικατάσταση" του $\frac{n^2+1}{2n^3-n}$ με το μεγαλύτερό του, *αλλά απλούστερο*, $\frac{2}{n}$. Αυτό αποτελεί συγκεκριμένη υλοποίηση μιας γενικότερης τεχνικής, πολύ χρήσιμης σε τέτοιες καταστάσεις, η οποία βασίζεται στο ότι:

$$\text{Αν } a \leq b, \text{ τότε το } a < \epsilon \text{ συνεπάγεται από το } b < \epsilon.$$

Η τεχνική συνίσταται στη μετάβαση από την ανισότητα $a < \epsilon$ στην ανισότητα $b < \epsilon$. Εφαρμόζουμε αυτήν την τεχνική, προσέχοντας ο b να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του a αλλά και απλούστερος από τον a.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.7. *Λέμε ότι η ακολουθία (x_n)* **αποκλίνει** *στο $+\infty$ ή ότι η (x_n)* **τείνει** *στο $+\infty$ ή ότι το $+\infty$ είναι* **όριο** *της (x_n) αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$.*
Πιο συνοπτικά: η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$.
Αν η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$, γράφουμε

$$x_n \to +\infty \quad \text{ή} \quad \lim x_n = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

Επίσης, λέμε ότι η ακολουθία (x_n) **αποκλίνει** *στο $-\infty$ ή ότι η (x_n)* **τείνει** *στο $-\infty$ ή ότι το $-\infty$ είναι* **όριο** *της (x_n) αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n < -M$ για κάθε $n \geq n_0$.*

Πιο συνοπτικά: η (x_n) αποκλίνει στο $-\infty$ αν για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n < -M$.
Αν η (x_n) αποκλίνει στο $-\infty$, γράφουμε

$$x_n \to -\infty \quad \textit{ή} \quad \lim x_n = -\infty \quad \textit{ή} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty.$$

Μπορούμε να πούμε, πιο παραστατικά, ότι: *η ακολουθία (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ αν ο n-οστός όρος x_n πλησιάζει απεριόριστα το $+\infty$ όταν ο n γίνεται κατάλληλα μεγάλος.* Ανάλογη διατύπωση υπάρχει για την απόκλιση στο $-\infty$.

Ας διατυπώσουμε και αυτούς τους ορισμούς με τα σύμβολα της μαθηματικής λογικής:

$$x_n \to +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \big[\ \forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \ge n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n > M)\ \big]$$

$$x_n \to -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \big[\ \forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \ge n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n < -M)\ \big]$$

Παράδειγμα 2.2.7. Θα αποδείξουμε ότι

$$n \to +\infty.$$

Έστω $M > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε το $n > M$ να συνεπάγεται από το $n \ge n_0$.
Η κατάσταση είναι ξεκάθαρη. Σύμφωνα με το θεώρημα 1.1, υπάρχει $n_0 > M$. Προφανώς, η ανισότητα $n > M$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \ge n_0$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε από το $n \ge n_0$ να συνεπάγεται το $n > M$.
Μπορούμε (χωρίς να είναι υποχρεωτικό) να θεωρήσουμε τον $n_0 = [M] + 1$ και βλέπουμε ότι, με αυτόν τον n_0 ή και με οποιονδήποτε μεγαλύτερο n_0, ισχύει $n > M$ για κάθε $n \ge n_0$.

Παράδειγμα 2.2.8. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ ή $(1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$ ούτε αποκλίνει στο $+\infty$ ούτε αποκλίνει στο $-\infty$.

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε το $(-1)^{n-1}n > M$ να συνεπάγεται από το $n \ge n_0$. Όμως, όποιος κι αν είναι ο n_0, υπάρχουν άρτιοι και περιττοί $n \ge n_0$. Τότε από τους άρτιους $n \ge n_0$ συνεπάγεται $-n > M$ και από τους περιττούς $n \ge n_0$ συνεπάγεται $n > M$. Τώρα, το $-n > M$ είναι, προφανώς, αδύνατο, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.
Με τον ίδιο τρόπο, το ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $-\infty$ οδηγεί σε άτοπο.

Παράδειγμα 2.2.9. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{n^3+n}{n^2+3} \to +\infty$.

Έστω $M > 0$. Το $\frac{n^3+n}{n^2+3} > M$ συνεπάγεται από το $n^3+n > Mn^2+3M$. Επειδή η ανισότητα αυτή είναι δύσκολο να λυθεί ως προς n, επιστρέφουμε στην $\frac{n^3+n}{n^2+3} > M$ και αντικαθιστούμε το $\frac{n^3+n}{n^2+3}$ με κάτι *μικρότερο*. Παρατηρούμε (μικραίνοντας τον αριθμητή και μεγαλώνοντας τον παρονομαστή) ότι

$$\frac{n^3+n}{n^2+3} \ge \frac{n^3}{n^2+3n^2} = \frac{n}{4}.$$

Άρα το $\frac{n^3+n}{n^2+3} > M$ συνεπάγεται από το $\frac{n}{4} > M$ και αυτό συνεπάγεται από το $n > 4M$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε $n_0 > 4M$ και, τότε, με έναν τέτοιο n_0, από το $n \ge n_0$ συνεπάγεται το $n > 4M$ και από αυτό συνεπάγεται το $\frac{n^3+n}{n^2+3} > M$.
Προσέξτε την "αντικατάσταση" του $\frac{n^3+n}{n^2+3}$ με τον μικρότερό του, *αλλά απλούστερο*, $\frac{n}{4}$. Αυτό είναι συγκεκριμένο παράδειγμα μιας γενικότερης τεχνικής, η οποία βασίζεται στο ότι:

$$\text{Αν}\ \ a \ge b,\ \ \text{τότε το}\ \ a > M\ \ \text{συνεπάγεται από το}\ \ b > M.$$

Η τεχνική συνίσταται στη μετάβαση από την ανισότητα $a > M$ στην ανισότητα $b > M$. Εφαρμόζουμε αυτήν την τεχνική, προσέχοντας ο b να είναι μικρότερος ή ίσος του a αλλά και απλούστερος από τον a.[3]

[3]Παρατηρήστε ότι συναντήσαμε την ίδια ακριβώς τεχνική στο παράδειγμα 2.2.6.

Χρησιμοποιούμε τη λέξη "όριο" και τα σύμβολα $\to$, lim, $\lim_{n\to+\infty}$ σε όλες τις περιπτώσεις που η ακολουθία έχει όριο, είτε συγκλίνει σε αριθμό είτε αποκλίνει σε ένα από τα $\pm\infty$. Χρησιμοποιούμε το ρήμα "συγκλίνει" όταν το όριο είναι αριθμός και το ρήμα "αποκλίνει" σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή όταν το όριο δεν υπάρχει ή υπάρχει και είναι ένα από τα $\pm\infty$. Όταν γράφουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n$, χωρίς άλλη διευκρίνηση, εννοούμε ότι το όριο είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$.

Τώρα θα ξαναδιατυπώσουμε τους ορισμούς του ορίου ακολουθίας με διαφορετικό τρόπο, αφού εισαγάγουμε την έννοια της *περιοχής*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8. *Έστω $\epsilon > 0$. Το διάστημα $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ ονομάζεται ϵ-**περιοχή** του x. Το $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ ονομάζεται ϵ-**περιοχή** του $+\infty$ και το $[-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ ονομάζεται ϵ-**περιοχή** του $-\infty$. Συμβολίζουμε*

$$N_x(\epsilon) = (x-\epsilon, x+\epsilon), \qquad N_{+\infty}(\epsilon) = (\tfrac{1}{\epsilon}, +\infty], \qquad N_{-\infty}(\epsilon) = [-\infty, -\tfrac{1}{\epsilon}).$$

Μέσω των αντίστροφων τύπων $M = \frac{1}{\epsilon}$, $\epsilon = \frac{1}{M}$ βλέπουμε ότι μπορούμε να γράφουμε τις περιοχές του $+\infty$ είτε με τη μορφή $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ είτε με τη μορφή $(M, +\infty]$ και τις περιοχές του $-\infty$ να τις γράφουμε είτε με τη μορφή $[-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ είτε με τη μορφή $[-\infty, -M)$.

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι:

Όταν ο ϵ μικραίνει και το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ μένει αμετάβλητο, τότε η αντίστοιχη περιοχή $N_x(\epsilon)$ μικραίνει.

Ο ϵ αποτελεί το "μέτρο" της εγγύτητας στο x των στοιχείων της περιοχής $N_x(\epsilon)$. Όσο πιο μικρός είναι ο ϵ τόσο πιο μικρή είναι η $N_x(\epsilon)$ και τόσο πιο κοντά στο x είναι τα στοιχεία της $N_x(\epsilon)$. Μάλιστα, μπορούμε να δούμε εύκολα τα εξής.

Αν $l < x$, δηλαδή το x (αριθμός ή $+\infty$) είναι δεξιά του l, τότε μπορούμε να βρούμε έναν αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι δεξιά του l.

Συμμετρικά, αν $x < u$, δηλαδή το x (αριθμός ή $-\infty$) είναι αριστερά του u, τότε μπορούμε να βρούμε έναν αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι αριστερά του u.

Και, τέλος, αν $l < x < u$, δηλαδή ο x (αριθμός) είναι ανάμεσα στους l, u, τότε μπορούμε να βρούμε έναν αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους l, u.

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα $|x_n - x| < \epsilon$ στον ορισμό του $x_n \to x$ γράφεται, ισοδύναμα, $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in N_x(\epsilon)$.

Ομοίως, οι ανισότητες $x_n > M$ και $x_n < -M$ που αναφέρονται στους ορισμούς των $x_n \to \pm\infty$ γράφονται, ισοδύναμα, $x_n \in (M, +\infty]$ και $x_n \in [-\infty, -M)$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in N_{+\infty}(\epsilon)$ και $x_n \in N_{-\infty}(\epsilon)$, όπου $\epsilon = \frac{1}{M}$.[4]

Μετά από αυτήν την παρατήρηση μπορούμε να διατυπώσουμε *και τους τρεις* ορισμούς ορίων ως *έναν ενιαίο* ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.9. *Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Τότε $x_n \to x$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.*

Βλέπουμε, λοιπον, ότι με την έννοια της περιοχής μπορούμε να ενοποιήσουμε τους τρεις ορισμούς ορίων σε έναν. Αν, σε μια συγκεκριμένη κατάσταση, η φύση των επιχειρημάτων δεν απαιτεί να διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς το αν ένα όριο είναι αριθμός ή ένα από τα $\pm\infty$, τότε θα χρησιμοποιούμε τις περιοχές.[5]

Ασκήσεις.

2.2.1. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς, αποδείξτε τα όρια: $\frac{1}{n+8} \to 0$, $\frac{3n+1}{2n+5} \to \frac{3}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}+5} \to 0$, $2n^2 - n \to +\infty$, $\frac{n}{2n^2-1} \to 0$, $n^2 - 7n \to +\infty$, $\frac{n^4-n^2+1}{n^2+3} \to +\infty$, $2^n - 2^{n/2} \to +\infty$, $\frac{1}{5^n-4^n} \to 0$.

[4] Είναι δεδομένο ότι οι όροι μιας ακολουθίας είναι αριθμοί, οπότε δεν κινδυνεύουμε να θεωρήσουμε ότι ο x_n μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$ ή την τιμή $-\infty$ όταν γράφουμε $x_n \in N_{+\infty}(\epsilon) = (\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ ή $x_n \in N_{-\infty}(\epsilon) = [-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$.

[5] Κάπως πιο σημαντικό ρόλο θα παίξουν οι περιοχές στο επόμενο κεφάλαιο σε σχέση με τα όρια συναρτήσεων, όπου οι περιπτώσεις ορίων είναι πολύ περισσότερες.

2.2.2. Αποδείξτε τους ισχυρισμούς μετά από τον ορισμό 2.8.

2.2.3. Έστω $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq y$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_x(\epsilon) \cap N_y(\epsilon) = \emptyset$.

2.2.4. Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n ώστε $N_x(\frac{1}{n}) \subseteq N_x(\epsilon)$.
Αποδείξτε ότι $\bigcap_{\epsilon>0} N_x(\epsilon) = \{x\}$ ή, με άλλα λόγια, το μοναδικό στοιχείο που ανήκει σε όλες τις περιοχές του x είναι το ίδιο το x.
Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} N_x(\frac{1}{n}) = \{x\}$.

2.2.5. Έστω $x_n \to x$. Για κάθε $\epsilon > 0$ έστω $n_0(\epsilon)$ ο *ελάχιστος* n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Αποδείξτε ότι, αν $0 < \epsilon' < \epsilon$, τότε $n_0(\epsilon') \geq n_0(\epsilon)$.

2.2.6. [6] Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) *δεν συγκλίνει* στο x αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $x_n \notin N_x(\epsilon)$ για άπειρους n.

2.2.7. [7] Έστω $\epsilon_0 > 0$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν για κάθε ϵ με $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.

2.2.8. Έστω ότι για την ακολουθία (x_n) και τον x ισχύει ότι: υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Να αντιπαραβάλετε με τον ορισμό του $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι τελικά σταθερή.

2.2.9. [α] Έστω ότι το σύνολο των όρων της ακολουθίας (x_n) είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι, αν $x_n \to x$, τότε η (x_n) είναι τελικά σταθερή και ότι ο x είναι ένας από τους όρους της.
[β] Έστω ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε n. Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι τελικά σταθερή και ότι $x \in \mathbb{Z}$.

2.2.10. Έστω x και ακολουθία (x_n).
[α] Προφανώς, αν για *κάποιον* $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$, τότε για *τον ίδιο* ϵ ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq \epsilon$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει. Παράδειγμα: $x_n = (-1)^{n-1}$, $x = 0$, $\epsilon = 1$.
Αποδείξτε τον εξής ισοδύναμο ορισμό ορίου: $x_n \to x$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq \epsilon$.
[β] Προφανώς, αν για *κάποιον* $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$, τότε για *τον ίδιο* M ισχύει τελικά $x_n \geq M$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει. Παράδειγμα: $x_n = 1$, $M = 1$.
Αποδείξτε τον εξής ισοδύναμο ορισμό ορίου: $x_n \to +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n \geq M$.

2.3 Ιδιότητες σχετικές με όρια ακολουθιών.

Η πρόταση 2.1 λέει ότι *το αν έχει όριο ή όχι μια ακολουθία καθώς και η τιμή του ορίου της, στην περίπτωση που αυτή έχει όριο, δεν εξαρτώνται από τους αρχικούς όρους της.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1. *Έστω δύο ακολουθίες οι οποίες ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Αν η μία από τις δύο ακολουθίες έχει κάποιο όριο, τότε και η άλλη έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Το ότι οι ακολουθίες (x_n), (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα σημαίνει ότι υπάρχουν k_0, m_0 ώστε να ισχύει

$$x_{k_0} = y_{m_0}, \quad x_{k_0+1} = y_{m_0+1}, \quad x_{k_0+2} = y_{m_0+2}, \ \ldots \ . \tag{2.1}$$

[6] Η αναλυτική διατύπωση της *άρνησης* του ορίου.

[7] Ισοδύναμος ορισμός ορίου. Το συμπέρασμα είναι ότι *στον ορισμό του ορίου μπορούμε να περιοριστούμε σε $\epsilon > 0$ οι οποίοι δεν ξεπερνούν έναν αυθαίρετα προεπιλεγμένο $\epsilon_0 > 0$.*

Υποθέτουμε ότι $x_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $x_n \in N_a(\epsilon)$ από κάποιον δείκτη και πέρα. Λόγω της (2.1) είναι προφανές ότι ισχύει και $y_n \in N_a(\epsilon)$ από κάποιον δείκτη και πέρα. Πράγματι, έστω ότι ισχύει $x_n \in N_a(\epsilon)$ από τον n_0 και πέρα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση. Αν $n_0 \leq k_0$, τότε ισχύει $x_n \in N_a(\epsilon)$ από τον k_0 και πέρα και, επομένως, ισχύει $y_n \in N_a(\epsilon)$ από τον m_0 και πέρα.
Δεύτερη περίπτωση. Αν $n_0 > k_0$, τότε γράφουμε $n_0 = k_0 + p$ και βλέπουμε αμέσως ότι ισχύει $y_n \in N_a(\epsilon)$ από τον $m_0 + p$ και πέρα.
Άρα $y_n \to a$. □

Παράδειγμα 2.3.1. Δείτε τις ακολουθίες $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$, $(-2, 5, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$. Έχουμε αποδείξει ότι η πρώτη συγκλίνει στον 0. Τώρα παρατηρούμε ότι οι δύο ακολουθίες ταυτίζονται, ξεκινώντας από τον τέταρτο όρο της πρώτης και από τον τρίτο όρο της δεύτερης. Άρα και η δεύτερη ακολουθία συγκλίνει στον 0.

Παράδειγμα 2.3.2. Η ακολουθία (x_n) γράφεται $(x_1, x_2, x_3, \dots)$. Η ακολουθία (x_{n+1}) γράφεται $(x_2, x_3, x_4, \dots)$ και η ακολουθία (x_{n+2}) γράφεται $(x_3, x_4, x_5, \dots)$. Γενικότερα, η ακολουθία (x_{n+m}) γράφεται $(x_{1+m}, x_{2+m}, x_{3+m}, \dots)$. Σύμφωνα με την πρόταση 2.1,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{n\to+\infty} x_{n+m} = x.$$

Για παράδειγμα: $\frac{1}{n+3} \to 0$ επειδή $\frac{1}{n} \to 0$.

2.3.1 Από ανισότητες ορίων σε ανισότητες όρων.

Η πρόταση 2.2 είναι απλή αλλά βασική: *συμπεραίνει ανισοτικές σχέσεις για τους όρους μιας ακολουθίας από ανάλογες ανισοτικές σχέσεις για το όριο της ακολουθίας.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2. *Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και αριθμοί u, l.*
[α] *Αν $x > u$, τότε ισχύει τελικά $x_n > u$.*
[β] *Αν $x < l$, τότε ισχύει τελικά $x_n < l$.*
[γ] *Αν $u < x < l$, τότε ισχύει τελικά $u < x_n < l$.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι δεξιά του u. Επειδή ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n > u$.
[β] Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι αριστερά του l. Επειδή ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n < l$.
[γ] Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους u, l. Επειδή ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $u < x_n < l$.
Με δεύτερο τρόπο. Από τα [α] και [β] συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n > u$ και ότι ισχύει τελικά $x_n < l$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > u$ και $x_n < l$ και, επομένως, $u < x_n < l$. □

Η πρόταση 2.3 εκφράζει τη **μοναδικότητα του ορίου**. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να μιλάμε για **το** όριο μιας ακολουθίας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3. *Καμιά ακολουθία δεν έχει δύο διαφορετικά όρια.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει δύο διαφορετικά όρια a, b.
Τότε μπορούμε να βρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε οι περιοχές $N_a(\epsilon)$ και $N_b(\epsilon)$ να μην έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Τότε ισχύει τελικά $x_n \in N_a(\epsilon)$ και, επίσης, ισχύει τελικά $x_n \in N_b(\epsilon)$. Άρα ισχύει τελικά $x_n \in N_a(\epsilon)$ και $x_n \in N_b(\epsilon)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Με δεύτερο τρόπο. Υποθέτουμε πάλι ότι η (x_n) έχει δύο διαφορετικά όρια a, b και θεωρούμε έναν οποιονδήποτε c ανάμεσα στους a, b. Από τα [α] και [β] της πρότασης 2.2 συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n < c$ και ότι ισχύει τελικά $x_n > c$. Άρα ισχύει τελικά $x_n < c$ και $x_n > c$ και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4. [α] *Αν* $x_n \to x \in \mathbb{R}$, *τότε η* (x_n) *είναι φραγμένη.*

[β] *Αν* $x_n \to +\infty$, *τότε η* (x_n) *είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.*

[γ] *Αν* $x_n \to -\infty$, *τότε η* (x_n) *είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε μια οποιαδήποτε περιοχή του x, για παράδειγμα την $(x-1, x+1)$. Τότε όλοι οι όροι της (x_n) από κάποιον δείκτη n_0 και πέρα ανήκουν στο διάστημα $(x-1, x+1)$. Τώρα, από τους όρους της (x_n) μπορεί να βρίσκονται εκτός του διαστήματος $(x-1, x+1)$ μόνο κάποιοι από τους $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$. Επειδή το πλήθος τους είναι πεπερασμένο, μπορούμε να μεγαλώσουμε, αν χρειάζεται, το διάστημα $(x-1, x+1)$ και να βρούμε ένα διάστημα $[l, u]$ το οποίο περιέχει *όλους* τους όρους της (x_n). Άρα η (x_n) είναι φραγμένη.

[β] Θεωρούμε μια οποιαδήποτε περιοχή του $+\infty$, για παράδειγμα την $(1, +\infty]$. Τότε όλοι οι όροι της (x_n) από κάποιον δείκτη n_0 και πέρα ανήκουν στο διάστημα $(1, +\infty]$. Άρα από τους όρους της (x_n) μπορεί να βρίσκονται εκτός του διαστήματος $(1, +\infty]$ μόνο κάποιοι από τους $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$. Επειδή το πλήθος τους είναι πεπερασμένο, μπορούμε να μεγαλώσουμε, αν χρειάζεται, το διάστημα $(1, +\infty]$ και να βρούμε ένα διάστημα $[l, +\infty]$ το οποίο περιέχει *όλους* τους όρους της (x_n). Άρα η (x_n) είναι κάτω φραγμένη.
Τέλος, για κάθε l ισχύει τελικά $x_n > l$. Άρα κανένας l δεν είναι άνω φράγμα της (x_n), οπότε η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

[γ] Όπως στο [β]. □

Παράδειγμα 2.3.3. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει. Άρα δεν αληθεύει το αντίστροφο στην πρόταση 2.4[α].

Παράδειγμα 2.3.4. Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία $\left(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\right)$, δηλαδή η $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \ldots)$, είναι κάτω φραγμένη και όχι άνω φραγμένη. Όμως, η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$, διότι τότε θα έπρεπε, σύμφωνα με την πρόταση 2.2, να είναι τελικά οι όροι της > 1, το οποίο δεν είναι σωστό. Ομοίως, η ακολουθία $(-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, \ldots)$ είναι άνω φραγμένη, όχι κάτω φραγμένη και δεν αποκλίνει στο $-\infty$. Άρα τα αντίστροφα στην πρόταση 2.4[β,γ] δεν αληθεύουν.

2.3.2 Από ανισότητες όρων σε ανισότητες ορίων.

Η πρόταση 2.5 είναι κι αυτή απλή αλλά βασική: *συμπεραίνει ανισοτικές σχέσεις για το όριο μιας ακολουθίας από ανάλογες ανισοτικές σχέσεις για τους όρους της ακολουθίας.* Τα πρώτα δύο συμπεράσματα της πρότασης 2.5 είναι ακριβώς ισοδύναμα με τα πρώτα δύο συμπεράσματα της πρότασης 2.2. Τα αναφέρουμε σε ξεχωριστή πρόταση με τη νέα μορφή τους, διότι με αυτήν τη μορφή προκύπτει πολλές φορές η ανάγκη εφαρμογής τους. Το τρίτο συμπέρασμα της πρότασης 2.5 αποτελεί ένα χρήσιμο κριτήριο μη-ύπαρξης ορίου: *αν δύο συγκεκριμένοι αριθμοί χωρίζουν κάποιους άπειρους όρους μιας ακολουθίας από κάποιους άλλους άπειρους όρους της ίδιας ακολουθίας, τότε η ακολουθία δεν έχει όριο.*[8]

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.5. [α] *Αν ισχύει* $x_n \geq l$ *για άπειρους* n *και* $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, *τότε* $x \geq l$.

[β] *Αν ισχύει* $x_n \leq u$ *για άπειρους* n *και* $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, *τότε* $x \leq u$.

[γ] *Αν* $u < l$ *και ισχύει* $x_n \leq u$ *για άπειρους* n *και* $x_n \geq l$ *για άπειρους* n, *τότε η* (x_n) *δεν έχει όριο.*

Απόδειξη. [α] Αν ήταν $x < l$, τότε, σύμφωνα με την πρόταση 2.2, θα ίσχυε τελικά $x_n < l$, οπότε θα ίσχυε $x_n \geq l$ για το πολύ πεπερασμένους n και έτσι θα καταλήγαμε σε άτοπο. Άρα $x \geq l$.

[β] Ομοίως.

[γ] Αν η (x_n) είχε όριο, τότε, λόγω των [α] και [β], το όριο αυτό θα ήταν $\leq u$ και $\geq l$ και, επομένως, θα ίσχυε $l \leq u$ και θα καταλήγαμε σε άτοπο. Άρα η (x_n) δεν έχει όριο. □

Παράδειγμα 2.3.5. Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και ισχύει $x_n \in [l, u]$ για άπειρους n, τότε $x \in [l, u]$.

[8] Ισχύει και το αντίστροφο. Δείτε την άσκηση 2.5.15.

Παράδειγμα 2.3.6. Η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$, δηλαδή η $(1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$, δεν έχει όριο, αφού άπειροι όροι της είναι ≥ 1 και άπειροι όροι της είναι ≤ -1.

Παράδειγμα 2.3.7. Η ακολουθία $\big(n - 3[\frac{n}{3}]\big)$, δηλαδή η $(1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots)$, δεν έχει όριο, διότι άπειροι όροι της είναι ≥ 2 και άπειροι όροι της είναι ≤ 0.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.6. *Αν ισχύει $x_n \leq y_n$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \leq y$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $y < x$.
Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε a ώστε $y < a < x$. Τότε ισχύει τελικά $y_n < a$ και ισχύει τελικά $a < x_n$. Επομένως, ισχύει τελικά $y_n < a$ και $a < x_n$. Άρα ισχύει τελικά $y_n < x_n$ και, επομένως, ισχύει $x_n \leq y_n$ για το πολύ πεπερασμένους n. Άτοπο.
Άρα $x \leq y$. □

Παράδειγμα 2.3.8. Ισχύει $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ για κάθε n και $-\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{1}{n} \to 0$.
Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι, αν ισχύει $x_n < y_n$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε *δεν* συνεπάγεται $x < y$. Από το ότι ισχύει $x_n < y_n$ για άπειρους n συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για άπειρους n και συμπεραίνουμε ότι $x \leq y$. Άρα $x < y$ ή $x = y$ και δεν μπορούμε να αποκλείσουμε καμιά από τις δύο αυτές περιπτώσεις.

Οι προτάσεις 2.7 και 2.8 είναι πολύ χρήσιμες για την απόδειξη ύπαρξης αλλά και τον υπολογισμό του ορίου μιας ακολουθίας: η μέθοδος είναι να συγκρίνουμε την ακολουθία με άλλες κατάλληλες ακολουθίες των οποίων γνωρίζουμε (ή βρίσκουμε πιο εύκολα) τα όρια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.7. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$.*
[α] *Αν $x_n \to +\infty$, τότε $y_n \to +\infty$.*
[β] *Αν $y_n \to -\infty$, τότε $x_n \to -\infty$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > M$ και, επειδή ισχύει τελικά $y_n \geq x_n$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n > M$ και $y_n \geq x_n$. Άρα ισχύει τελικά $y_n > M$. Επομένως, $y_n \to +\infty$.
[β] Ομοίως. □

Παράδειγμα 2.3.9. Ισχύει $2n + (-1)^n n = 2n \pm n \geq n$ για κάθε n και $n \to +\infty$. Επομένως, $2n + (-1)^n n \to +\infty$.

Παράδειγμα 2.3.10. Ισχύει $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \geq n$ για κάθε n και $n \to +\infty$. Άρα $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \to +\infty$.

Παράδειγμα 2.3.11. Ισχύει $n! \geq n$ για κάθε n. Άρα $n! \to +\infty$.

Η πρόταση 2.8 εκφράζει τη λεγόμενη **ιδιότητα παρεμβολής**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n \leq z_n$. Αν $x_n \to a$ και $z_n \to a$, τότε $y_n \to a$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ και, επίσης, ισχύει τελικά $z_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Άρα ισχύει τελικά $x_n, z_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ και, επειδή ο y_n είναι ανάμεσα στους x_n, z_n, ισχύει τελικά $y_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Άρα $y_n \to a$. □

Παράδειγμα 2.3.12. Ισχύει $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε n. Επειδή $-\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{1}{n} \to 0$, συνεπάγεται $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$.

Παράδειγμα 2.3.13. Ισχύει $0 \leq \frac{n-2[n/2]}{n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε n. Επειδή $0 \to 0$ και $\frac{1}{n} \to 0$, συνεπάγεται $\frac{n-2[n/2]}{n} \to 0$.

2.3.3 Αλγεβρικοί κανόνες ορίων.

Ο επόμενος ορισμός περιγράφει κάποιους βασικούς τρόπους με τους οποίους δημιουργούμε νέες ακολουθίες από ήδη υπάρχουσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.10. *Η* ***αντίθετη*** *ακολουθία μιας ακολουθίας* (x_n) *είναι η ακολουθία* $(-x_n)$.
Το ***άθροισμα*** *δύο ακολουθιών* (x_n) *και* (y_n) *είναι η ακολουθία* $(x_n + y_n)$.
Η ***διαφορά*** *δύο ακολουθιών* (x_n) *και* (y_n) *είναι η ακολουθία* $(x_n - y_n)$. *Επειδή* $x_n - y_n = x_n + (-y_n)$, *η διαφορά των* (x_n) *και* (y_n) *είναι η ίδια ακολουθία με το άθροισμα της* (x_n) *και της αντίθετης της* (y_n).
Το ***γινόμενο*** *δύο ακολουθιών* (x_n) *και* (y_n) *είναι η ακολουθία* $(x_n y_n)$.
Το ***γινόμενο*** *αριθμού* λ *και ακολουθίας* (x_n) *είναι η ακολουθία* (λx_n). *Προφανώς, η ακολουθία* (λx_n) *είναι η ίδια με το γινόμενο της σταθερής ακολουθίας* (λ) *και της* (x_n)
Η ***αντίστροφη*** *μιας ακολουθίας* (x_n) *είναι η ακολουθία* $\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
Για να ορίζεται η ακολουθία $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ *πρέπει να ισχύει* $x_n \neq 0$ *για κάθε* n.
Ο ***λόγος*** *δύο ακολουθιών* (x_n) *και* (y_n) *είναι η ακολουθία* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$. *Επειδή* $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n}$, *ο λόγος των* (x_n) *και* (y_n) *είναι η ίδια ακολουθία με το γινόμενο της* (x_n) *και της αντίστροφης της* (y_n).
Για να ορίζεται η ακολουθία $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ *πρέπει να ισχύει* $y_n \neq 0$ *για κάθε* n.
Η ***απόλυτη τιμή*** *μιας ακολουθίας* (x_n) *είναι η ακολουθία* $(|x_n|)$.

Η επόμενη πρόταση περιέχει τους λεγόμενους **αλγεβρικούς κανόνες ορίων**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.9. *Έστω* $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ *και αριθμός* λ.
[α] *Αν* $x_n \to x$, *τότε* $-x_n \to -x$.
[β] *Αν* $x_n \to x$, *τότε* $|x_n| \to |x|$.
[γ] *Αν* $x_n \to x$ *και* $y_n \to y$ *και το* $x + y$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε* $x_n + y_n \to x + y$.
[δ] *Αν* $x_n \to x$ *και* $y_n \to y$ *και το* $x - y$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε* $x_n - y_n \to x - y$.
[ε] *Αν* $x_n \to x$ *και* $y_n \to y$ *και το* xy *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε* $x_n y_n \to xy$.
[στ] *Αν* $x_n \to x$ *και το* λx *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε* $\lambda x_n \to \lambda x$.
[ζ] *Έστω ότι ισχύει* $x_n \neq 0$ *για κάθε* n. *Αν* $x_n \to x$ *και το* $\frac{1}{x}$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή, αν* $x \neq 0$*), τότε* $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$.
[η] *Έστω ότι ισχύει* $y_n \neq 0$ *για κάθε* n. *Αν* $x_n \to x$ *και* $y_n \to y$ *και το* $\frac{x}{y}$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε* $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$.

Απόδειξη. [α] Έστω $x_n \to x$ και $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$ και, επομένως,

$$|(-x_n) - (-x)| = |x_n - x| < \epsilon.$$

Άρα $-x_n \to -x$.
Έστω $x_n \to +\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$ και, επομένως, $-x_n < -M$. Άρα $-x_n \to -\infty$, οπότε $-x_n \to -(+\infty)$.
Έστω $x_n \to -\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n < -M$ και, επομένως, $-x_n > M$. Άρα $-x_n \to +\infty$, οπότε $-x_n \to -(-\infty)$.
[β] Έστω $x_n \to x$ και $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$ και, επομένως,

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x| < \epsilon.$$

Άρα $|x_n| \to |x|$.
Έστω $x_n \to +\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$ και, επομένως, $|x_n| > M$. Άρα $|x_n| \to +\infty$, οπότε $|x_n| \to |+\infty|$.
Έστω $x_n \to -\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n < -M$ και, επομένως, $|x_n| > M$. Άρα $|x_n| \to +\infty$, οπότε $|x_n| \to |-\infty|$.

[γ] Έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και, επίσης, ισχύει τελικά $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$, οπότε ισχύουν τελικά και οι δύο αυτές ανισότητες, οπότε ισχύει τελικά

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα $x_n + y_n \to x + y$.
Έστω $x_n \to +\infty$ και $y_n \to y$ και $y \in (-\infty, +\infty]$. Τότε η (y_n) είναι κάτω φραγμένη, οπότε υπάρχει l ώστε να ισχύει $y_n > l$ για κάθε n. Τώρα, για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M - l$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$x_n + y_n > (M - l) + l = M.$$

Άρα $x_n + y_n \to +\infty$, οπότε $x_n + y_n \to x + y$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[δ] Άμεση συνέπεια των [α] και [γ].

[ε] Έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε η (y_n) είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|y_n| \leq M$ για κάθε n. Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2M+1}$ και, επίσης, ισχύει τελικά $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2|x|+1}$, οπότε ισχύουν τελικά και οι δύο αυτές ανισότητες, οπότε ισχύει τελικά

$$|x_n y_n - xy| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \leq |x_n - x||y_n| + |x||y_n - y| \leq \tfrac{\epsilon M}{2M+1} + \tfrac{|x|\epsilon}{2|x|+1} < \epsilon.$$

Άρα $x_n y_n \to xy$.
Έστω $x_n \to +\infty$ και $y_n \to y$ και $y \in (0, +\infty]$. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε l ώστε $0 < l < y$. Τότε ισχύει τελικά $l < y_n$. Τώρα, για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > \frac{M}{l}$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$x_n y_n > \tfrac{M}{l} l = M.$$

Άρα $x_n y_n \to +\infty$, οπότε $x_n y_n \to xy$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[στ] Άμεση συνέπεια του [ε].

[ζ] Έστω $x_n \to x$ και $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n. Τότε $|x_n| \to |x|$. Επειδή $|x| > 0$, θεωρούμε έναν οποιονδήποτε l ώστε $0 < l < |x|$ και τότε ισχύει τελικά $|x_n| > l$. Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < |x|l\epsilon$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$\left|\tfrac{1}{x_n} - \tfrac{1}{x}\right| = \tfrac{|x_n - x|}{|x||x_n|} < \tfrac{|x|l\epsilon}{|x|l} = \epsilon.$$

Άρα $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$.
Έστω $x_n \to +\infty$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n > \frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως,

$$\left|\tfrac{1}{x_n} - 0\right| = \tfrac{1}{x_n} < \epsilon.$$

Άρα $\frac{1}{x_n} \to 0$, οπότε $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{+\infty}$.
Η περίπτωση $x_n \to -\infty$ προκύπτει από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[η] Άμεση συνέπεια των [ε] και [ζ]. $\square$

Παράδειγμα 2.3.14. Αν $x_n \to x$, $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}$, τότε ${x_n}^k \to x^k$.
Πράγματι, ${x_n}^k = x_n \cdots x_n \,(k \text{ φορές}) \to x \cdots x \,(k \text{ φορές}) = x^k$.
Για παράδειγμα, από το $\frac{n-1}{n} \to 1$ συνεπάγεται το $(\frac{n-1}{n})^3 \to 1^3 = 1$.
Αν $x_n \to +\infty$, τότε, με την ίδια απόδειξη, ${x_n}^k \to +\infty$. Ομοίως, αν $x_n \to -\infty$, τότε ${x_n}^k \to +\infty$, αν ο k είναι άρτιος, και ${x_n}^k \to -\infty$, αν ο k είναι περιττός.
Τέλος, από τα δύο τελευταία και από τον κανόνα αντιστρόφου (ή από τον κανόνα αντιστρόφου και

από το πρώτο), συμπεραίνουμε ότι, αν $x_n \to \pm\infty$, τότε σε κάθε περίπτωση $\frac{1}{{x_n}^k} \to 0$.
Ειδικότερα:

$$n^k \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } k \in \mathbb{Z},\, k > 0 \\ 0, & \text{αν } k \in \mathbb{Z},\, k < 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.3.15. $\left|(-1)^{n-1}\right| = 1 \to 1$ ενώ η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ δεν έχει όριο. Δηλαδή, το αντίστροφο της πρότασης 2.9[β] δεν ισχύει.
Αν, όμως, $x = 0$, τότε το αντίστροφο ισχύει: $x_n \to 0$ αν και μόνο αν $|x_n| \to |0| = 0$.
Πράγματι, οι ανισότητες $|x_n - 0| < \epsilon$ και $\big||x_n| - 0\big| < \epsilon$ που εμφανίζονται στους ορισμούς των ορίων $x_n \to 0$ και $|x_n| \to 0$ είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 2.3.16. Έστω πολυώνυμο $a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ τουλάχιστον πρώτου βαθμού. Δηλαδή, έστω $k \geq 1$ και $a_k \neq 0$.
Τότε γράφουμε

$$a_0 + a_1n + \cdots + a_kn^k = n^k\big(a_0\tfrac{1}{n^k} + a_1\tfrac{1}{n^{k-1}} + \cdots + a_{k-1}\tfrac{1}{n} + a_k\big).$$

Το όριο της παρένθεσης είναι a_k, διότι κάθε όρος της εκτός του τελευταίου έχει όριο 0. Επίσης, $n^k \to +\infty$. Άρα

$$a_0 + a_1n + \cdots + a_kn^k \to a_k(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0 \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η τιμή του ορίου εξαρτάται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο του πολυωνύμου. Δηλαδή, $\lim_{n\to+\infty}(a_0 + a_1n + \cdots + a_kn^k) = \lim_{n\to+\infty} a_kn^k$.
Μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα: $3n^2 - 5n + 2 \to +\infty$ και $-\frac{1}{2}n^5 + 4n^4 - n^3 \to -\infty$.
Ακόμη: $-2n^5 - 2n^2 + n - 7 \to -\infty$, οπότε $(-2n^5 - 2n^2 + n - 7)^8 \to +\infty$.
Επίσης: $-n^3 + 2n - 1 \to -\infty$, οπότε $(-n^3 + 2n - 1)^5 \to -\infty$.

Παράδειγμα 2.3.17. Έστω ρητή παράσταση $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$, όπου $a_k \neq 0$, $b_m \neq 0$.
Γράφουμε

$$\tfrac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_mn^m} = \tfrac{n^k}{n^m}\big(a_0\tfrac{1}{n^k} + \cdots + a_{k-1}\tfrac{1}{n} + a_k\big)\big/\big(b_0\tfrac{1}{n^m} + \cdots + b_{m-1}\tfrac{1}{n} + b_m\big).$$

Είδαμε προηγουμένως ότι τα όρια του αριθμητή και του παρονομαστή του τελευταίου λόγου είναι ίσα με a_k και b_m. Επειδή $\frac{n^k}{n^m} = n^{k-m}$, προκύπτει ότι

$$\tfrac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_mn^m} \to \begin{cases} (a_k/b_m)(+\infty), & \text{αν } k > m \\ a_k/b_m, & \text{αν } k = m \\ 0, & \text{αν } k < m \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι η τιμή του ορίου εξαρτάται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή.
Για παράδειγμα: $\frac{n^3-2n^2+n+1}{2n^2-3n-1} \to +\infty$, $\frac{-n^2+n}{n+2} \to -\infty$, $\frac{n^4-n^3}{n^4+1} \to 1$ και $\frac{-n^2+n+4}{n^3+n^2+5n+6} \to 0$.
Επίσης: $\frac{-2n^3+n^2+n+1}{2n+3} \to -\infty$, οπότε $\left(\frac{-2n^3+n^2+n+1}{2n+3}\right)^7 \to -\infty$.
Και: $\frac{n^3+n+7}{-3n^3+n^2+1} \to -\frac{1}{3}$, οπότε $\left(\frac{n^3+n+7}{-3n^3+n^2+1}\right)^3 \to -\frac{1}{27}$.

Παράδειγμα 2.3.18. Θα αποδείξουμε ότι

$$n^a \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ 0, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

Έστω $a > 0$. Θεωρούμε $M > 0$ και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $n^a > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Τώρα, το $n^a > M$ συνεπάγεται από το $n > M^{1/a}$. Σύμφωνα με το θεώρημα 1.1, υπάρχει $n_0 > M^{1/a}$. Προφανώς, η ανισότητα $n > M^{1/a}$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, με έναν τέτοιο n_0, ισχύει $n > M^{1/a}$ και, επομένως, $n^a > M$ για κάθε $n \geq n_0$.
Μπορούμε (χωρίς να είναι υποχρεωτικό) να θεωρήσουμε τον $n_0 = [M^{1/a}] + 1$ και βλέπουμε ότι, με αυτόν τον n_0 ή και με οποιονδήποτε μεγαλύτερο n_0, ισχύει $n > M^{1/a}$ για κάθε $n \geq n_0$.

Έστω $a < 0$. Μπορούμε, όπως πριν, να αποδείξουμε ότι $n^a \to 0$ βάσει του ορισμού, αλλά μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο όριο: είναι $-a > 0$ και, επομένως, $n^a = \frac{1}{n^{-a}} \to \frac{1}{+\infty} = 0$.

Παράδειγμα 2.3.19. Θεωρούμε την ακολουθία $(a, a^2, a^3, a^4, \dots)$, δηλαδή την (a^n). Η ακολουθία αυτή είναι γνωστή από το λύκειο: είναι η **γεωμετρική πρόοδος** με λόγο a.

Αν $a = 1$, προκύπτει η σταθερή ακολουθία (1) η οποία συγκλίνει στον 1. Επίσης, αν $a = 0$, προκύπτει η σταθερή ακολουθία (0) η οποία συγκλίνει στον 0.

Αν $a \leq -1$, οι όροι της (a^n) είναι $a \leq -1$, $a^2 \geq 1$, $a^3 \leq -1$, $a^4 \geq 1, \dots$. Δηλαδή, η ακολουθία έχει άπειρους όρους ≤ -1 και άπειρους όρους ≥ 1 και, επομένως, δεν έχει όριο.

Έστω $a > 1$. Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται ότι ισχύει

$$a^n \geq n(a-1) + 1$$

για κάθε n. Επειδή $n(a-1) + 1 \to +\infty$, συνεπάγεται $a^n \to +\infty$.
Μπορούμε, επίσης, να βασιστούμε στον ορισμό του ορίου. Θεωρούμε $M > 0$ και θα βρούμε n_0 ώστε να ισχύει $a^n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Τώρα, το $a^n > M$ συνεπάγεται από το $n > \log_a M$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \log_a M$ και, με έναν τέτοιο n_0, συνεπάγεται ότι ισχύει $n > \log_a M$ και, επομένως, $a^n > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Τέλος, έστω $0 < |a| < 1$. Τότε $\frac{1}{|a|} > 1$, οπότε από την προηγούμενη περίπτωση συνεπάγεται $|a^n| = \frac{1}{(1/|a|)^n} \to \frac{1}{+\infty} = 0$. Άρα $a^n \to 0$.

Συμπέρασμα:[9]

$$a^n \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ \to 1, & \text{αν } a = 1 \\ \to 0, & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.3.20. Η ακολουθία $(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n)$ ονομάζεται ακολουθία των **γεωμετρικών αθροισμάτων** με λόγο a. Το αποτέλεσμα είναι:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } a \geq 1 \\ \to 1/(1-a), & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Αν $a \geq 1$, τότε

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n \geq 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1.$$

Επειδή $n + 1 \to +\infty$, συνεπάγεται $1 + a + a^2 + \cdots + a^n \to +\infty$.
Οι υπόλοιπες περιπτώσεις βασίζονται στο όριο της γεωμετρικής προόδου. Αν $-1 < a < 1$, τότε

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \to \frac{0 - 1}{a - 1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Έστω $a \leq -1$. Είδαμε ότι ισχύει $a^{n+1} = 1 + (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^n)$ για κάθε n. Αν υποθέσουμε ότι $1 + a + a^2 + \cdots + a^n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $a^{n+1} \to 1 + (a-1)x$. Όμως, η (a^{n+1}) δεν έχει όριο. Άρα η $(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n)$ δεν έχει όριο.

[9] Η άσκηση 2.4.9 περιέχει δεύτερη απόδειξη του ορίου της γεωμετρικής προόδου καθώς και των ακολουθιών στα παραδείγματα 2.3.22, 2.3.23, 2.3.24 και 2.3.25.

Παράδειγμα 2.3.21. Θα αποδείξουμε ότι

$$\log_a n \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ -\infty, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Έστω $a > 1$. Θεωρούμε $M > 0$ και θα δούμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\log_a n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $a > 1$, το $\log_a n > M$ συνεπάγεται από το $n > a^M$. Όμως, γνωρίζουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε $n_0 > a^M$ και, τότε, με έναν τέτοιο n_0, ισχύει $\log_a n > M$ και, επομένως, $n > a^M$ για κάθε $n \geq n_0$.
Έστω $0 < a < 1$. Τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\log_a n = -\log_{1/a} n \to -(+\infty) = -\infty$.

Ας δούμε τώρα μερικά λίγο πιο δύσκολα - αλλά χρήσιμα - παραδείγματα ορίων.

Παράδειγμα 2.3.22. Θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \qquad \text{αν } \ a > 0.$$

Η περίπτωση $a = 1$ είναι απλή: $\sqrt[n]{1} = 1 \to 1$.
Έστω $a > 1$. Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται ότι ισχύει $(1+\frac{a-1}{n})^n \geq 1+n\frac{a-1}{n} = a$ και, επομένως, $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n}$ για κάθε n. Με παρεμβολή, $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \to \frac{1}{1} = 1$.

Παράδειγμα 2.3.23. Θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt[n]{n} \to 1.$$

Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται ότι ισχύει $(1 + \frac{\sqrt{n}-1}{n})^n \geq 1 + n\frac{\sqrt{n}-1}{n} = \sqrt{n}$ και, επομένως, $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq (1 + \frac{\sqrt{n}-1}{n})^2 < (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})^2$ για κάθε n. Άρα $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Η πρόταση 2.10 εκφράζει το λεγόμενο **κριτήριο λόγου για ακολουθίες** και είναι πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό κάποιων "περίεργων" ορίων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.10. [10] *Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.*
[α] *Αν $0 < b < 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b$, τότε $x_n \to 0$.*
[β] *Αν $b > 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$, τότε $x_n \to +\infty$.*
[γ] *Αν $0 \leq a < 1$ και αν $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$, τότε $x_n \to 0$.*
[δ] *Αν $a > 1$ και αν $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$, τότε $x_n \to +\infty$.*

Απόδειξη. Όπως θα φανεί στην απόδειξη, *πίσω και από τα τέσσερα όρια κρύβεται μια "σύγκριση" με κατάλληλη γεωμετρική πρόοδο.*
[α] Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0 + 1$ ισχύει

$$0 < x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} x_{n_0} \leq b\, b \cdots b\, b\, x_{n_0} = b^{n-n_0} x_{n_0} = \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}} b^n = c\, b^n,$$

όπου $c = \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}$. Επειδή $0 < b < 1$, συνεπάγεται $b^n \to 0$. Άρα $x_n \to 0$.
[β] Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0 + 1$ ισχύει

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} x_{n_0} \geq b\, b \cdots b\, b\, x_{n_0} = b^{n-n_0} x_{n_0} = \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}} b^n = c\, b^n,$$

όπου $c = \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}$. Επειδή $b > 1$, συνεπάγεται $b^n \to +\infty$. Άρα $x_n \to +\infty$.
[γ] Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε b ώστε $a < b < 1$. Τότε ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b$ και από το [α] συνεπάγεται $x_n \to 0$.
[δ] Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε b ώστε $a > b > 1$. Τότε ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$ και από το [β] συνεπάγεται $x_n \to +\infty$. □

[10] Μια χρήσιμη επέκταση αυτής της πρότασης είναι στην άσκηση 2.4.11.

Παράδειγμα 2.3.24. Θα αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{a^n}{n^k} \to +\infty \qquad \text{αν } \ a>1 \ \text{ και } \ k\in\mathbb{N}.$$

Είναι $\frac{a^{n+1}/(n+1)^k}{a^n/n^k} = a\big(\frac{n}{n+1}\big)^k \to a$ και $a>1$. Άρα $\frac{a^n}{n^k} \to +\infty$.
Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:
Οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδος (a^n) με λόγο $a>1$ αυξάνεται πιο γρήγορα από οποιαδήποτε δύναμη (n^k).

Παράδειγμα 2.3.25. Θα αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{a^n}{n!} \to 0.$$

Αν $a=0$, τότε, προφανώς, $\frac{a^n}{n!}=0\to 0$.
Έστω $a\neq 0$. Τότε $\frac{|a|^{n+1}/(n+1)!}{|a|^n/n!} = \frac{|a|}{n+1} \to 0$. Άρα $\frac{|a|^n}{n!} \to 0$ και, επομένως, $\frac{a^n}{n!}\to 0$. Δηλαδή:
Οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδος (a^n) με λόγο $a>1$ αυξάνεται πιο αργά από το παραγοντικό $(n!)$.

Τα αποτελέσματα στην πρόταση 2.11 είναι κάπως γενικότερα από ανάλογα αποτελέσματα της πρότασης 2.9 και είναι χρήσιμο να τα έχουμε υπ’ όψη μας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.11. [α] *Αν $x_n\to+\infty$ και η (y_n) είναι κάτω φραγμένη, τότε $x_n+y_n\to+\infty$.*
Αν $x_n\to-\infty$ και η (y_n) είναι άνω φραγμένη, τότε $x_n+y_n\to-\infty$.
[β] *Αν $x_n\to 0$ και η (y_n) είναι φραγμένη, τότε $x_ny_n\to 0$.*
[γ] *Αν $x_n\to+\infty$ και η (y_n) έχει τελικά θετικό κάτω φράγμα, τότε $x_ny_n\to+\infty$.*
Αν $x_n\to-\infty$ και η (y_n) έχει τελικά θετικό κάτω φράγμα, τότε $x_ny_n\to-\infty$.
[δ] *Έστω ότι ισχύει $x_n\neq 0$ για κάθε n.*
Αν $x_n\to 0$ και η (x_n) είναι τελικά θετική, τότε $\frac{1}{x_n}\to+\infty$.
Αν $x_n\to 0$ και η (x_n) είναι τελικά αρνητική, τότε $\frac{1}{x_n}\to-\infty$.
[ε] *Έστω ότι ισχύει $x_n\neq 0$ για κάθε n. Αν $|x_n|\to+\infty$, τότε $\frac{1}{x_n}\to 0$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $x_n\to+\infty$ και έστω ότι η (y_n) είναι κάτω φραγμένη, οπότε υπάρχει αριθμός l ώστε να ισχύει $y_n\geq l$ για κάθε n. Τότε για κάθε $M>0$ ισχύει τελικά $x_n>M-l$ και, επομένως, $x_n+y_n>(M-l)+l=M$. Άρα $x_n+y_n\to+\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[β] Έστω $x_n\to 0$ και έστω ότι η (y_n) είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει αριθμός $M\geq 0$ ώστε να ισχύει $|y_n|\leq M$ για κάθε n. Τότε για κάθε $\epsilon>0$ ισχύει τελικά $|x_n|<\frac{\epsilon}{M+1}$ και, επομένως,

$$|x_ny_n| = |x_n||y_n| \leq \tfrac{\epsilon M}{M+1} < \epsilon.$$

Άρα $x_ny_n\to 0$.
[γ] Έστω $x_n\to+\infty$ και έστω ότι η (y_n) έχει τελικά θετικό κάτω φράγμα, οπότε υπάρχει αριθμός $l>0$ ώστε να ισχύει τελικά $y_n\geq l$. Τότε για κάθε $M>0$ ισχύει τελικά $x_n>\frac{M}{l}$ και, επομένως, ισχύει τελικά $x_ny_n>\frac{M}{l}l=M$. Άρα $x_ny_n\to+\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[δ] Έστω $x_n\to 0$ και έστω ότι ισχύει τελικά $x_n>0$. Τότε για κάθε $M>0$ ισχύει τελικά $|x_n-0|<\frac{1}{M}$. Άρα ισχύει τελικά $0<x_n<\frac{1}{M}$ και, επομένως, $\frac{1}{x_n}>M$. Άρα $\frac{1}{x_n}\to+\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[ε] Έστω ότι ισχύει $x_n\neq 0$ για κάθε n και $|x_n|\to+\infty$. Τότε $\frac{1}{|x_n|}\to 0$ και, επομένως, $\frac{1}{x_n}\to 0$. □

Παράδειγμα 2.3.26. Αν η (x_n) είναι φραγμένη, τότε $\frac{x_n}{n}\to 0$.
Για παράδειγμα, $\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\to 0$. Επίσης: $\frac{n-3[n/3]}{n}\to 0$ και $\frac{\sin n}{n}\to 0$.

Παράδειγμα 2.3.27. Για την ακολουθία $\big((-1)^{n-1}n\big)$ ισχύει $\big|(-1)^{n-1}n\big| = n \to +\infty$. Άρα $\frac{1}{(-1)^{n-1}n} \to 0$. Πράγματι, $\frac{1}{(-1)^{n-1}n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$. Παρατηρήστε ότι η αρχική ακολουθία $\big((-1)^{n-1}n\big)$ δεν έχει όριο.

Τι γίνεται αν $x = 0$ στην πρόταση 2.9[ζ]; Θα δούμε το επόμενο παράδειγμα ως ευκαιρία για να κάνουμε κάποια σχόλια για τη φύση της απροσδιόριστης μορφής $\frac{1}{0}$.

Παράδειγμα 2.3.28. Ισχύει $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$, αλλά η αντίστροφη ακολουθία $\big((-1)^{n-1}n\big)$ δεν έχει όριο.

Ποιό ακριβώς είναι το πρόβλημα με το παράδειγμα 2.3.28; Το πρόβλημα είναι η εναλλαγή προσήμων των όρων της ακολουθίας $\big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big)$ και, μάλιστα, όχι ακριβώς η εναλλαγή προσήμων των διαδοχικών όρων αλλά το ότι υπάρχουν άπειροι θετικοί όροι και άπειροι αρνητικοί όροι.
Αν μια ακολουθία (x_n) έχει όριο μηδέν και είναι τελικά θετική, τότε γνωρίζουμε ότι η $(\frac{1}{x_n})$ έχει όριο $+\infty$. Ομοίως, αν μια (x_n) έχει όριο μηδέν και είναι τελικά αρνητική, τότε η $(\frac{1}{x_n})$ έχει όριο $-\infty$. Από την άλλη μεριά, έστω ότι η (x_n) δεν είναι τελικά θετική ούτε τελικά αρνητική, δηλαδή ότι έχει άπειρους θετικούς όρους και άπειρους αρνητικούς όρους. Από το $x_n \to 0$ συνεπάγεται το $|x_n| \to 0$ και από αυτό συνεπάγεται το $\frac{1}{|x_n|} \to +\infty$. Άρα ισχύει τελικά $\frac{1}{|x_n|} \geq 1$, οπότε, λόγω της υπόθεσης για τα πρόσημα των όρων, ισχύει $\frac{1}{x_n} \geq 1$ για άπειρους n και ισχύει $\frac{1}{x_n} \leq -1$ για άπειρους n. Άρα η ακολουθία $(\frac{1}{x_n})$ δεν έχει όριο.

Μπορούμε, επομένως, να συμπεράνουμε ότι:
Η παράσταση $\frac{1}{0}$ είναι απροσδιόριστη μορφή αν και μόνο αν το 0 εκφράζει το όριο μιας ακολουθίας η οποία συγκλίνει στον 0 και δεν είναι τελικά θετική ούτε τελικά αρνητική.

Αν με το σύμβολο $0+$ εκφράσουμε το όριο μιας ακολουθίας η οποία συγκλίνει στον 0 και είναι τελικά θετική και με το σύμβολο $0-$ εκφράσουμε το όριο μιας ακολουθίας η οποία συγκλίνει στον 0 και είναι τελικά αρνητική, τότε μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό, ο οποίος *εκφράζει συμβολικά το περιεχόμενο της πρότασης 2.11[δ].*

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.11. *Ορίζουμε*

$$\frac{1}{0+} = +\infty, \qquad \frac{1}{0-} = -\infty.$$

Ο ορισμός αυτός θα μπορούσε να περιέχεται στον ορισμό 1.1 και συμφωνεί απολύτως με την εμπειρία: αν μια ποσότητα είναι πολύ μικρή θετική, τότε η αντίστροφη ποσότητα είναι πολύ μεγάλη θετική και, αν μια ποσότητα είναι πολύ μικρή αρνητική, τότε η αντίστροφη ποσότητα είναι πολύ μεγάλη αρνητική.

Τέλος, θα διατυπώσουμε την πρόταση 2.12, αλλά θα τήν αποδείξουμε στην ενότητα 4.3. Η τυπική θέση της είναι εδώ, αλλά η απόδειξή της (αν και θα μπορούσε να γίνει στο σημείο αυτό) ταιριάζει καλύτερα στο πλαίσιο των εννοιών του ορίου και της συνέχειας συνάρτησης. Ας θυμηθούμε από τον ορισμό 1.10 τις απροσδιόριστες μορφές της δύναμης a^b. Αυτές είναι οι 0^0, $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$, $(+\infty)^0$ και $0^{-\infty}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.12. *Η* **δύναμη** *ακολουθίας (x_n) με εκθέτη την ακολουθία (y_n) είναι η ακολουθία $\big({x_n}^{y_n}\big)$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.12. *Έστω $x_n > 0$ για κάθε n. Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν η δύναμη x^y δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε ${x_n}^{y_n} \to x^y$. Ακόμη, αν $x_n \to 0$ και $y_n \to -\infty$, τότε ${x_n}^{y_n} \to +\infty$.*

Παράδειγμα 2.3.29. Βάσει της πρότασης 2.12, μπορεί να αποδειχθεί το όριο $\sqrt[n]{a} \to 1$ όταν $a > 0$. Πράγματι, θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία (a) και την ακολουθία $(\frac{1}{n})$. Τότε $a \to a$ και $\frac{1}{n} \to 0$, οπότε $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \to a^0 = 1$.

Παράδειγμα 2.3.30. Η γεωμετρική πρόοδος (a^n) στις περιπτώσεις $a > 1$ και $0 < a < 1$ μπορεί, επίσης, να ενταχθεί στο πλαίσιο της πρότασης 2.12. Θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία (a) και την ακολουθία (n). Επειδή $a \to a$ και $n \to +\infty$, συνεπάγεται $a^n \to a^{+\infty}$, το οποίο είναι ίσο είτε με $+\infty$, αν $a > 1$, είτε με 0, αν $0 < a < 1$.

Παράδειγμα 2.3.31. Το όριο $\sqrt[n]{n} \to 1$ *δεν* αποδεικνύεται με την πρόταση 2.12. Αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες (n) και $(\frac{1}{n})$, τότε $n \to +\infty$ και $\frac{1}{n} \to 0$, αλλά η δύναμη $(+\infty)^0$ είναι απροσδιόριστη μορφή.

Παρά το ότι η παράσταση $0^{-\infty}$ είναι, όπως είπαμε, απροσδιόριστη μορφή, η τελευταία περίπτωση της πρότασης 2.12 μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.13. *Ορίζουμε*

$$(0+)^{-\infty} = +\infty.$$

Ασκήσεις.

2.3.1. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\big(\frac{(n+1)^{27}(n+3)^{79}}{(2n+1)^{106}}\big)$, $\big(\frac{-n^3+(-1)^n n^2+1}{3n^2+2(-1)^{n-1}n}\big)$, $\big(\frac{n(n+1)}{n+4} - \frac{4n^3}{4n^2+1}\big)$, $((1-n)^5 + n^4)$, $\big((\frac{-n^3+n+1}{3n^2+3n+1})^9\big)$, $\big(\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}\big)$, $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, $(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1})$.

2.3.2. Βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια των ακολουθιών $(1+2+2^2+\cdots+2^n)$, $\big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\big)$, $(1-2+2^2+\cdots+(-1)^n 2^n)$, $\big(\frac{2^7}{3^7}+\frac{2^8}{3^8}+\cdots+\frac{2^{n+6}}{3^{n+6}}\big)$, $\big(\frac{2^n}{3^n}+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\cdots+\frac{2^{2n}}{3^{2n}}\big)$.

2.3.3. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\big(\frac{2-1}{2+1}\,\frac{3-1}{3+1}\cdots\frac{n-1}{n+1}\big)$, $\big(\frac{2^3-1}{2^3+1}\,\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\big)$.

2.3.4. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \neq -1$ η ακολουθία $(\frac{x^n-1}{x^n+1})$ έχει όριο και υπολογίστε το.
Αποδείξτε ότι για κάθε x η ακολουθία $(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1})$ έχει όριο και υπολογίστε το.

2.3.5. Για ποιές τιμές του x υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(2x+1)^n}$;

2.3.6. Έστω $x \neq 1$ και έστω ότι ισχύει $x_n \neq 1$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\frac{x_n}{1-x_n} \to \frac{x}{1-x}$.

2.3.7. [11] Αποδείξτε ότι $\frac{3+(-1)^n}{2n} \to 0$, ότι ισχύει $\frac{3+(-1)^n}{2n} > 0$ για κάθε n και ότι η ακολουθία $\big(\frac{3+(-1)^n}{2n}\big)$ δεν είναι φθίνουσα.
Αποδείξτε ότι $\frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2} \to +\infty$ και ότι η ακολουθία $\big(\frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2}\big)$ δεν είναι αύξουσα.

2.3.8. Βρείτε το όριο της (x_n) αν ισχύει τελικά $n^2 - 2n < n^2 x_n \leq n^2 + 3$.
Κάντε το ίδιο για καθεμιά από τις σχέσεις: $n + 1 \leq 2nx_n \leq n + 2x_n + 3$, $n^2 + nx_n \leq 15n$ και $n^2 {x_n}^2 - 2n(n-1)x_n + n^2 - 2n - 3 \leq 0$.

2.3.9. Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν $x < y$, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $x_n < y_n$.

2.3.10. Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x \neq y$. Αν $|x - y| > a$, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $|x_n - y_n| > a$.

2.3.11. Γνωρίζουμε ότι, αν ισχύει $x_n \in [l, u]$ για άπειρους n και $x_n \to x$, τότε $x \in [l, u]$. Υπάρχει παρόμοιο συμπέρασμα για το όριο x της (x_n), αν ισχύει $x_n \in (l, u)$ για άπειρους n; Ποιό είναι το γενικό συμπέρασμα σ' αυτήν την περίπτωση;

2.3.12. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.5[γ], αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών $\big(2^{(-1)^{n-1}}\big)$, $\big((1+\frac{(-1)^{n-1}}{2})^n\big)$, $\big((-1)^{n-1}+\frac{10}{n^3}\big)$, $\big((-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\big)$.

---

[11] Αν κάποιοι θετικοί αριθμοί πλησιάζουν τον 0 ή απομακρύνονται προς το $+\infty$, έχουμε την *αυθόρμητη* αλλά *εσφαλμένη* τάση να θεωρούμε ότι αυτοί, αντιστοίχως, φθίνουν ή αυξάνονται.

2.3.13. Αποδείξτε ότι $2n+(-1)^{n-1}n \to +\infty$, $2^{-2n+(-1)^{n-1}n} \to 0$, $\big(\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{n-1}}{4}\big)^n \to 0$.

2.3.14. Αποδείξτε ότι $\big[\frac{3n^2-n+1}{n+2}\big] \to +\infty$, $\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \to 1$ και $\frac{n+2}{3n^2-n+1}\big[\frac{3n^2-n+1}{n+2}\big] \to 1$.

2.3.15. Αποδείξτε ότι $(1+\frac{1}{n})^{n^2} \to +\infty$, $(1-\frac{1}{n^2})^n \to 1$, $(1+\frac{1}{n^2})^n \to 1$.

2.3.16. [12] Αποδείξτε ότι $[nx] \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \\ -\infty, & \text{αν } x<0 \end{cases}$ $[nx]-[ny] \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } x>y \\ 0, & \text{αν } x=y \\ -\infty, & \text{αν } x<y \end{cases}$

$$nx-[ny] \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } x>y \\ \to 0, & \text{αν } x=y\in\mathbb{Z} \\ \to -\infty, & \text{αν } x<y \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } x=y\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$$

2.3.17. Αποδείξτε ότι $\frac{(3n)!}{(n!)^3} \to +\infty$.

2.3.18. Έστω $0\le a\le b\le c$. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a^n+b^n} \to b$, $\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \to c$.

2.3.19. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{n^3} \to 1$, $\sqrt[n]{n^4+3n^2+n+1} \to 1$.

2.3.20. Για κάθε a, αποδείξτε ότι $\frac{[a]+[2a]+\cdots+[na]}{n^2} \to \frac{a}{2}$.

2.3.21. Αποδείξτε ότι $\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} \to 1$ και $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \to 1$.

2.3.22. Αποδείξτε ότι $\lim_{m\to+\infty}\big(\lim_{n\to+\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}\big) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x\in\mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

2.3.23. Ποιά είναι τα πιθανά όρια της ακολουθίας (x_n) αν ικανοποιεί οποιονδήποτε από τους παρακάτω αναδρομικούς τύπους: $x_{n+1}=-x_n+2$, $x_{n+3}=x_n-3$, $x_{n+1}={x_n}^2-2$, $x_{n+2}=-{x_n}^2+2$, $x_{n+1}={x_n}^2+3$, $x_{n+2}=x_{n+1}+{x_n}^3$;

2.3.24. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, αποδείξτε ότι $\max\{x_n,y_n\} \to \max\{x,y\}$ και $\min\{x_n,y_n\} \to \min\{x,y\}$.

2.3.25. Βρείτε το λάθος: $n\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}$ (n φορές) $\to 0+\cdots+0$ (n φορές) $=n0=0$.
Βρείτε το λάθος: $(1+\frac{1}{n})^n=(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})$ (n φορές) $\to 1\cdots 1$ (n φορές) $=1^n=1$.
Ποιά είναι η σχέση των δύο "ορίων" με την πρόταση 2.9[γ,ε];

2.3.26. Έστω $x_1>0$ και $x_{n+1}\ge x_1+\cdots+x_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αν $0<a<2$, αποδείξτε ότι $\frac{x_n}{a^n} \to +\infty$. Για την περίπτωση $a=2$ εξετάστε την ακολουθία (2^n).

2.3.27. Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) που δεν έχουν όριο ώστε η (x_n+y_n) να έχει όριο.
Βρείτε (x_n), (y_n) που δεν έχουν όριο ώστε η (x_ny_n) να έχει όριο.

2.3.28. Αν η (x_n+y_n) έχει όριο και μια από τις (x_n), (y_n) έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο.
Αν η (x_ny_n) έχει όριο και μια από τις (x_n), (y_n) έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο.

[12] Με την περίπτωση $x=y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ του τελευταίου ορίου ασχολείται η άσκηση 2.7.18.

2.3.29. [13] Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$ και η $(x_n + y_n)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ και η $(x_n y_n)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ και η $(\frac{x_n}{y_n})$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ και η $(\frac{x_n}{y_n})$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $(\frac{x_n}{y_n})$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

2.3.30. [14] Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to +\infty$, $y_n \to 0$ και η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ και η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to -\infty$ και η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \{+\infty, -\infty\}$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ να έχει όριο $c \in \mathbb{R}$;

2.3.31. Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε να ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n, $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ και η $(x_n y_n)$ να μην έχει όριο.

2.3.32. Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$.

Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία αρρήτων (t_n) ώστε $t_n \to x$.

Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει *γνησίως αύξουσα* ακολουθία ρητών (r_n) και *γνησίως φθίνουσα* ακολουθία ρητών (s_n) ώστε $r_n \to x$ και $s_n \to x$. Τα ίδια γίνονται και με ακολουθίες αρρήτων.

2.3.33. Έστω μη-κενό σύνολο A.

Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$ και ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο μεγαλύτερο του $\sup A$. Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα για το $\inf A$.

Για καθένα από τα $[0, 2]$, $[0, 2)$, $\{2\}$, $[0, 1] \cup \{2\}$ βρείτε διάφορες ακολουθίες στο σύνολο οι οποίες συγκλίνουν στο supremum του συνόλου. Παρατηρήστε ότι για το πρώτο, το τρίτο και το τέταρτο σύνολο υπάρχει ως επιλογή ο απλούστερος τύπος ακολουθίας (δηλαδή μια σταθερή ακολουθία) η οποία, όμως, δεν υφίσταται ως επιλογή για το δεύτερο σύνολο. Παρατηρήστε, επίσης, ότι για το τρίτο σύνολο υπάρχει μία μόνο επιλογή ακολουθίας, ενώ για το τέταρτο σύνολο οι μόνες επιλογές είναι οι τελικά σταθερές ακολουθίες.

Για καθένα από τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $(0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $(0, 2) \cap \mathbb{Q}$ βρείτε δύο όσο το δυνατό πιο απλές ακολουθίες στο σύνολο, μία με όριο το supremum και μία με όριο το infimum του συνόλου.

2.3.34. Έστω μη-κενό σύνολο A και u άνω φράγμα του A. Αποδείξτε ότι $u = \sup A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο τον u. Προσαρμόστε το συμπέρασμα αυτό για το $\inf A$ και για κάτω φράγμα l του A.

2.3.35. Έστω μη-κενό σύνολο A.

Αν $\sup A \in A$ βρείτε μια όσο το δυνατό πιο απλή ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$.

Αν $\sup A \notin A$, αποδείξτε ότι υπάρχει *γνησίως αύξουσα* ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$.

Προσαρμόστε τα προηγούμενα για το $\inf A$.

2.3.36. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ και έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n.

Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι $\sqrt[k]{x_n} \to \sqrt[k]{x}$.

Αν $x_n \to +\infty$, αποδείξτε ότι $\sqrt[k]{x_n} \to +\infty$.

Μην χρησιμοποιήσετε την πρόταση 2.12.

[13] Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών.

[14] Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών δύναμης. Συνεχίζεται στην άσκηση 2.4.10.

2.3.37. Έστω ότι ισχύει $|x_n - x_m| \geq 1$ για κάθε n, m με $n \neq m$. Αποδείξτε ότι $|x_n| \to +\infty$. Έχει η (x_n) όριο; Εξετάστε ως παραδείγματα τις ακολουθίες (n), $(-n)$, $((-1)^{n-1}n)$.

2.3.38. Αν $x_n \to x$ και ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = x$.
Αν $x < y$ και ισχύει $x_n < y$ για κάθε n και $x_n \to x$, αποδείξτε ότι $\sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\} < y$.

2.3.39. Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι για κάθε k ισχύει $\inf\{x_n \,|\, n \geq k\} \leq x \leq \sup\{x_n \,|\, n \geq k\}$.

2.3.40. Έστω $x_n \to x$.
Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει μέγιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \geq x$.
Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει ελάχιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \leq x$.

2.3.41. [15] [α] Αποδείξτε το **θεώρημα του Cesáro**: *Αν* $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, *τότε* $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to x$.
Αν ισχύει $x_n = (-1)^{n-1}$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to 0$.
Αν ισχύει $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} n$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to +\infty$.
Και οι δύο προηγούμενες ακολουθίες (x_n) δεν έχουν όριο. Συμπεράνατε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Cesáro.
[β] Αν $a_{n+1} - a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{n} \to a$.
Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\left(\frac{a^n}{n}\right)$ και $\left(\frac{\log_a n}{n}\right)$ με $a > 1$.
[γ] Αποδείξτε την γενίκευση του θεωρήματος του Cesáro: [16] *Έστω ακολουθίες* (x_n), (y_n) *ώστε να ισχύει* $y_n > 0$ *για κάθε* n *και* $y_1 + \cdots + y_n \to +\infty$. *Αν* $\frac{x_n}{y_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, *τότε* $\frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \to l$.
[δ][17] Αν ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και $x_n \to x \in [0, +\infty]$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \to x$.
[ε] Αν ισχύει $a_n > 0$ για κάθε n και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a \in [0, +\infty]$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to a$.
Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $(\sqrt[n]{n})$, $(\sqrt[n]{n!})$ και $\left(\sqrt[n]{(2n)!/(n!)^2}\right)$.

2.3.42. [α] Για κάθε n θεωρούμε $k_n \in \mathbb{N}$ και αριθμούς $\theta_{n,1}, \ldots, \theta_{n,k_n}$ με τις ιδιότητες:
(i) Υπάρχει κάποιος M ώστε να ισχύει $|\theta_{n,1}| + \cdots + |\theta_{n,k_n}| \leq M$ για κάθε n,
(ii) $\theta_{n,1} + \cdots + \theta_{n,k_n} \to 1$,
(iii) για κάθε k ισχύει $\theta_{n,k} \to 0$ (όπου θεωρούμε $\theta_{n,k} = 0$ για τους n για τους οποίους $k_n < k$).
Αποδείξτε ότι, αν $x_n \to x$, τότε $\theta_{n,1}x_1 + \cdots + \theta_{n,k_n}x_{k_n} \to x$.
[β] Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι $\frac{1}{2^n}x_1 + \frac{1}{2^{n-1}}x_2 + \cdots + \frac{1}{2^2}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n \to x$.

2.4 Μονότονες ακολουθίες.

Το θεώρημα 2.1 είναι πολύ σημαντικό. Το κυριότερο συμπέρασμά του είναι ότι κάθε *μονότονη* ακολουθία *έχει* όριο και ότι, αν μια μονότονη ακολουθία είναι φραγμένη, τότε το όριό της είναι αριθμός και, αν μια μονότονη ακολουθία δεν είναι φραγμένη, τότε το όριό της είναι ένα από τα $\pm\infty$. Τέτοιο συμπέρασμα δεν ισχύει για μη-μονότονες ακολουθίες: η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ αν και είναι φραγμένη δεν έχει όριο και η $((-1)^{n-1}n)$ αν και δεν είναι φραγμένη δεν έχει όριο.

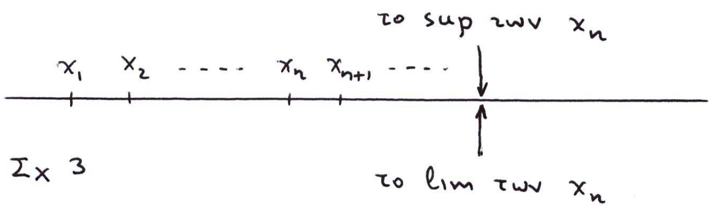
Βάσει του θεωρήματος 2.1 μπορούμε να συμπεράνουμε για μια δοσμένη ακολουθία ότι έχει όριο αρκεί μόνο να ελέγξουμε ότι είναι μονότονη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. [18] *Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο. Πιο συγκεκριμένα:*
[α] *Αν η ακολουθία* (x_n) *είναι αύξουσα, τότε* $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Δηλαδή: η (x_n) *είτε δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε αποκλίνει στο* $+\infty$, *είτε είναι άνω φραγμένη,*

[15] Η άσκηση αυτή συνεχίζεται στην άσκηση 2.7.13.
[16] Έχουμε το θεώρημα του Cesáro όταν $y_n = 1$ για κάθε n.
[17] Στην άσκηση 4.3.3 θα δούμε πώς αυτό ανάγεται στο [α] μέσω ιδιοτήτων της λογαριθμικής και της εκθετικής συνάρτησης.
[18] Για την ακριβή σχέση αυτού του θεωρήματος με την ιδιότητα supremum δείτε την άσκηση 2.4.17.

οπότε συγκλίνει. Και στις δύο περιπτώσεις το όριό της ισούται με το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της.
[β] *Αν η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα, τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.*
Δηλαδή: η (x_n) είτε δεν είναι κάτω φραγμένη, οπότε αποκλίνει στο $-\infty$, είτε είναι κάτω φραγμένη, οπότε συγκλίνει. Και στις δύο περιπτώσεις το όριό της ισούται με το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου των όρων της.

Δείτε το σχήμα 3.



Απόδειξη. [α] Θεωρούμε το μη-κενό σύνολο $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Αν αυτό είναι άνω φραγμένο (δηλαδή αν η ακολουθία είναι άνω φραγμένη) τότε το supremum του είναι αριθμός ενώ, αν δεν είναι άνω φραγμένο (δηλαδή αν η ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη) τότε το supremum του είναι το $+\infty$.
Έστω ότι η ακολουθία (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε

$$\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = +\infty$$

και θα αποδείξουμε ότι $x_n \to +\infty$.
Έστω $M > 0$. Επειδή ο M δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, υπάρχει n_0 ώστε $x_{n_0} > M$.
Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει

$$x_n \geq x_{n_0} > M$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $x_n \to +\infty$.
Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι άνω φραγμένη. Ορίζουμε

$$x = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

και θα αποδείξουμε ότι $x_n \to x$.
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $x - \epsilon < x$, ο $x - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε $x - \epsilon < x_{n_0}$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει

$$x - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n$$

για κάθε $n \geq n_0$. Ακόμη, επειδή ο x είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, ισχύει

$$x_n \leq x < x + \epsilon$$

για κάθε n. Άρα ισχύει

$$x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $x_n \to x$.
[β] Ομοίως. □

Ας δούμε ένα χρήσιμο συμπλήρωμα του θεωρήματος 2.1. Αν μια ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 2.1, η (x_n) συγκλίνει και το όριό της, έστω x, είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της. Επομένως, ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n. Αν, επιπλέον, η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή, τότε ισχύει $x_n < x$ για κάθε n.

Πράγματι, αν ήταν $x_{n_0} = x$ για κάποιον n_0, τότε (επειδή η ακολουθία είναι αύξουσα) θα ίσχυε $x = x_{n_0} \leq x_n \leq x$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως, η ακολουθία θα ήταν τελικά σταθερή. Ειδικώτερα, αν η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα, τότε ισχύει $x_n < x$ για κάθε n. Τα ανάλογα ισχύουν για φθίνουσες ακολουθίες. Συμπέρασμα:

Αν η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και $x_n \to x$, τότε ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n. Αν, επιπλέον, η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή (και, ειδικώτερα, αν είναι γνησίως αύξουσα), τότε ισχύει $x_n < x$ για κάθε n.

Αν η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \to x$, τότε ισχύει $x_n \geq x$ για κάθε n. Αν, επιπλέον, η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή (και, ειδικώτερα, αν είναι γνησίως φθίνουσα), τότε ισχύει $x_n > x$ για κάθε n.

Το θεώρημα 2.1 δεν παρέχει τρόπο υπολογισμού του ορίου μονότονης ακολουθίας. Όμως, εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία ότι μια ακολουθία *έχει* όριο, μπορεί να καταφέρουμε με κάποιο τρόπο (ανάλογα με την περίπτωση) να υπολογίσουμε και την τιμή του ορίου.[19]

Παράδειγμα 2.4.1. Έστω ακολουθία (x_n) η οποία καθορίζεται από τον πρώτο όρο $x_1 = 1$ και από τον αναδρομικό τύπο

$$x_{n+1} = \tfrac{3x_n+6}{x_n+4} \qquad \text{για } \ n \geq 1.$$

Οι αρχικοί όροι της ακολουθίας είναι οι

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \tfrac{9}{5}, \quad x_3 = \tfrac{57}{29}, \quad x_4 = \tfrac{345}{173}.$$

Για να ορίζεται, πράγματι, μια τέτοια ακολουθία πρέπει να βεβαιωθούμε ότι κανείς όρος της δεν θα πάρει την τιμή -4, διότι σε μια τέτοια περίπτωση δεν θα μπορούσε να υπολογιστεί ο αμέσως επόμενος όρος. Εύκολα βλέπουμε, όμως, ότι ισχύει

$$x_n \geq 0$$

για κάθε n. Πράγματι, ισχύει $x_1 = 1 \geq 0$ και, αν υποτεθεί ότι ισχύει $x_n \geq 0$, τότε, προφανώς, από τον αναδρομικό τύπο θα ισχύει και $x_{n+1} \geq 0$.

Από τους αρχικούς όρους υποψιαζόμαστε ότι η ακολουθία μπορεί να είναι αύξουσα, οπότε εξετάζουμε την διαφορά $x_{n+1} - x_n$ ως εξής:

$$x_{n+1} - x_n = \tfrac{3x_n+6}{x_n+4} - \tfrac{3x_{n-1}+6}{x_{n-1}+4} = \tfrac{6(x_n-x_{n-1})}{(x_n+4)(x_{n-1}+4)}.$$

Βλέπουμε ότι το πρόσημο της διαφοράς $x_{n+1}-x_n$ είναι ανεξάρτητο του n και, επειδή $x_2-x_1 > 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_{n+1} - x_n > 0$ για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.

Από την σχέση $x_{n+1} > x_n$ και τον αναδρομικό τύπο έχουμε ότι ισχύει $\frac{3x_n+6}{x_n+4} > x_n$ και, επομένως, ${x_n}^2 + x_n - 6 < 0$ ή, ισοδύναμα, $-3 < x_n < 2$ για κάθε n. Δηλαδή, η (x_n) εκτός από γνησίως αύξουσα είναι και φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.

Έστω, λοιπόν, ότι $x_n \to x$. Από το ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n συνεπάγεται $x \geq 0$ και, τώρα, από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται

$$x = \tfrac{3x+6}{x+4}.$$

Άρα $x = -3$ ή $x = 2$ και, επειδή $x \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι $x = 2$. Δηλαδή, $x_n \to 2$.

Μάλιστα, επειδή η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n < 2$ για κάθε n.

Υπάρχουν και άλλοι τρόποι χειρισμού αυτού του παραδείγματος. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες:

Δεύτερος τρόπος: Αφού αποδείξουμε ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n και ότι η (x_n) είναι αύξουσα (όπως παραπάνω), συμπεραίνουμε ότι η (x_n) έχει όριο. Αν $x_n \to +\infty$, τότε, επειδή από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται ότι ισχύει $x_{n+1} = \frac{3+(6/x_n)}{1+(4/x_n)}$ για κάθε n, βρίσκουμε $+\infty = 3$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η (x_n) είναι φραγμένη και, όπως παραπάνω, αποδεικνύουμε ότι $x_n \to 2$.

[19] Δείτε, για παράδειγμα, την άσκηση 2.3.23.

Τρίτος τρόπος: Παρατηρούμε τους πρώτους όρους. Είναι $x_1 = 1$, $x_2 = 1.8$, $x_3 = 1.9655...$ και $x_4 = 1.994219\ldots$. Έτσι υποψιαζόμαστε ότι η (x_n) συγκλίνει στον 2, ότι είναι γνησίως αύξουσα και ότι ισχύει $x_n < 2$ για κάθε n. Αποδεικνύουμε με επαγωγή την τρίτη σχέση και, κατόπιν, και με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου, αποδεικνύουμε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και ότι συγκλίνει στον 2.

Ακολουθούν δύο πάρα πολύ σημαντικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.4.2. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\big)$ συγκλίνει.
Θέτουμε $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ για κάθε n.
Είναι φανερό ότι ισχύει

$$x_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} + \tfrac{1}{(n+1)!} = x_n + \tfrac{1}{(n+1)!} > x_n$$

για κάθε n, οπότε η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.
Τώρα, εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$n! \geq 2^{n-1}$$

για κάθε n. Πράγματι, για $n = 1$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα και για $n \geq 2$ είναι $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-1}$.
Επομένως,

$$x_n \leq 1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2^{n-1}} = 1 + \tfrac{1-(1/2^n)}{1-(1/2)} < 1 + \tfrac{1}{1-(1/2)} = 3.$$

για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.

Παράδειγμα 2.4.3. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\big((1 + \frac{1}{n})^n\big)$ συγκλίνει και, μάλιστα, ότι το όριό της ταυτίζεται με το όριο της προηγούμενης ακολουθίας.[20]
Θέτουμε $a_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$ για κάθε n.
Βάσει του διωνυμικού τύπου του Newton με $x = \frac{1}{n}$ και $y = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \tbinom{n}{1}\tfrac{1}{n} + \tbinom{n}{2}\tfrac{1}{n^2} + \cdots + \tbinom{n}{k}\tfrac{1}{n^k} + \cdots + \tbinom{n}{n}\tfrac{1}{n^n} \\ &= 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n}) + \cdots + \tfrac{1}{k!}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n})\cdots(1 - \tfrac{k-1}{n}) \\ &\quad + \cdots + \tfrac{1}{n!}(1 - \tfrac{1}{n})\cdots(1 - \tfrac{n-1}{n}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

και, ομοίως, για τον $n+1$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \tbinom{n+1}{1}\tfrac{1}{n+1} + \tbinom{n+1}{2}\tfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \tbinom{n+1}{k}\tfrac{1}{(n+1)^k} + \cdots + \tbinom{n+1}{n}\tfrac{1}{(n+1)^n} \\ &\quad + \tbinom{n+1}{n+1}\tfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n+1}) + \cdots + \tfrac{1}{k!}(1 - \tfrac{1}{n+1})(1 - \tfrac{2}{n+1})\cdots(1 - \tfrac{k-1}{n+1}) \\ &\quad + \cdots + \tfrac{1}{n!}(1 - \tfrac{1}{n+1})\cdots(1 - \tfrac{n-1}{n+1}) + \tfrac{1}{(n+1)!}(1 - \tfrac{1}{n+1})\cdots(1 - \tfrac{n-1}{n+1})(1 - \tfrac{n}{n+1}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Τώρα συγκρίνουμε τα τελικά αθροίσματα στις (2.2) και (2.3). Για κάθε k με $2 \leq k \leq n$, ο k-οστός όρος στο τελικό άθροισμα της (2.2) είναι μικρότερος από τον k-οστό όρο στο τελικό άθροισμα της (2.3), διότι για να περάσουμε από τον πρώτο στον δεύτερο αντικαθιστούμε σε κάθε παρένθεση του πρώτου τον παρονομαστή n με τον παρονομαστή $n+1$. Επίσης, το τελικό άθροισμα της (2.3) έχει έναν επιπλέον *θετικό* όρο, αυτόν που αντιστοιχεί στον $k = n+1$. Άρα

$$a_n < a_{n+1}$$

για κάθε n, οπότε η ακολουθία (a_n) είναι γνησίως αύξουσα.
Θεωρούμε πάλι $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ για κάθε n, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

[20] Ένας εναλλακτικός τρόπος χειρισμού της ακολουθίας αυτής είναι στην άσκηση 2.4.4.

Γνωρίζουμε ότι η (x_n) συγκλίνει και ότι ισχύει $x_n < 3$ για κάθε n.
Επειδή όλες οι παρενθέσεις στο τελικό άθροισμα της (2.2) είναι > 0 και < 1, ισχύει

$$a_n \leq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{k!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} = x_n < 3 \tag{2.4}$$

για κάθε n. Άρα η ακολουθία (a_n) είναι, εκτός από γνησίως αύξουσα, και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει. Ας συμβολίσουμε a το όριο της (a_n). Δηλαδή

$$a_n \to a.$$

Τώρα σταθεροποιούμε, προσωρινά, τον k στο τελικό άθροισμα της (2.2) και, παραλείποντας τους (θετικούς) όρους μετά από τον k-οστό, βρίσκουμε

$$a_n \geq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n}) + \cdots + \tfrac{1}{k!}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n}) \cdots (1 - \tfrac{k-1}{n}).$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε (με τον σταθεροποιημένο k)

$$a \geq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{k!} = x_k.$$

Αυτό ισχύει, λοιπόν, για κάθε k και, με αλλαγή συμβολισμού, $a \geq x_n$ για κάθε n. Από αυτό και από την (2.4) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$a_n \leq x_n \leq a$$

για κάθε n και, επειδή $a_n \to a$, συνεπάγεται

$$x_n \to a.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.14. *Σύμφωνα με τα παραδείγματα 2.4.2 και 2.4.3, οι ακολουθίες* $\big(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\big)$ *και* $\big((1 + \frac{1}{n})^n\big)$ *συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Το κοινό όριο των δύο ακολουθιών το συμβολίζουμε με το γράμμα* e. *Δηλαδή, ορίζουμε*

$$e = \lim_{n\to+\infty} \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)^n = \lim_{n\to+\infty} \big(1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!}\big).$$

Πρέπει να τονιστεί ότι ο αριθμός e *ορίζεται* να είναι το κοινό όριο των δύο συγκεκριμένων ακολουθιών $\big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\big)$ και $\big((1 + \frac{1}{n})^n\big)$. *Δεν αποδεικνύεται* ότι ο e είναι ίσος με το όριο των δύο ακολουθιών, διότι ο e δεν είναι κάποιος εκ των προτέρων γνωστός αριθμός.

Επειδή η ακολουθία $((1 + \frac{1}{n})^n)$ είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ για κάθε n. Ομοίως, ισχύει $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e$ για κάθε n.

Τώρα, ας πούμε δύο λόγια για την όχι τόσο γνωστή απροσδιόριστη μορφή $1^{+\infty}$ (δείτε τον ορισμό 1.10). Στην περίπτωση $x_n \to 1$ και $y_n \to +\infty$ συχνά καταλήγει κανείς στο λανθασμένο συμπέρασμα: ${x_n}^{y_n} \to 1$. Η "λογική διαδρομή" φαίνεται να είναι η: ${x_n}^{y_n} \to 1^{y_n} = 1 \to 1$ ή κάτι τέτοιο. *Δείτε, όμως, πώς το όριο* $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$ *ακυρώνει ένα τέτοιο συμπέρασμα*. Πράγματι, έχουμε $1 + \frac{1}{n} \to 1$ και $n \to +\infty$ αλλά *δεν* συνεπάγεται $(1 + \frac{1}{n})^n \to 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.15. *Ονομάζουμε* **φυσικούς λογαρίθμους** *τους λογαρίθμους με βάση τον* e *και χρησιμοποιούμε για κάθε* $y > 0$, *αντί του* $\log_e y$, *τα απλούστερα σύμβολα*

$$\log y \quad \text{ή} \quad \ln y.$$

Η πρόταση 2.13 είναι, φυσικά, εξειδίκευση της πρότασης 1.9.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.13. [α] $\log(y_1 y_2) = \log y_1 + \log y_2$ *για κάθε* $y_1, y_2 > 0$.
[β] $\log(y^z) = z \log y$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* z.
[γ] $\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* $a > 0$, $a \neq 1$.
[δ] $\log 1 = 0$, $\log e = 1$.
[ε] *Αν* $0 < y_1 < y_2$, *τότε* $\log y_1 < \log y_2$.

Έχουμε ακόμη δύο σημαντικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.4.4. Θα αποδείξουμε ότι[21]

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} \to +\infty.$$

Θέτουμε $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ για κάθε n.
Ισχύει $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} > 0$ για κάθε n, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα και, επομένως, έχει όριο.
Παρατηρούμε ότι για κάθε n ισχύει

$$x_{2n} - x_n = \tfrac{1}{n+1} + \cdots + \tfrac{1}{n+n} \geq \tfrac{1}{n+n} + \cdots + \tfrac{1}{n+n} = n\,\tfrac{1}{n+n} = \tfrac{1}{2}.$$

Αν το όριο της (x_n) είναι αριθμός x, τότε, επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \leq x_{2n} \leq x$ για κάθε x. Επειδή $x_n \to x$, συνεπάγεται $x_{2n} \to x$. Άρα $x_{2n} - x_n \to x - x = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ισχύει $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε n.
Άρα $x_n \to +\infty$.
Υπάρχει άλλος ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι $x_n \to +\infty$ τον οποίο αξίζει να μνημονεύσουμε. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε φυσικό n υπάρχει μοναδικός ακέραιος $k \geq 0$ έτσι ώστε $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Δηλαδή, ο n είναι ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 2. Πράγματι, η ανισότητα αυτή ισοδυναμεί με την $k \leq \log_2 n < k+1$, οπότε ο ακέραιος που ζητάμε είναι ο $k = [\log_2 n]$. Τώρα, με αυτόν τον k, έχουμε

$$\begin{aligned}
x_n &= 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + \cdots + (\tfrac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \tfrac{1}{2^k}) + \tfrac{1}{2^k+1} + \cdots + \tfrac{1}{n} \\
&\geq 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}) + \cdots + (\tfrac{1}{2^k} + \cdots + \tfrac{1}{2^k}) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{4} + 4\tfrac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1}\tfrac{1}{2^k} \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{k}{2}.
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει

$$x_n \geq 1 + \tfrac{1}{2}[\log_2 n] > 1 + \tfrac{1}{2}(\log_2 n - 1) = \tfrac{1}{2}\log_2 n + \tfrac{1}{2}$$

για κάθε n και, επειδή $\log_2 n \to +\infty$, συνεπάγεται $x_n \to +\infty$.

Παράδειγμα 2.4.5. Θα αποδείξουμε ότι[22]

$$\text{Η ακολουθία} \quad \left(1 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots + \tfrac{1}{n^2}\right) \quad \text{συγκλίνει.}$$

Θέτουμε $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ για κάθε n.
Ισχύει $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ για κάθε n, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα. Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$x_n \leq 1 + \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \tfrac{1}{(n-1)n} = 1 + (\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + \cdots + (\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}) = 2 - \tfrac{1}{n} < 2$$

για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.

ΕΓΚΙΒΩΤΙΣΜΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ. *Έστω ακολουθία διαστημάτων $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\ldots$ ώστε να ισχύει $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ για κάθε n. Ισοδύναμα, έστω αύξουσα ακολουθία (a_n) και φθίνουσα ακολουθία (b_n) ώστε να ισχύει $a_n \leq b_n$ για κάθε n. Τότε:*
(i) οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) συγκλίνουν.
(ii) υπάρχει τουλάχιστον ένας x ώστε να ισχύει $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε n.
(iii) υπάρχει μοναδικός x με την ιδιότητα που αναφέρεται στο (ii) αν και μόνο αν $b_n - a_n \to 0$.
Στην περίπτωση (iii), οι (a_n), (b_n) έχουν το ίδιο όριο και ο μοναδικός x είναι το κοινό όριο των δύο ακολουθιών.

[21] Άλλοι τρόποι αντιμετώπισης της ακολουθίας αυτής είναι στις ασκήσεις 2.5.4, 2.6.2 και 7.3.20 και στα παραδείγματα 8.2.7, 8.2.10 και 8.3.1. Σχετικές είναι και οι ασκήσεις 2.4.6, 6.4.11.
[22] Για εναλλακτικούς τρόπους δείτε τα παραδείγματα 2.6.1, 8.2.7 και 8.2.10 και τις ασκήσεις 6.4.11, 7.3.20 και 8.2.1.

Απόδειξη. Επειδή η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) είναι φθίνουσα, ισχύει

$$a_1 \le a_n \le b_n \le b_1$$

για κάθε n, οπότε η (a_n) είναι, εκτός από αύξουσα, άνω φραγμένη (από τον b_1 για παράδειγμα) και η (b_n) είναι, εκτός από φθίνουσα, κάτω φραγμένη (από τον a_1 για παράδειγμα). Άρα και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν και έστω

$$a_n \to a, \qquad b_n \to b.$$

Επειδή ισχύει $a_n \le b_n$ για κάθε n, συνεπάγεται $a \le b$. Λόγω της μονοτονίας των δύο ακολουθιών, ισχύει

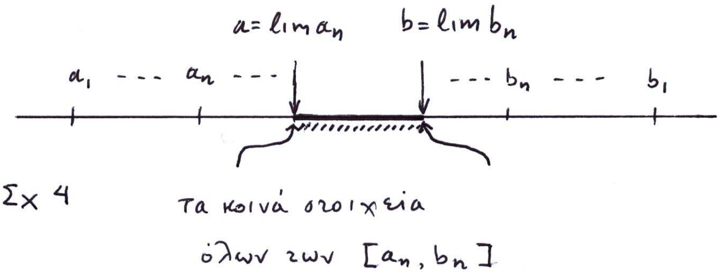
$$a_n \le a \le b \le b_n$$

για κάθε n.
Για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $a_n \le a \le x \le b \le b_n$ για κάθε n. Αντιστρόφως, αν για κάποιον x ισχύει $a_n \le x \le b_n$ για κάθε n, τότε $a \le x \le b$, δηλαδή $x \in [a, b]$.
Άρα οι x για τους οποίους ισχύει $a_n \le x \le b_n$ για κάθε n είναι ακριβώς τα στοιχεία του διαστήματος $[a, b]$. Επομένως, υπάρχει μοναδικός τέτοιος x αν και μόνο αν το διάστημα $[a, b]$ είναι μονοσύνολο ή, ισοδύναμα, $a = b$ ή, ισοδύναμα, $b_n - a_n \to 0$. Στην περίπτωση αυτή ο μοναδικός x είναι ο $x = a = b$. □

Το $a_n \le x \le b_n$ είναι, φυσικά, ισοδύναμο με το $x \in [a_n, b_n]$. Επομένως, το να ισχύει $a_n \le x \le b_n$ για κάθε n σημαίνει ότι ο x ανήκει σε όλα τα διαστήματα $[a_n, b_n]$, δηλαδή στην τομή των διαστημάτων αυτών. Άρα μέσα στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης βρίσκεται το εξής συμπέρασμα:
Αν τα διαστήματα $[a_n, b_n]$ είναι εγκιβωτισμένα, τότε

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] = [a, b],$$

όπου $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ και $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$. Δείτε το σχήμα 4.



Σχ 4

Παράδειγμα 2.4.6. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \ge 2$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $x \in [0, 1)$, δηλαδή

$$0 \le x < 1. \tag{2.5}$$

Προφανώς, ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από τα p διαδοχικά διαστήματα

$$\left[0, \tfrac{1}{p}\right), \left[\tfrac{1}{p}, \tfrac{2}{p}\right), \ldots, \left[\tfrac{p-1}{p}, 1\right)$$

καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{p}$. Πώς βρίσκουμε σε ποιό από αυτά τα διαστήματα ανήκει ο x; Γράφουμε $\frac{k}{p} \le x < \frac{k+1}{p}$ και λύνουμε ως προς $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Πράγματι, έχουμε, ισοδύναμα, $k \le px < k+1$ και, επομένως, η λύση είναι $k = [px]$. Για να ελέγξουμε αν όντως ο συγκεκριμένος k είναι ένας από τους $0, 1, \ldots, p-1$ παρατηρούμε ότι από την υπόθεση (2.5) συνεπάγεται $0 \le$

$px < p$, οπότε το ακέραιο μέρος του px είναι ένας από τους $0, 1, \ldots, p-1$.
Θέτουμε $x_1 = [px]$ (δηλαδή τον k που βρήκαμε) και έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{p} \leq x < \frac{x_1}{p} + \frac{1}{p} \qquad \text{για κάποιον } \ x_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}. \tag{2.6}$$

Τώρα, χωρίζουμε το διάστημα $[\frac{x_1}{p}, \frac{x_1}{p} + \frac{1}{p})$, το οποίο έχει μήκος $\frac{1}{p}$, στα p διαδοχικά διαστήματα

$$\Big[\frac{x_1}{p}, \frac{x_1}{p} + \frac{1}{p^2}\Big), \Big[\frac{x_1}{p} + \frac{1}{p^2}, \frac{x_1}{p} + \frac{2}{p^2}\Big), \ldots, \Big[\frac{x_1}{p} + \frac{p-1}{p^2}, \frac{x_1}{p} + \frac{1}{p}\Big)$$

καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{p^2}$. Ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά τα διαστήματα και, όπως πριν, γράφουμε $\frac{x_1}{p} + \frac{k}{p^2} \leq x < \frac{x_1}{p} + \frac{k+1}{p^2}$ και βρίσκουμε $k \leq p^2 x - px_1 < k+1$, δηλαδή $k = [p^2 x - px_1]$. Από την (2.6) συνεπάγεται $0 \leq p^2 x - px_1 < p$ και, επομένως, το ακέραιο μερος του $p^2 x - px_1$ είναι ένας από τους $0, 1, \ldots, p-1$.
Θέτουμε $x_2 = [p^2 x - px_1]$ (δηλαδή τον k που βρήκαμε) και έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} \leq x < \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \frac{1}{p^2} \qquad \text{για κάποιους } \ x_1, x_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Συνεχίζουμε επαγωγικά. Έστω ότι στο n-οστό στάδιο έχουμε καταλήξει στο ότι

$$\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} \leq x < \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n} \qquad \text{για κάποιους } \ x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}. \tag{2.7}$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}, \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n})$, το οποίο έχει μήκος $\frac{1}{p^n}$, σε p διαδοχικά διαστήματα της μορφής $[\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{k}{p^{n+1}}, \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{k+1}{p^{n+1}})$ με $k = 0, 1, \ldots, p-1$, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{p^{n+1}}$. Ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά τα διαστήματα και για να το βρούμε γράφουμε $\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{k}{p^{n+1}} \leq x < \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{k+1}{p^{n+1}}$ και βρίσκουμε $k \leq p^{n+1}x - p^n x_1 - \cdots - px_n < k+1$ δηλαδή $k = [p^{n+1}x - p^n x_1 - \cdots - px_n]$. Από την (2.7) συνεπάγεται $0 \leq p^{n+1}x - p^n x_1 - \cdots - px_n < p$, οπότε το ακέραιο μερος του $p^{n+1}x - p^n x_1 - \cdots - px_n$ είναι ένας από τους $0, 1, \ldots, p-1$.
Θέτουμε $x_{n+1} = [p^{n+1}x - p^n x_1 - \cdots - px_n]$ και έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} \leq x < \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}} \qquad \text{για κάποιους } x_1, \ldots, x_{n+1} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Άρα, με αυτόν τον τρόπο, από τον οποιονδήποτε $x \in [0, 1)$ ορίζονται τρεις ακολουθίες: η (x_n), η (s_n) και η (t_n). Οι δύο τελευταίες ορίζονται για κάθε n με τους τύπους:

$$s_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}, \qquad t_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n}.$$

Είδαμε ότι, για κάθε n, ο x_n είναι ένας από τους ακεραίους $0, 1, \ldots, p-1$ και ότι ισχύει

$$s_n \leq x < t_n \tag{2.8}$$

για κάθε n. Επίσης, από τον τρόπο κατασκευής των ακολουθιών αυτών έχουμε ότι κάθε διάστημα $[s_n, t_n)$ περιέχει το επόμενο διάστημα $[s_{n+1}, t_{n+1})$. Δηλαδή, η (s_n) είναι αύξουσα και η (t_n) είναι φθίνουσα. Αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε ανεξάρτητα και ως εξής:

$$s_{n+1} = s_n + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} \geq s_n, \quad t_{n+1} = \Big(t_n - \frac{1}{p^n}\Big) + \Big(\frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}}\Big) \leq t_n - \frac{1}{p^n} + \frac{p-1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}} = t_n.$$

Επομένως, οι ακολουθίες (s_n) και (t_n) ικανοποιούν τις υποθέσεις της πρότασης με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα. Μάλιστα, είναι

$$t_n - s_n = \frac{1}{p^n} \to 0,$$

οπότε οι (s_n), (t_n) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Ποιό είναι αυτό το κοινό όριο; Μα από την (2.8) αμέσως συνεπάγεται ότι

$$s_n \to x, \qquad t_n \to x.$$

Η ακολουθία (x_n) έχει μία επιπλέον αξιοσημείωτη ιδιότητα: *δεν είναι τελικά σταθερή* $p-1$. Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n = p-1$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$t_{n+1} = \left(t_n - \frac{1}{p^n}\right) + \left(\frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}}\right) = t_n - \frac{1}{p^n} + \frac{p-1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}} = t_n.$$

Άρα η (t_n) είναι τελικά σταθερή και, επειδή $t_n \to x$, ισχύει τελικά $t_n = x$. Αυτό αντιφάσκει με την (2.8).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.16. *Η (x_n) ονομάζεται ακολουθία των p-**αδικών ψηφίων** του x.*
*Η (s_n) ονομάζεται ακολουθία των p-**αδικών προσεγγίσεων (καθ' έλλειψιν)** του x και η (t_n) ακολουθία των p-**αδικών προσεγγίσεων καθ' υπεροχήν** του x.*

Μερικές απλές περιπτώσεις είναι:
η περίπτωση $p = 2$ με τα δυαδικά ψηφία $0, 1$,
η περίπτωση $p = 3$ με τα τριαδικά ψηφία $0, 1, 2$,
η περίπτωση $p = 10$ με τα δεκαδικά ψηφία $0, 1, \ldots, 9$ και
η περίπτωση $p = 16$ με τα δεκαεξαδικά ψηφία $0, 1, \ldots, 14, 15$.

Η ακολουθία των p-αδικών προσεγγίσεων θα μελετηθεί πληρέστερα στην υποενότητα 8.2.2.

Ασκήσεις.

2.4.1. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\left(\frac{2^n n!}{n^n}\right)$ και $\left(\frac{4^n n!}{n^n}\right)$.

2.4.2. Με τα σύμβολα του παραδείγματος 2.4.2, αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 4$ ισχύει $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \leq x_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ και συμπεράνατε ότι $2 < \frac{32}{12} \leq e \leq \frac{35}{12} < 3$. Προσπαθήστε να βρείτε με παρόμοιο τρόπο ακόμη καλύτερες εκτιμήσεις για την αριθμητική τιμή του e.

2.4.3. [23] Με επαγωγή ως προς τον k, αποδείξτε ότι $(1 + \frac{k}{n})^n \to e^k$ (όταν $n \to +\infty$, φυσικά) για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Να αποδείξετε το όριο $(1 + \frac{k}{n})^n \to e^k$ γενικότερα για $k \in \mathbb{Z}$.

2.4.4. [24] Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$ είναι αύξουσα, με δεύτερο τρόπο, ως εξής: μετατρέψτε την ανισότητα $(1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ σε $\frac{n}{n+1} \leq \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$ και αποδείξτε την τελευταία με την ανισότητα του Bernoulli.
Αποδείξτε με όμοιο τρόπο ότι η ακολουθία $\left((1 + \frac{1}{n})^{n+1}\right)$ είναι φθίνουσα.
Συνδυάζοντας τα προηγούμενα με την πρόταση για τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, αποδείξτε ότι οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν και ότι έχουν το ίδιο όριο, το οποίο συμβολίζουμε e.
Πολλαπλασιάστε τις ανισότητες $(\frac{k+1}{k})^k \leq e \leq (\frac{k+1}{k})^{k+1}$ για $k = 1, 2, \ldots, n-1$ και αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{n^n}{n!} \leq e^{n-1} \leq \frac{n^{n+1}}{n!}$ για κάθε n.
Αποδείξτε το ενδιαφέρον όριο[25] $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$ και από αυτό το[26] $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

2.4.5. Αποδείξτε ότι ισχύει $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \log_2 n + 1$ για κάθε n, παραλλάσσοντας την δεύτερη απόδειξη στο παράδειγμα 2.4.4.

2.4.6. Δείτε την άσκηση 2.4.4 και θεωρήστε τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n$ και $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα, ότι η (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό.[27]

[23] Η άσκηση αυτή συνεχίζεται στην άσκηση 2.5.3.
[24] Δεύτερη προσέγγιση στον αριθμό e.
[25] Θα ξαναδούμε αυτό το όριο στην άσκηση 7.3.19.
[26] Το όριο αυτό υπάρχει και στην άσκηση 2.3.41 και, κυρίως, στο παράδειγμα 8.3.7.
[27] Το κοινό όριο των δύο αυτών ακολουθιών ονομάζεται **σταθερά του Euler** και συμβολίζεται γ. Θα ξαναδούμε το θέμα αυτό στις ασκήσεις 6.4.11 και 7.3.20.

2.4.7. Μιμηθείτε την εργασία στα παραδείγματα 2.4.2 και 2.4.3 και αποδείξτε ότι, αν $t > 0$, τότε οι ακολουθίες $\big(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\big)$ και $\big((1 + \frac{t}{n})^n\big)$ συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.[28]

2.4.8. [α] Έστω $x_1 = 1$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{{x_n}^2}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και βρείτε το όριό της.

[β] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

[γ] Έστω ότι ισχύει $7x_{n+1} = {x_n}^3 + 6$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

[δ] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = \frac{6+6x_n}{7+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

[ε] Έστω ότι ισχύει $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ για κάθε n. Αν $x_1 = 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι σταθερή. Αν $x_1 > 1$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και βρείτε το όριό της. Αν $x_1 < 1$ και ισχύει $x_1 \neq \frac{k-1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι *τελικά* φθίνουσα και βρείτε το όριό της. Τί συμπεραίνετε αν ισχύει $x_1 = \frac{k-1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$;

[στ] Έστω $x_1, x_2 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\frac{x_{n+1}}{x_n})$ έχει όριο και υπολογίστε το.

[ζ] Έστω ότι ισχύει $x_{n+1} = \sin x_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και, από τον δεύτερο όρο και πέρα, μονότονη και βρείτε το όριό της.

2.4.9. [29] [α] Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (a^n) είναι αύξουσα και, χρησιμοποιώντας τη σχέση $a^{n+1} = aa^n$, ότι $a^n \to +\infty$. Μελετήστε με τον ίδιο τρόπο και την περίπτωση $0 < a < 1$.

[β] Αν $a > 1$ και $k \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\frac{a^n}{n^k})$ είναι τελικά αύξουσα και, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} = a\frac{n^k}{(n+1)^k}\frac{a^n}{n^k}$, ότι $\frac{a^n}{n^k} \to +\infty$.

[γ] Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\sqrt[n]{a})$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\big(\sqrt[2n]{a}\big)^2 = \sqrt[n]{a}$, ότι $\sqrt[n]{a} \to 1$. Τί γίνεται στις περιπτώσεις $a = 1$, $0 < a < 1$;

[δ] Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\sqrt[n]{n})$ είναι φθίνουσα από τον τρίτο όρο της και πέρα και κάτω φραγμένη και ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$.

[ε] Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\frac{a^n}{n!})$ είναι τελικά φθίνουσα και, με τη σχέση $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!}\frac{a}{n+1}$, ότι $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

2.4.10. [30] Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 1$, $y_n \to +\infty$ και η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 1$, $y_n \to -\infty$ και η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

2.4.11. [α] Αν ο b δεν είναι αρνητικός ακέραιος, αποδείξτε ότι $\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{b+3} + \cdots + \frac{1}{b+n} \to +\infty$.

[β][31] Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + \cdots + a_n$, αν $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, και $(1 - a_1) \cdots (1 - a_n) \geq 1 - a_1 - \cdots - a_n$, αν $0 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 1$.

Αν ο b δεν είναι αρνητικός ακέραιος, βρείτε το $\lim_{n\to+\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}$, διακρίνοντας περιπτώσεις $a = b$, $a > b$, $a < b$.

[γ] Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.

Αν $c < 0$ και αν ισχύει τελικά $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\big) \leq c$, αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.

Αν $c > 0$ και αν ισχύει τελικά $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\big) \geq c$, αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.

[28] Η συνέχεια στην άσκηση 2.5.5.

[29] Άλλες αποδείξεις για τα παραδείγματα 2.3.19 και 2.3.22, 2.3.23, 2.3.24 και 2.3.25.

[30] Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών δύναμης. Συνέχεια της άσκησης 2.3.30.

[31] Η πρώτη και η δεύτερη ανισότητα είναι γενικεύσεις της ανισότητας $(1 + a)^n \geq 1 + na$ του Bernoulli για $a \geq 0$ και για $-1 \leq a \leq 0$, αντιστοίχως.

Αν $d < 0$ και αν $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\big) \to d$, αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.
Αν $d > 0$ και αν $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\big) \to d$, αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.
Δείτε ότι αυτά τα τέσσερα αποτελέσματα είναι επεκτάσεις των αντίστοιχων αποτελεσμάτων της πρότασης 2.10.

Εφαρμόστε τα προηγούμενα για να αποδείξετε ότι $\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \to 0$. Μπορείτε να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.10;

2.4.12. [32] Έστω $y \geq 0$ και $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Ορίζουμε ακολουθία (x_n) με οποιονδήποτε $x_1 > 0$ και με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = \frac{k-1}{k}x_n + \frac{1}{k}\frac{y}{{x_n}^{k-1}}$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.
Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Bernoulli, ότι ισχύει ${x_n}^k \geq y$ για κάθε $n \geq 2$ και, κατόπιν, ότι ισχύει $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε $n \geq 2$.
Συμπεράνατε ότι η (x_n) συγκλίνει και ότι, αν $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, τότε $x^k = y$ και $x \geq 0$.

2.4.13. Έστω ότι ισχύει $x_{n+1} \leq \frac{x_n + x_{n+2}}{2}$ για κάθε n.[33]
Έστω, επιπλέον, η (x_n) είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n - x_{n+1})$ είναι φθίνουσα και ότι $x_n - x_{n+1} \to 0$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει.
Αν η (x_n) δεν είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι, και πάλι, έχει όριο.

2.4.14. Έστω $0 < a \leq b$.
Αν $x_1 = a$ και $y_1 = b$ και ισχύει $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ και $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ για κάθε n, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, η (y_n) φθίνουσα, ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε n και ότι οι (x_n), (y_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο, έστω $\mathrm{GA}\,(a,b)$.[34]
Αν $w_1 = a$ και $z_1 = b$ και ισχύει $w_{n+1} = \frac{2w_n z_n}{w_n + z_n}$ και $z_{n+1} = \sqrt{w_n z_n}$ για κάθε n, αποδείξτε ότι η (w_n) είναι αύξουσα, η (z_n) φθίνουσα, ότι ισχύει $w_n \leq z_n$ για κάθε n και ότι οι (w_n), (z_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο, έστω $\mathrm{HG}\,(a,b)$.[35]
Ποιά είναι η σχέση διάταξης ανάμεσα στους $a, b, \mathrm{HG}\,(a,b), \mathrm{GA}\,(a,b)$ και στον αρμονικό μέσο $\mathrm{H}\,(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$, τον γεωμετρικό μέσο $\mathrm{G}\,(a,b) = \sqrt{ab}$ και τον αριθμητικό μέσο $\mathrm{A}\,(a,b) = \frac{a+b}{2}$;

2.4.15. Έστω ότι ισχύει $x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα και ότι η $\big((n+\frac{1}{2}){x_n}^2\big)$ είναι φθίνουσα. Αποδείξτε ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

2.4.16. Λύστε με δεύτερο τρόπο την άσκηση 1.2.18.

2.4.17. Έστω ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα, αποδείξτε ότι ισχύει η ιδιότητα supremum.[36]
Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2^n} \to 0$.
Τώρα, έστω μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο A.
Θεωρήστε $x_1 \in A$ και άνω φράγμα y_1 του A. Το $[x_1, y_1]$ περιέχει ένα στοιχείο του A και ένα άνω φράγμα του A. Αν το $\frac{x_1+y_1}{2}$ είναι άνω φράγμα του A, πάρτε $x_2 = x_1$, $y_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, αν όχι, πάρτε $x_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, $y_2 = y_1$. Αποδείξτε ότι το $[x_2, y_2]$ περιέχει ένα στοιχείο του A και ένα άνω φράγμα του A. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργείται ακολουθία διαστημάτων $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots$ ώστε να ισχύει $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ και $y_n - x_n = \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}$ για κάθε n και ώστε κάθε $[x_n, y_n]$ να περιέχει ένα $a_n \in A$ και ένα άνω φράγμα u_n του A. Αποδείξτε ότι υπάρχει u ώστε $x_n \to u$, $y_n \to u$ και, επίσης, $a_n \to u$, $u_n \to u$. Αποδείξτε ότι ο u είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

[32] Δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος 1.2.
[33] Μια τέτοια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **κυρτή**. Αν ισχύει η αντίθετη ανισότητα για κάθε n, η ακολουθία χαρακτηρίζεται **κοίλη**.
[34] Ο $\mathrm{GA}\,(a,b)$ ονομάζεται γεωμετρικός-αριθμητικός μέσος των a, b.
[35] Ο $\mathrm{HG}\,(a,b)$ ονομάζεται αρμονικός-γεωμετρικός μέσος των a, b.
[36] Άρα η ιδιότητα supremum είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα: *κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.*

2.4.18. [37] Έστω διάστημα I, όχι μονοσύνολο.

Υποθέστε (για να καταλήξετε σε άτοπο) ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) ώστε $I = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Θεωρήστε $[x_1, y_1] \subseteq I$ ώστε $y_1 - x_1 > 0$ και $a_1 \notin [x_1, y_1]$. Θεωρήστε $[x_2, y_2] \subseteq [x_1, y_1]$ ώστε $y_2 - x_2 > 0$ και $a_2 \notin [x_2, y_2]$. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργείται ακολουθία διαστημάτων $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $\ldots$ ώστε να ισχύει $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ και $a_n \notin [x_n, y_n]$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε να ισχύει $\xi \in [x_n, y_n]$ και, επομένως, $\xi \neq a_n$ για κάθε n. Καταλήξτε σε αντίφαση και συμπεράνατε ότι το I είναι υπεραριθμήσιμο.

2.4.19. [38] Έστω κύκλος Κ με ακτίνα 1 και, για κάθε $n \geq 2$, ένα κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές εγγεγραμμένο στον Κ και ένα κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές περιγεγραμμένο στον Κ. Έστω p_n και q_n τα μήκη του εσωτερικού και του εξωτερικού, αντιστοίχως, πολυγώνου.

Παρατηρήστε ότι $p_2 = 4\sqrt{2}$ και $q_2 = 8$ και αποδείξτε γεωμετρικά τους αναδρομικούς τύπους $p_{n+1} = 2p_n\big(2 + \big(4 - \frac{{p_n}^2}{4^n}\big)^{1/2}\big)^{-1/2}$ και $q_{n+1} = 4q_n\big(2 + \big(4 + \frac{{q_n}^2}{4^n}\big)^{1/2}\big)^{-1}$ για κάθε $n \geq 2$.

Αποδείξτε γεωμετρικά ότι ισχύει $q_n = p_n\big(1 - \frac{{p_n}^2}{4^{n+1}}\big)^{-1/2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Αποδείξτε ότι η (p_n) είναι αύξουσα, η (q_n) φθίνουσα και ότι ισχύει $p_n < q_n$ για κάθε $n \geq 2$.

Αποδείξτε ότι οι (p_n), (q_n) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό.[39]

2.4.20. [40] Γνωρίζουμε ότι για κάθε x υπάρχει αύξουσα ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$. Για παράδειγμα, μια τέτοια ακολουθία είναι η ακολουθία των p-αδικών προσεγγίσεων του x ή η ακολουθία που αναφέρεται στην άσκηση 2.3.32.

Θεωρήστε ότι δεν έχουν οριστεί οι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη.

Έστω $y > 1$ και ο x είναι άρρητος. Θεωρήστε οποιαδήποτε αύξουσα ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$ και αποδείξτε ότι η ακολουθία (y^{r_n}) συγκλίνει. Αποδείξτε ότι για κάθε (όχι αναγκαστικά αύξουσα) ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$ το όριο της (y^{r_n}) υπάρχει και ότι το όριο αυτό είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας ρητών (r_n) με $r_n \to x$. Ορίσατε $y^x = \lim_{n\to+\infty} y^{r_n}$ με οποιαδήποτε ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$.

Έστω $y > 1$ και ο x είναι ρητός. Αποδείξτε ότι $y^x = \lim_{n\to+\infty} y^{r_n}$ για κάθε ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$.

Έστω $0 \leq y \leq 1$ και ο x είναι άρρητος. Ορίσατε την δύναμη y^x βάσει της προηγούμενης περίπτωσης (όπως στον αντίστοιχο ορισμό 1.9).

Αποδείξτε την πρόταση 1.8 βάσει των προηγουμένων.

2.4.21. [α] Έστω $y > 0$.

Αν οι r_1, r_2 είναι ρητοί με $r_1 < r_2$ και $r_1, r_2 \neq 0$, αποδείξτε ότι $\frac{y^{r_1}-1}{r_1} \leq \frac{y^{r_2}-1}{r_2}$.

Αν $x_1 < x_2$ και $x_1, x_2 \neq 0$, αποδείξτε ότι $\frac{y^{x_1}-1}{x_1} \leq \frac{y^{x_2}-1}{x_2}$.

[β][41] Έστω $y > 0$.

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\big(n(\sqrt[n]{y} - 1)\big)$ είναι φθίνουσα και ότι συγκλίνει.

Θεωρήστε ότι δεν έχουν οριστεί οι λογάριθμοι θετικών αριθμών.

Ορίσατε $\log y = \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{y} - 1)$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\log y = \lim_{n\to+\infty} \frac{y^{x_n}-1}{x_n}$ για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε n.

---

[37] Ας θυμηθούμε ότι ένα σύνολο A, όχι αναγκαστικά υποσύνολο του $\mathbb{R}$, χαρακτηρίζεται **αριθμήσιμο** αν υπάρχει συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to A$ η οποία είναι επί του A. Χρησιμοποιώντας τον παραδοσιακό συμβολισμό $a_n = a(n)$, μπορούμε να πούμε ότι το A είναι αριθμήσιμο αν μπορεί να γραφτεί $A = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ή, ισοδύναμα, αν το A είναι το σύνολο των όρων κάποιας ακολουθίας. Αν ένα σύνολο A δεν είναι αριθμήσιμο, τότε χαρακτηρίζεται **υπεραριθμήσιμο**.

[38] Ο κλασσικός γεωμετρικός ορισμός του μήκους περιφέρειας κύκλου και του αριθμού π.

[39] Μια από τις μαθηματικές παραδοχές ή διαπιστώσεις της κλασσικής αρχαιότητας ήταν ότι το μήκος της περιφέρειας του κύκλου Κ, το οποίο, παραδοσιακά, συμβολίζεται 2π, είναι ανάμεσα στα μήκη των εσωτερικών και των εξωτερικών πολυγώνων. Δηλαδή, ισχύει $p_n \leq 2\pi \leq q_n$ για κάθε $n \geq 2$. Συμπεράνατε ότι $p_n \to 2\pi$ και $q_n \to 2\pi$.

[40] Εναλλακτικός ορισμός της δύναμης με άρρητο εκθέτη.

[41] Εναλλακτικός ορισμός του λογαρίθμου.

Αποδείξτε την πρόταση 2.13 (εκτός του [γ]) βάσει των προηγουμένων.
Έστω $a > 0$, $a \neq 1$ και $y > 0$. Ορίσατε $\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$ και αποδείξτε την πρόταση 1.9.

2.4.22. Αν έχουμε μια ακολουθία εγκιβωτισμένων ανοικτών διαστημάτων, υπάρχει πάντοτε κάποιος αριθμός κοινός σε όλα τα διαστήματα;

2.5 Υποακολουθίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.17. *Έστω ακολουθία (x_n). Επιλέγουμε άπειρες τιμές $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$ του δείκτη n ώστε $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$. Μετά επιλέγουμε τους αντίστοιχους όρους της (x_n). Δηλαδή από τους $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ επιλέγουμε τους $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$. Αυτοί οι αριθμοί αποτελούν μια άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά: πρώτος ο x_{n_1}, δεύτερος ο x_{n_2} και ούτω καθ' εξής. Άρα οι αριθμοί αυτοί αποτελούν τους όρους μιας νέας ακολουθίας, της (x_{n_k}). Επειδή οι όροι της νέας ακολουθίας είναι κάποιοι από τους όρους της αρχικής, η (x_{n_k}) χαρακτηρίζεται* **υποακολουθία** *της (x_n).*

Τονίζουμε ότι, λόγω της συνθήκης $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, η σειρά επιλογής των όρων της υποακολουθίας είναι *ομόρροπη* με τη σειρά επιλογής που έχουν αυτοί οι όροι ως όροι της αρχικής ακολουθίας.

Παράδειγμα 2.5.1. Επιλέγοντας τους $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$, $n_4 = 9$, $n_5 = 13$, μπορούμε να αρχίσουμε μια υποακολουθία της (x_n) με τους όρους $x_2, x_5, x_6, x_9, x_{13}$.
Όμως, με τους $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$, $n_4 = 10$, $n_5 = 8$ δεν επιτρέπεται να σχηματιστεί υποακολουθία της (x_n). Η σειρά επιλογής των $x_2, x_5, x_6, x_{10}, x_8$ δεν είναι ομόρροπη με τη σειρά επιλογής που έχουν ως όροι της (x_n) : ο x_{10} ακολουθεί τον x_8 στην (x_n) (με ενδιάμεσο τον x_9) οπότε ο x_{10} πρέπει να ακολουθεί τον x_8 και στην υποακολουθία.

Μερικά πιο συγκεκριμένα παραδείγματα υποακολουθιών.

Παράδειγμα 2.5.2. Επιλέγοντας $n_k = 2k$ για κάθε k, ορίζεται η **υποακολουθία των άρτιων δεικτών** της (x_n), δηλαδή η υποακολουθία (x_{2k}) ή $(x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, \ldots)$.

Παράδειγμα 2.5.3. Επιλέγοντας $n_k = 2k-1$ για κάθε k, ορίζεται η **υποακολουθία των περιττών δεικτών** της (x_n), δηλαδή η υποακολουθία (x_{2k-1}) ή $(x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \ldots)$.

Παράδειγμα 2.5.4. Επιλέγοντας $n_k = k$ για κάθε k, παίρνουμε την ίδια την αρχική ακολουθία (x_k) ή $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots)$. Άρα μια από τις υποακολουθίες της (x_n) είναι η ίδια η (x_n).

Παράδειγμα 2.5.5. Επιλέγοντας $n_k = 2^{k-1}$ για κάθε k, ορίζουμε την υποακολουθία $(x_{2^{k-1}})$ ή $(x_1, x_2, x_4, x_8, x_{16}, \ldots)$.

Πρέπει να θυμόμαστε ότι *ο δείκτης μιας υποακολουθίας (x_{n_k}) είναι ο k*. Καθώς ο k μεταβάλλεται διατρέχοντας *όλους* τους φυσικούς $1, 2, 3, \ldots$, ο αντίστοιχος n_k μεταβάλλεται *γνησίως αυξανόμενος* διατρέχοντας *κάποιους* από τους δείκτες της αρχικής ακολουθίας (x_n).

Επίσης, πρέπει να γίνει κατανοητό ότι *το να έχουμε μια υποακολουθία μιας ακολουθίας (x_n) σημαίνει απλώς να έχουμε "άπειρους όρους" της (x_n)*. Είναι, φυσικά, προφανές ότι οι όροι μιας υποακολουθίας της (x_n) είναι άπειροι όροι της (x_n). Από την άλλη μεριά, αν έχουμε άπειρους όρους της (x_n), τότε από αυτούς ορίζεται μια υποακοουθία της (x_n) ως εξής. Θεωρούμε από αυτούς τους όρους της (x_n) τον όρο με τον μικρότερο δείκτη και αυτόν τον δείκτη τον συμβολίζουμε n_1. Κατόπιν, αφού εξαιρέσουμε τον x_{n_1}, θεωρούμε από αυτούς τους όρους της (x_n) τον όρο με τον μικρότερο δείκτη και αυτόν τον δείκτη τον συμβολίζουμε n_2. Κατόπιν, αφού εξαιρέσουμε τους x_{n_1} και x_{n_2}, θεωρούμε από αυτούς τους όρους της (x_n) τον όρο με τον μικρότερο δείκτη και αυτόν τον δείκτη τόν συμβολίζουμε n_3 και ούτω καθ' εξής. Έτσι δημιουργούμε μια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) και οι όροι της είναι οι άπειροι όροι της (x_n) από τους οποίους ξεκινήσαμε.

ΛΗΜΜΑ 2.2. *Έστω $n_k \in \mathbb{N}$ και $n_k < n_{k+1}$ για κάθε k. Τότε ισχύει $n_k \geq k$ για κάθε k.*

Απόδειξη. Η $n_1 \geq 1$ είναι σωστή διότι $n_1 \in \mathbb{N}$. Έστω ότι ισχύει $n_k \geq k$ για κάποιον k. Επειδή $n_{k+1} > n_k$ και $n_k, n_{k+1} \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $n_{k+1} \geq n_k + 1$ και, επομένως, $n_{k+1} \geq k+1$.
Άρα ισχύει $n_k \geq k$ για κάθε k. □

Από το λήμμα 2.2 βλέπουμε αμέσως ότι για τους δείκτες που σχηματίζουν μια υποακολουθία ισχύει

$$n_k \to +\infty.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.14. *Αν μια ακολουθία έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία της έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Θα αποδείξουμε ότι $x_{n_k} \to x$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Πριν από λίγο είδαμε ότι $n_k \to +\infty$. Άρα από μια τιμή του k και πέρα ισχύει $n_k \geq n_0$ και, επομένως, $x_{n_k} \in N_x(\epsilon)$.
Άρα $x_{n_k} \to x$. □

Η πρόταση 2.14 εφαρμόζεται, συνήθως, ως εξής: *αν μια ακολουθία έχει δύο υποακολουθίες με διαφορετικά όρια, τότε η ακολουθία δεν έχει όριο.*[42]

Παράδειγμα 2.5.6. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ δεν έχει όριο.
Πράγματι, για την υποακολουθία των περιττών δεικτών ισχύει $(-1)^{(2k-1)-1} = 1 \to 1$ και για την υποακολουθία των άρτιων δεικτών ισχύει $(-1)^{(2k)-1} = -1 \to -1$.

Η πρόταση 2.15 είναι χρήσιμη σε αρκετές περιπτώσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.15. *Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x_{2k} \to x$ και $x_{2k-1} \to x$. Τότε $x_n \to x$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $x_{2k} \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε άρτιο n από κάποιον άρτιο δείκτη n' και πέρα. Επίσης, επειδή $x_{2k-1} \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε περιττό n από κάποιον περιττό δείκτη n'' και πέρα. Τώρα είναι φανερό ότι ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε n από κάποιον δείκτη (τον μεγαλύτερο από τους n' και n'') και πέρα.
Άρα $x_n \to x$. □

Παράδειγμα 2.5.7. Θα αποδείξουμε ότι[43]

$$\text{Η ακολουθία} \quad \left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}\right) \quad \text{συγκλίνει.}$$

Θέτουμε $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ για κάθε n.
Ισχύει $x_{2k+2} - x_{2k} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0$ για κάθε k. Επίσης, ισχύει

$$x_{2k} = 1 - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) - \cdots - (\tfrac{1}{2k-2} - \tfrac{1}{2k-1}) - \tfrac{1}{2k} < 1$$

για κάθε k, διότι κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα η υποακολουθία (x_{2k}) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.
Ομοίως, ισχύει $x_{2k+1} - x_{2k-1} = -\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} < 0$ για κάθε k. Επίσης, ισχύει

$$x_{2k-1} = (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \cdots + (\tfrac{1}{2k-3} - \tfrac{1}{2k-2}) + \tfrac{1}{2k-1} > 0$$

για κάθε k, διότι κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα η υποακολουθία (x_{2k-1}) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.
Τέλος,

$$x_{2k} - x_{2k-1} = -\tfrac{1}{2k} \to 0,$$

[42] Ισχύει και το αντίστροφο. Δείτε την άσκηση 2.5.15.
[43] Για εναλλακτικές αποδείξεις δείτε τις ασκήσεις 2.6.3 και 6.4.11 και το παράδειγμα 8.3.9.

οπότε οι (x_{2k}), (x_{2k-1}) συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Άρα η (x_n) συγκλίνει.
Αν x είναι το όριο της (x_n), τότε αξίζει να παρατηρήσουμε τη διάταξη των όρων της:

$$x_2 < x_4 < \ldots < x_{2k} < x_{2k+2} < \ldots < x < \ldots < x_{2k+1} < x_{2k-1} < \ldots < x_3 < x_1.$$

Αυτό συμβαίνει επειδή η (x_{2k}) είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στον x και, ομοίως, η (x_{2k-1}) είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στον x. Παρατηρήστε, επίσης, ότι τα διαστήματα $[x_2, x_1]$, $[x_4, x_3]$, $[x_6, x_5]$, $\ldots$ είναι εγκιβωτισμένα και ότι το όριο x είναι ο μοναδικός αριθμός που περιέχεται σε όλα αυτά τα διαστήματα.

Γνωρίζουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει. Όμως, η $((-1)^{n-1})$, παρόλο που δεν συγκλίνει, έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία που συγκλίνει: η υποακολουθία των περιττών δεικτών συγκλίνει στον 1 και η υποακολουθία των άρτιων δεικτών συγκλίνει στον -1. Θα δούμε τώρα ότι αυτό το φαινόμενο παρατηρείται όχι μόνο στην ακολουθία $((-1)^{n-1})$ αλλά και σε κάθε φραγμένη ακολουθία. Αυτό είναι το περιεχόμενο του επόμενου θεωρήματος, ενός από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Ανάλυσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ BOLZANO - WEIERSTRASS. *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υποακολουθία.*

Απόδειξη. [44] Έστω ακολουθία (x_n) και l, u ώστε να ισχύει $l \leq x_n \leq u$ για κάθε n. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει, περιγράφοντας έναν "αλγόριθμο" επιλογής των διαδοχικών όρων της υποακολουθίας: του πρώτου όρου της, κατόπιν του δεύτερου όρου της, κατόπιν του τρίτου όρου της και ούτω καθ' εξής.
Χωρίζουμε το $[l, u]$ στα δύο ισομήκη διαστήματα $[l, \frac{l+u}{2}]$, $[\frac{l+u}{2}, u]$. Επειδή όλοι οι (άπειροι) όροι της (x_n) ανήκουν στο $[l, u]$, τουλάχιστον ένα από τα δύο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$. Άρα $[l_1, u_1] \subseteq [l, u]$, $u_1 - l_1 = \frac{u-l}{2}$ και το $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_1, u_1]$: έστω $x_{n_1} \in [l_1, u_1]$.
Χωρίζουμε το $[l_1, u_1]$ στα δύο ισομήκη διαστήματα $[l_1, \frac{l_1+u_1}{2}]$, $[\frac{l_1+u_1}{2}, u_1]$. Επειδή το $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δύο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_2, u_2]$ (ακριβώς όπως στο πρώτο βήμα). Άρα $[l_2, u_2] \subseteq [l_1, u_1]$, $u_2 - l_2 = \frac{u_1-l_1}{2}$ και το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_2, u_2]$: έστω $x_{n_2} \in [l_2, u_2]$. *Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι* $n_2 > n_1$. Αυτό είναι εφικτό, ακριβώς επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στο $[l_2, u_2]$.
Χωρίζουμε το $[l_2, u_2]$ στα δύο ισομήκη διαστήματα $[l_2, \frac{l_2+u_2}{2}]$, $[\frac{l_2+u_2}{2}, u_2]$. Επειδή το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δύο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_3, u_3]$. Άρα $[l_3, u_3] \subseteq [l_2, u_2]$, $u_3 - l_3 = \frac{u_2-l_2}{2}$ και το $[l_3, u_3]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_3, u_3]$: έστω $x_{n_3} \in [l_3, u_3]$. Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι $n_3 > n_2$.
Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον.
Επιλέγουμε έτσι, διαδοχικά, διαστήματα $[l_k, u_k]$ για κάθε k ώστε να ισχύει

$$[l_{k+1}, u_{k+1}] \subseteq [l_k, u_k], \qquad u_{k+1} - l_{k+1} = \tfrac{u_k-l_k}{2}$$

για κάθε k. Επίσης, επιλέγουμε όρους x_{n_k} της (x_n) για κάθε k ώστε να ισχύει

$$n_{k+1} > n_k, \qquad x_{n_k} \in [l_k, u_k]$$

[44] Δεύτερη απόδειξη υπάρχει στην άσκηση 2.5.9.

για κάθε k.
Από το ότι ισχύει $u_{k+1} - l_{k+1} = \frac{u_k - l_k}{2}$ για κάθε k προκύπτει ότι ισχύει $u_k - l_k = \frac{u-l}{2^k}$ για κάθε k, οπότε

$$u_k - l_k \to 0.$$

Σύμφωνα με την πρόταση με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, οι (l_k), (u_k) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Έστω $l_k \to x$ και $u_k \to x$. Επειδή ισχύει $n_{k+1} > n_k$ για κάθε k, η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία της (x_n) και, επειδή ισχύει $l_k \le x_{n_k} \le u_k$ για κάθε k, συνεπάγεται $x_{n_k} \to x$. □

Γνωρίζουμε ότι κάθε ακολουθία που αποκλίνει στο $+\infty$ δεν είναι άνω φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \ldots)$ δεν είναι άνω φραγμένη αλλά δεν αποκλίνει στο $+\infty$. Όμως, στο ίδιο παράδειγμα, παρόλο που η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$, υπάρχει κάποια υποακολουθία της που αποκλίνει στο $+\infty$: δείτε την υποακολουθία των περιττών δεικτών, την $(1, 3, 5, 7, \ldots)$. Αυτό το φαινόμενο ισχύει γενικότερα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.16. [α] *Κάθε ακολουθία που δεν είναι άνω φραγμένη έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία που αποκλίνει στο* $+\infty$.
[β] *Κάθε ακολουθία που δεν είναι κάτω φραγμένη έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία που αποκλίνει στο* $-\infty$.

Απόδειξη. [45] [α] Έστω ακολουθία (x_n) όχι άνω φραγμένη.
Αρχικά θα αποδείξουμε ότι για κάθε u υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι $> u$. Έστω[46] (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι υπάρχει u ώστε μόνο πεπερασμένου πλήθους όροι της (x_n) είναι $> u$. Τότε όλοι οι όροι της (x_n) από κάποιον δείκτη n_0 και πέρα ανήκουν στο διάστημα $(-\infty, u]$. Άρα από τους όρους της (x_n) μπορεί να βρίσκονται εκτός του διαστήματος $(-\infty, u]$ μόνο κάποιοι από τους $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$. Επειδή το πλήθος τους είναι πεπερασμένο, μπορούμε να μεγαλώσουμε, αν χρειάζεται, το διάστημα $(-\infty, u]$ και να βρούμε ένα διάστημα $(-\infty, u']$ το οποίο περιέχει *όλους* τους όρους της (x_n). Άρα η (x_n) είναι άνω φραγμένη. Άτοπο.
Τώρα θα αποδείξουμε ότι υπάρχει υποακολουθία της (x_n) που αποκλίνει στο $+\infty$, περιγράφοντας "αλγοριθμικά" την επιλογή των όρων της.
Υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι > 1. Επιλέγουμε έναν τέτοιο όρο: έστω $x_{n_1} > 1$.
Υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι > 2. Επιλέγουμε έναν τέτοιο όρο: έστω $x_{n_2} > 2$. Φροντίζουμε, όμως, να είναι $n_2 > n_1$. Αυτό είναι εφικτό διότι υπάρχουν *άπειροι* όροι > 2.
Υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι > 3. Επιλέγουμε έναν τέτοιο όρο: έστω $x_{n_3} > 3$ με $n_3 > n_2$.
Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον.
Βρίσκουμε έτσι διαδοχικά όρους x_{n_k} της (x_n) ώστε να ισχύει $n_{k+1} > n_k$ και $x_{n_k} > k$ για κάθε k. Άρα η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία της (x_n) και $x_{n_k} \to +\infty$.
[β] Ομοίως. □

Ασκήσεις.

2.5.1. Έστω $a < b < c < d$. Βρείτε μια *πολύ απλή* ακολουθία που να έχει τέσσερις (εκτός των άλλων) υποακολουθίες ώστε η πρώτη να συγκλίνει στον a, η δεύτερη στον b, η τρίτη στον c και η τέταρτη στον d. Πρώτα περιγράψτε τον τρόπο επιλογής των διαδοχικών όρων της ακολουθίας και μετά γράψτε τον τύπο της.

2.5.2. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει μια οποιαδήποτε από τις ιδιότητες: (γνησίως) αύξουσα, (γνησίως) φθίνουσα, άνω φραγμένη, κάτω φραγμένη, φραγμένη. Αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έχει την ίδια ιδιότητα.

[45] Δεύτερη απόδειξη υπάρχει στην άσκηση 2.5.9.
[46] Το επιχείρημα είναι αυτό που χρειάζεται για την απόδειξη της πρότασης 2.4[γ] και έχουμε δει το "συμμετρικό" του στην απόδειξη της πρότασης 2.4[β].

2.5.3. Εφαρμόστε τα αποτελέσματα των ασκήσεων 2.3.36 και 2.4.3 για να αποδείξετε το όριο $(1+\frac{p}{qn})^n \to \sqrt[q]{e^p}$ για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{N}$ με $q \geq 2$. Δηλαδή, $(1+\frac{r}{n})^n \to e^r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$.
Έστω άρρητος x. Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης e^x, αποδείξτε ότι υπάρχουν $r, s \in \mathbb{Q}$ ώστε $r < x < s$ και $e^x - \epsilon < e^r < e^s < e^x + \epsilon$. Τέλος, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $e^x - \epsilon < (1+\frac{r}{n})^n < (1+\frac{x}{n})^n < (1+\frac{s}{n})^n < e^x + \epsilon$ και συμπεράνατε ότι $(1+\frac{x}{n})^n \to e^x$.

2.5.4. Αν η ακολουθία (x_n) έχει όριο και αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $x_n \to x$.
Αν η ακολουθία (x_n) είναι μονότονη και αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $x_n \to x$.
Έστω[47] $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ για κάθε n. Από το παράδειγμα 2.4.4 γνωρίζουμε ότι ισχύει $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε n. Αποδείξτε με επαγωγή ότι ισχύει $x_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$ για κάθε k και, βάσει των προηγουμένων, συμπεράνατε ότι $x_n \to +\infty$.

2.5.5. Συμπληρώνοντας την άσκηση 2.4.7, αποδείξτε ότι, αν $t \leq 0$, τότε οι ακολουθίες $\big(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\big)$ και $\big((1+\frac{t}{n})^n\big)$ συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

2.5.6. [α] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι υποακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.
[β] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = 1 + \frac{3}{1+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι υποακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.
[γ] Έστω $0 < p < 1$ και ότι ισχύει $x_{n+2} = (1-p)x_{n+1} + px_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι υποακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει. Βρείτε τύπο για τον x_n συναρτήσει του n, βρίσκοντας πρώτα τύπο για τον $y_n = x_{n+1} - x_n$ συναρτήσει του n. Βρείτε το όριο της (x_n).

2.5.7. Έστω $a, b, x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $a \neq b$. Έστω ότι $x_{2k} \to a$ και $x_{2k-1} \to b$ και ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x$. Αποδείξτε ότι η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους κοινούς είτε με την (x_{2k}) είτε με την (x_{2k-1}). Μπορεί η (x_{n_k}) να έχει άπειρους όρους κοινούς και με την (x_{2k}) και με την (x_{2k-1}); Αποδείξτε ότι $x = a$ ή $x = b$.

2.5.8. [α] Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x_{3k} \to x$ και $x_{3k-1} \to x$ και $x_{3k-2} \to x$. Προσαρμόζοντας την απόδειξη της πρότασης 2.15, αποδείξτε ότι $x_n \to x$. Γενικεύστε.
Έστω $a, b, c, x \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. Έστω ότι $x_{3k} \to a$ και $x_{3k-1} \to b$ και $x_{3k-2} \to c$ και ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x$. Αποδείξτε ότι $x = a$ ή $x = b$ ή $x = c$.
[β] Έστω ότι διαμερίζουμε το $\mathbb{N}$ σε *πεπερασμένου πλήθους* άπειρα υποσύνολά του και έστω ακολουθία (x_n). Παίρνοντας δείκτες από καθένα από τα παραπάνω υποσύνολα του $\mathbb{N}$, διαμερίζουμε την ακολουθία σε αντίστοιχες πεπερασμένου πλήθους υποακολουθίες. Αν όλες αυτές οι υποακολουθίες έχουν το ίδιο όριο, αποδείξτε ότι και η (x_n) έχει το ίδιο όριο.
Το αποτέλεσμα αυτό δεν ισχύει αν διαμερίσουμε το $\mathbb{N}$ σε *άπειρου πλήθους* άπειρα υποσύνολά του. Να ένα παράδειγμα.
Κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $n = 2^{m-1}k$ με $m \in \mathbb{N}$ και περιττό $k \in \mathbb{N}$. Άρα το $\mathbb{N}$ διαμερίζεται στα εξής υποσύνολά του: $A^{(m)} = \{2^{m-1}k \,|\, k \text{ περιττός φυσικός}\}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Το $A^{(1)}$ αποτελείται από τους περιττούς φυσικούς, το $A^{(2)}$ από τους φυσικούς που είναι διπλάσιοι των περιττών, το $A^{(3)}$ από τους φυσικούς που είναι τετραπλάσιοι των περιττών κ.τ.λ. Τώρα, ορίζουμε $x_n = \frac{1}{k}$ αν $n = 2^{m-1}k$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$ και κάποιον περιττό $k \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία (x_n) διαμερίζεται στις αντίστοιχες υποακολουθίες: $(x_k^{(m)})_{k=1}^{+\infty}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, όπου, για κάθε

[47] Δεύτερη προσέγγιση της ακολουθίας του παραδείγματος 2.4.4. Δείτε και τις ασκήσεις 2.6.2 και 7.3.20 και τα παραδείγματα 8.2.7, 8.2.10 και 8.3.1 καθώς και τις ασκήσεις 2.4.6 και 6.4.11.

$m \in \mathbb{N}$, είναι $x_k^{(m)} = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Προφανώς, καθεμιά από αυτές τις ακολουθίες έχει όριο 0. Αποδείξτε ότι η (x_n) δεν έχει όριο 0, θεωρώντας την υποακολουθία $(x_{2^{m-1}3})_{m=1}^{+\infty}$.

2.5.9. Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n). Ένας όρος x_n χαρακτηρίζεται *φωτισμένος* αν για κάθε $m > n$ ισχύει $x_m < x_n$.[48]

Αν η (x_n) έχει άπειρους φωτισμένους όρους, αποδείξτε ότι οι όροι αυτοί σχηματίζουν γνησίως φθίνουσα υποακολουθία της (x_n). Αν η (x_n) δεν έχει άπειρους φωτισμένους όρους, αποδείξτε ότι η (x_n) έχει κάποια αύξουσα υποακολουθία.

Συμπεράνατε ότι κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία μονότονη υποακολουθία.

Δώστε δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass.

2.5.10. Αποδείξτε ότι μια ακολουθία (x_n) έχει μια ιδιότητα για άπειρους n αν και μόνο αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία έχει την ίδια ιδιότητα για *κάθε* k.

2.5.11. [49] Αν το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας είναι *πεπερασμένο*, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερή υποακολουθία της.

2.5.12. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει όριο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει υποακολουθία με όριο x.

Δείτε αν είναι σωστό το: η ακολουθία (x_n) έχει όριο αν και μόνο αν κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει υποακολουθία με όριο.

2.5.13. Έστω ότι ισχύει $x_n < x$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = x$ αν και μόνο αν υπάρχει γνησίως αύξουσα υποακολουθία της (x_n) που συγκλίνει στον x.

Θεωρήστε την ακολουθία $(\frac{1}{n})$. Είναι $\sup\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = 1$. Όμως, κάθε υποακολουθία της $(\frac{1}{n})$ συγκλίνει στον 0, το όριο της $(\frac{1}{n})$, οπότε δεν υπάρχει υποακολουθία που συγκλίνει στον 1. Αντιφάσκει αυτό με το προηγούμενο γενικό αποτέλεσμα;

2.5.14. Έστω ακολουθία (x_n) και υποακολουθία (x_{n_k}). Αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθία της (x_{n_k}) είναι υποακολουθία και της (x_n).

2.5.15. Αν η ακολουθία (x_n) δεν έχει όριο, αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο υποακολουθίες της με διαφορετικά όρια. Να αντιπαραβάλετε με την πρόταση 2.14.

Αν η (x_n) δεν έχει όριο, αποδείξτε ότι υπάρχουν l, u ώστε $u < l$ και ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \geq l$ για άπειρους n. Να αντιπαραβάλετε με την πρόταση 2.5[γ].

2.5.16. [α] Έστω $x_n \to x$ και ότι ισχύει $x_n \neq x$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) δεν έχει καμιά σταθερή υποακολουθία.

[β] Έστω φραγμένη ακολουθία (r_n) χωρίς καμιά σταθερή υποακολουθία, ώστε να ισχύει $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ με $p_n \in \mathbb{Z}$ και $q_n \in \mathbb{N}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $q_n \to +\infty$.

[γ] Έστω άρρητος x και ακολουθία (r_n) ώστε $r_n \to x$ και ώστε να ισχύει $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ με $p_n \in \mathbb{Z}$ και $q_n \in \mathbb{N}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $q_n \to +\infty$ και ότι $p_n \to x(+\infty)$.

2.6 Η Ιδιότητα Πληρότητας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.18. *Η ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται* **ακολουθία Cauchy** *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| < \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Αυτό το διατυπώνουμε:*

$$\lim_{n,m\to+\infty}(x_n - x_m) = 0.$$

Με άλλα λόγια: *η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy αν οι όροι της πλησιάζουν απεριόριστα ο ένας τον άλλο όταν οι δείκτες τους γίνονται κατάλληλα μεγάλοι.*

[48] Ο όρος x_n είναι πιο ψηλά από όλους τους επόμενους όρους και άρα φωτίζεται όταν ο ήλιος ανατέλλει από το $+\infty$.

[49] Δείτε την άσκηση 2.1.9.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.17. *Αν η ακολουθία (x_n) συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, αλλάζοντας απλώς το σύμβολο από n σε m, ισχύει $|x_m - x| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $m \geq n_0$. Άρα ισχύει

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) - (x_m - x)| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

για κάθε $n, m \geq n_0$.
Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. □

Το κριτήριο του Cauchy είναι το αντίστροφο της πρότασης 2.17.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. [50] Έστω ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.
Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Ειδικώτερα (θεωρώντας $m = n_0$), για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|x_n - x_{n_0}| < 1$, οπότε

$$|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Επομένως, αν θέσουμε $M = 1 + |x_{n_0}|$, έχουμε ότι από έναν δείκτη και πέρα οι όροι της (x_n) είναι στο διάστημα $[-M, M]$, οπότε η (x_n) είναι φραγμένη.
Επειδή η (x_n) είναι φραγμένη, έχει, σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to x.$$

Θα αποδείξουμε ότι $x_n \to x$.
Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x_m| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } \; n, m \geq n_0.$$

Τώρα παίρνουμε έναν οποιονδήποτε $n \geq n_0$ και τόν κρατάμε, προσωρινά, σταθερό.
Επειδή $n_k \to +\infty$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $n_k \geq n_0$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$|x_n - x_{n_k}| < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{2.9}$$

Επίσης, επειδή $x_{n_k} \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$|x_{n_k} - x| < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{2.10}$$

Άρα ισχύουν τελικά ταυτόχρονα οι (2.9) και (2.10). Οπότε μπορούμε να πάρουμε κάποιον αρκετά μεγάλο k για τον οποίο ισχύουν οι (2.9) και (2.10) και με έναν τέτοιο k βρίσκουμε

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Επειδή ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για τον οποιονδήποτε $n \geq n_0$, συνεπάγεται ότι $x_n \to x$. □

Η χρησιμότητα του κριτηρίου του Cauchy είναι παρόμοια με τη χρησιμότητα του θεωρήματος 2.1. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και δεν γνωρίζουμε το υποψήφιο όριο x της (x_n), αντί να μελετήσουμε τις αποστάσεις $|x_n - x|$ των όρων της ακολουθίας απο τον άγνωστο x, μελετάμε τις αποστάσεις $|x_n - x_m|$ μεταξύ των όρων της ακολουθίας. Πρέπει, βέβαια, να λάβουμε υπ' όψη ότι το κριτήριο του Cauchy δεν προσδιορίζει το όριο μιας ακολουθίας Cauchy.

[50] Άλλες τρεις αποδείξεις υπάρχουν στις ασκήσεις 2.6.6, 2.6.7 και 2.7.14.

Παράδειγμα 2.6.1. Έστω η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ για κάθε n. Θα αποδείξουμε, με δεύτερο τρόπο (δείτε το παράδειγμα 2.4.5.[51]) ότι η (x_n) συγκλίνει.
Έστω $m > n$. Τότε

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \tfrac{1}{(m-1)^2} + \tfrac{1}{m^2} \\ &< \tfrac{1}{n(n+1)} + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \tfrac{1}{(m-2)(m-1)} + \tfrac{1}{(m-1)m} \\ &= \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right) + \left(\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{m-2} - \tfrac{1}{m-1}\right) + \left(\tfrac{1}{m-1} - \tfrac{1}{m}\right) = \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m} < \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Τότε από το $m > n \geq n_0$ συνεπάγεται $|x_n - x_m| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$.
Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει.

Το κριτήριο του Cauchy εκφράζει την *ιδιότητα πληρότητας* του $\mathbb{R}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ. *Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.*

Η ιδιότητα πληρότητας αποδείχτηκε βάσει του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass, η απόδειξη του οποίου ανάγεται, τελικά, στην ιδιότητα supremum.

Ασκήσεις.

2.6.1. Έστω ότι οι (x_n), (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy. Αποδείξτε, με τον ορισμό, ότι οι $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$ είναι ακολουθίες Cauchy.

2.6.2. [52] Αν ισχύει $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ για κάθε n, από το παράδειγμα 2.4.4 γνωρίζουμε ότι ισχύει $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε n. Είναι η (x_n) ακολουθία Cauchy; Συμπεράνατε ότι $x_n \to +\infty$.

2.6.3. [53] Έστω ότι ισχύει $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι ισχύει $|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{m-n-1}}{m}\right| \leq \frac{1}{n+1}$ για κάθε n, m με $n < m$. Συμπεράνατε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και ότι συγκλίνει.

2.6.4. [α] Έστω $0 < M < 1$ και έστω ότι ισχύει τελικά $|x_n - x_{n+1}| \leq cM^n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| \leq c\frac{M^n}{1-M}$ για κάθε n, m με $n_0 \leq n < m$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αν x είναι το όριο της (x_n), αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq c\frac{M^n}{1-M}$.
[β] Έστω $0 < M < 1$ και έστω ότι ισχύει τελικά $|x_{n+1} - x_{n+2}| \leq M|x_n - x_{n+1}|$.[54] Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αν x είναι το όριο της (x_n), αποδείξτε ότι υπάρχει $c \geq 0$ ώστε να ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq c\frac{M^n}{1-M}$.
[γ] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = 1 + \frac{3}{1+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. Βρείτε και μια εκτίμηση για την απόσταση του n-οστού όρου x_n από το όριο της ακολουθίας.
[δ] Έστω $0 < |\kappa| < 1$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = a + \kappa \sin x_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. Βρείτε μια εκτίμηση για την απόσταση του n-οστού όρου x_n από το όριο της ακολουθίας.

2.6.5. Έστω ότι ισχύει η Αρχιμήδεια ιδιότητα και η ιδιότητα πληρότητας. Αποδείξτε, όπως περιγράφεται παρακάτω, ότι ισχύει η ιδιότητα supremum.[55]

[51] Δείτε και τα παραδείγματα 8.2.7 και 8.2.10 και τις ασκήσεις 6.4.11, 7.3.20 και 8.2.1.
[52] Άλλη προσέγγιση για την ακολουθία του παραδείγματος 2.4.4. Δείτε και τις ασκήσεις 2.5.4 και 7.3.20 και τα παραδείγματα 8.2.7, 8.2.10 και 8.3.1 και τις ασκήσεις 2.4.6 και 6.4.11.
[53] Άλλη προσέγγιση του παραδείγματος 2.5.7. Δείτε και την άσκηση 6.4.11 και το παράδειγμα 8.3.9.
[54] Τότε η (x_n) χαρακτηρίζεται **γνησίως συστολική**. Αν $0 \leq M \leq 1$, η ακολουθία χαρακτηρίζεται **συστολική**.
[55] Άρα η ιδιότητα supremum είναι ισοδύναμη με την σύζευξη της ιδιότητας πληρότητας και της Αρχιμήδειας ιδιότητας.

Δείτε την άσκηση 2.4.17 και τα βήματα στην απόδειξη του αποτελέσματός της. Παραλείψτε το αρχικό βήμα, δηλαδή μην αποδείξετε ότι κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2^n} \to 0$ και, μετά, επαναλάβατε όλα τα επόμενα βήματα παρατηρώντας ότι οι (x_n), (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy. Συμπεράνατε ότι κάθε μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

2.6.6. [56] Έστω ακολουθία Cauchy (x_n).

Αποδείξτε ότι υπάρχει $[a_1, b_1]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και ώστε να ισχύει τελικά $x_n \in [a_1, b_1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$ ώστε $b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$ και ώστε να ισχύει τελικά $x_n \in [a_2, b_2]$. Επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργούνται διαστήματα $[a_k, b_k]$ για κάθε k ώστε να ισχύει $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$ και $b_k - a_k < \frac{1}{k}$ για κάθε k και ώστε να ισχύει τελικά $x_n \in [a_k, b_k]$ για κάθε k. Συμπεράνατε ότι υπάρχει x ώστε να ισχύει $x \in [a_k, b_k]$ για κάθε k και, τέλος, ότι $x_n \to x$.

2.6.7. [57] Έστω ακολουθία Cauchy (x_n).

Θεωρήστε $l_n = \inf\{x_k \,|\, k \geq n\}$ και $u_n = \sup\{x_k \,|\, k \geq n\}$ για κάθε n και αποδείξτε ότι ισχύει $l_n \leq u_n$ και $l_n \leq l_{n+1}$ και $u_{n+1} \leq u_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $u_n - l_n \to 0$ και συμπεράνατε ότι υπάρχει x ώστε $l_n \to x$ και $u_n \to x$. Αποδείξτε ότι ισχύει $l_n \leq x_n \leq u_n$ για κάθε n, οπότε $x_n \to x$.

2.7 Ανώτατο όριο και κατώτατο όριο ακολουθίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.19. *Έστω ακολουθία (x_n) και $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Το x χαρακτηρίζεται* **υποακολουθιακό όριο** *της ακολουθίας (x_n) αν η (x_n) έχει κάποια υποακολουθία με όριο x.*

Παράδειγμα 2.7.1. Αν μια ακολουθία (x_n) έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία της έχει το ίδιο όριο, οπότε το όριό της είναι το μοναδικό υποακολουθιακό όριό της. Για παράδειγμα, η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ έχει μοναδικό υποακολουθιακό όριο τον 0 και η ακολουθία $(-n)$ το $-\infty$.

Παράδειγμα 2.7.2. Η ακολουθία (x_n) με $x_n = (-1)^{n-1}$ για κάθε n έχει τουλάχιστον δύο υποακολουθιακά όρια, τους -1 και 1. Η υποακολουθία (x_{2k}) έχει όριο -1 και η υποακολουθία (x_{2k-1}) έχει όριο 1.
Ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της (x_n). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) με όριο x.
Επειδή οι υποακολουθίες (x_{2k}) και (x_{2k-1}) αποτελούν και οι δύο μαζί ολόκληρη την (x_n), η (x_{n_k}) έχει είτε άπειρους όρους της κοινούς με την (x_{2k}) είτε άπειρους όρους της κοινούς με την (x_{2k-1}).
Αν η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους της κοινούς με την (x_{2k}), οι (x_{n_k}) και (x_{2k}) έχουν μια κοινή υποακολουθία η οποία, ως υποακολουθία της (x_{n_k}), πρέπει να έχει όριο x και, ως υποακολουθία της (x_{2k}), πρέπει να έχει όριο -1 και, επομένως, θα είναι $x = -1$.
Ομοίως, αν η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους της κοινούς με την (x_{2k-1}), θα είναι $x = 1$.
Άρα, αν το x είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n), τότε είναι $x = 1$ ή $x = -1$. Άρα τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της (x_n) είναι οι -1 και 1.

Παράδειγμα 2.7.3. Ομοίως, η ακολουθία $\left(\frac{(-1)^{n-1}+1}{2} n\right)$ έχει μοναδικά υποακολουθιακά όρια τον 0 και το $+\infty$.

Σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass και την πρόταση 2.16, κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο: αν είναι φραγμένη, τότε έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο το οποίο είναι αριθμός ενώ, αν δεν είναι φραγμένη, τότε ένα τουλάχιστον από τα $\pm\infty$ είναι υποακολουθιακό όριό της. Άρα το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων κάθε ακολουθίας είναι μη-κενό.

[56] Δεύτερη απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy.
[57] Τρίτη απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2. *Κάθε ακολουθία έχει ένα μέγιστο υποακολουθιακό όριο και ένα ελάχιστο υποακολουθιακό όριο.*

Απόδειξη. Πρώτη περίπτωση: η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.
Τότε το $+\infty$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n) και είναι, προφανώς, το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Δεύτερη περίπτωση: η (x_n) έχει ως μοναδικό υποακολουθιακό όριο το $-\infty$.
Τότε το $-\infty$ είναι, προφανώς, το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Τρίτη περίπτωση: η (x_n) είναι άνω φραγμένη και έχει υποακολουθιακό όριο $\neq -\infty$.
Επειδή η (x_n) είναι άνω φραγμένη, υπάρχει αριθμός u ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n. Τότε κάθε υποακολουθία της (x_n) ικανοποιεί την ίδια ανισότητα και, επομένως, κάθε υποακολουθιακό όριο της (x_n) είναι $\leq u$. Άρα η υπόθεση αυτής της περίπτωσης συνεπάγεται ότι η (x_n) έχει υποακολουθιακό όριο $\neq -\infty$ και ότι κάθε τέτοιο υποακολουθιακό όριο είναι $\leq u$. Άρα το σύνολο L των *πραγματικών* υποακολουθιακών ορίων της (x_n), δηλαδή το

$$L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ είναι υποακολουθιακό όριο της } (x_n)\}.$$

είναι μη-κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Άρα το L έχει supremum το οποίο είναι αριθμός και θέτουμε

$$\overline{x} = \sup L.$$

Θα αποδείξουμε ότι ο $\overline{x}$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n). Τότε θα συμπεράνουμε ότι ο $\overline{x}$ ανήκει στο L, οπότε είναι το μέγιστο στοιχείο του L και, επομένως, είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Έστω οποιοσδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή $\overline{x} = \sup L$, υπάρχει $x \in L$ ώστε $\overline{x} - \epsilon < x \leq \overline{x}$ και, επομένως, $\overline{x} - \epsilon < x < \overline{x} + \epsilon$. Επειδή $x \in L$, υπάρχει υποακολουθία της (x_n) με όριο x. Άρα οι όροι της υποακολουθίας τελικά ανήκουν στο διάστημα $(\overline{x} - \epsilon, \overline{x} + \epsilon)$ και, επομένως, υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) μέσα στο διάστημα $(\overline{x} - \epsilon, \overline{x} + \epsilon)$. Αυτό το συμπέρασμα θα το εφαρμόσουμε διαδοχικά για $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.
Επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) μέσα στο διάστημα $(\overline{x} - 1, \overline{x} + 1)$, επιλέγουμε έναν, έστω τον x_{n_1}, ώστε

$$\overline{x} - 1 < x_{n_1} < \overline{x} + 1.$$

Επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) μέσα στο διάστημα $(\overline{x} - \frac{1}{2}, \overline{x} + \frac{1}{2})$, επιλέγουμε έναν, έστω τον x_{n_2}, ώστε

$$\overline{x} - \tfrac{1}{2} < x_{n_2} < \overline{x} + \tfrac{1}{2} \qquad \text{και } \ n_2 > n_1.$$

Επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) μέσα στο διάστημα $(\overline{x} - \frac{1}{3}, \overline{x} + \frac{1}{3})$, επιλέγουμε έναν, έστω τον x_{n_3}, ώστε

$$\overline{x} - \tfrac{1}{3} < x_{n_3} < \overline{x} + \tfrac{1}{3} \qquad \text{και } \ n_3 > n_2.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, είναι φανερό ότι δημιουργείται μια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έτσι ώστε να ισχύει

$$\overline{x} - \tfrac{1}{k} < x_{n_k} < \overline{x} + \tfrac{1}{k} \qquad \text{για κάθε } \ k$$

και, επομένως,

$$x_{n_k} \to \overline{x}.$$

Άρα ο $\overline{x}$ είναι υποακολουθιακό όριο και, επομένως, το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Δεν υπάρχει άλλη περίπτωση, οπότε έχουμε αποδείξει ότι σε κάθε περίπτωση η (x_n) έχει μέγιστο υποακολουθιακό όριο.
Με συμμετρικό τρόπο αποδεικνύεται ότι η (x_n) έχει και ελάχιστο υποακολουθιακό όριο. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.20. [58] *Το* **μέγιστο υποακολουθιακό όριο** *μιας ακολουθίας* (x_n) *ονομάζεται και* **ανώτατο όριο** *της* (x_n) *και συμβολίζεται*

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n \quad \text{ή} \quad \limsup x_n \quad \text{ή} \quad \overline{\lim}\, x_n.$$

Το **ελάχιστο υποακολουθιακό όριο** *μιας ακολουθίας* (x_n) *ονομάζεται και* **κατώτατο όριο** *της* (x_n) *και συμβολίζεται*

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \quad \text{ή} \quad \liminf x_n \quad \text{ή} \quad \underline{\lim}\, x_n.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.18. [α] *Το* $\overline{\lim}\, x_n$ *έχει τις εξής δύο ιδιότητες:*
(i) *Αν* $\overline{\lim}\, x_n < x$, *τότε ισχύει τελικά* $x_n < x$.
(ii) *Αν* $x < \overline{\lim}\, x_n$, *τότε ισχύει* $x < x_n$ *για άπειρους* n.
[β] *Το* $\underline{\lim}\, x_n$ *έχει τις εξής δύο ιδιότητες:*
(i) *Αν* $x < \underline{\lim}\, x_n$, *τότε ισχύει τελικά* $x < x_n$.
(ii) *Αν* $\overline{\lim}\, x_n < x$, *τότε ισχύει* $x_n < x$ *για άπειρους* n.

Απόδειξη. [α] (i) Έστω $\overline{\lim}\, x_n < x$ και έστω ότι δεν είναι σωστό ότι ισχύει τελικά $x_n < x$. Τότε υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) οι οποίοι είναι $\geq x$. Άρα υπάρχει υποακολουθία της (x_n) όλοι οι όροι της οποίας είναι $\geq x$. Άρα υπάρχει υποακολουθία της συγκεκριμένης υποακολουθίας και, επομένως, υποακολουθία της (x_n) όλοι οι όροι της οποίας είναι $\geq x$ και η οποία έχει όριο. Το όριο αυτό πρέπει να είναι $\geq x$, οπότε υπάρχει υποακολουθιακό όριο της (x_n) το οποίο είναι $\geq x$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $\overline{\lim}\, x_n < x$ και το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
(ii) Έστω $x < \overline{\lim}\, x_n$. Επειδή το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n), υπάρχει υποακολουθία της (x_n) με όριο το $\overline{\lim}\, x_n$. Τότε οι όροι της υποακολουθίας είναι τελικά $> x$, οπότε υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) οι οποίοι είναι $> x$.
[β] Ομοίως. □

Γνωρίζουμε ότι δεν έχουν όλες οι ακολουθίες όριο. Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι, σύμφωνα με όσα έχουμε πει σ' αυτήν την ενότητα *κάθε ακολουθία έχει ανώτατο όριο και κατώτατο όριο*.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.19. *Έστω οποιαδήποτε ακολουθία* (x_n).
[α] $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$.
[β] *Η* (x_n) *έχει όριο αν και μόνο αν* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$. *Επίσης, στην περίπτωση που η* (x_n) *έχει όριο, ισχύει* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$.

Απόδειξη. [α] Προφανές, αφού το $\underline{\lim}\, x_n$ είναι το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο και το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
[β] Έστω ότι η (x_n) έχει όριο.
Τότε το $\lim x_n$ είναι το μοναδικό και, επομένως, το μέγιστο και το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n). Άρα $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$. (Αυτό το είδαμε και στο παράδειγμα 2.7.1.)
Αντιστρόφως, έστω $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.
Αν $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = +\infty$, τότε από το (i) της πρότασης 2.18[β] συνεπάγεται ότι για κάθε x ισχύει τελικά $x < x_n$ και, επομένως, $\lim x_n = +\infty$.
Αν $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = -\infty$, τότε από το (i) της πρότασης 2.18[α] συνεπάγεται ότι για κάθε x ισχύει τελικά $x_n < x$ και, επομένως, $\lim x_n = -\infty$.
Τέλος, έστω $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = x \in \mathbb{R}$. Τότε από το (i) της πρότασης 2.18[α] συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n < x + \epsilon$ και από το (i) της πρότασης 2.18[β] συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x - \epsilon < x_n$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$. Άρα $\lim x_n = x$. □

[58] Για έναν εναλλακτικό ορισμό του ανώτατου ορίου και του κατώτατου ορίου ακολουθίας δείτε την άσκηση 2.7.15 και τις αντίστοιχες υποσημειώσεις.

Ασκήσεις.

2.7.1. Έστω $a < b < c$ και οι ακολουθίες $(a, b, a, b, a, b, a, b, \dots)$ και $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots)$. Βρείτε τα $\overline{\lim}$ και $\underline{\lim}$ των ακολουθιών αυτών καθώς και όλα τα υποακολουθιακά όριά τους.

2.7.2. Βρείτε, μέσω των ορισμών τους, τα $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ των ακολουθιών: $(\frac{n+1}{n})$, $(\frac{n^2+n+1}{n+3})$, $((-2)^n)$, $\big(2^{(-1)^{n-1}n}\big)$, $\big((-1)^{n-1}(1-\frac{1}{n})\big)$, $\big((-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n})\big)$, $\big(2^{n-3[n/3]}\big)$, $\big(\sin\frac{2n\pi}{3}\big)$.

2.7.3. Αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ αν και μόνο αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

Αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ αν και μόνο αν $x_n \to -\infty$.

Ποιά είναι τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το $\underline{\lim}\, x_n$;

2.7.4. Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}(-x_n)$.

2.7.5. Αν ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$, αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, y_n$ και $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$.

2.7.6. Έστω ότι ισχύει τελικά $a_n \leq b_n \leq c_n$. Αν $\overline{\lim}\, c_n \leq \underline{\lim}\, a_n$, αποδείξτε ότι οι ακολουθίες (a_n), (b_n), (c_n) έχουν το ίδιο όριο.

2.7.7. Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n)$ και $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$ αν δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή.

Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n\, \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}(x_n y_n)$ και $\overline{\lim}(x_n y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n\, \overline{\lim}\, y_n$ αν ισχύει τελικά $x_n > 0$ και $y_n > 0$ και δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή.

Αν $t > 0$, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}(t x_n) = t\, \overline{\lim}\, x_n$ και $\underline{\lim}(t x_n) = t\, \underline{\lim}\, x_n$. Τί γίνεται αν $t < 0$;

2.7.8. Αν η ακολουθία (y_n) έχει όριο και δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}(x_n + y_n) = \overline{\lim}\, x_n + \lim y_n$ και $\underline{\lim}(x_n + y_n) = \underline{\lim}\, x_n + \lim y_n$.

Αν ισχύει τελικά $x_n, y_n > 0$, η ακολουθία (y_n) έχει όριο και δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}(x_n y_n) = \overline{\lim}\, x_n \lim y_n$ και $\underline{\lim}(x_n y_n) = \underline{\lim}\, x_n \lim y_n$.

2.7.9. Αν $m \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι οι ακολουθίες (x_n), (x_{n+m}) έχουν τα ίδια υποακολουθιακά όρια.

2.7.10. Έστω (x_{n_k}) υποακολουθία της (x_n).

Δείτε την άσκηση 2.5.14 και αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθιακό όριο της (x_{n_k}) είναι υποακολουθιακό όριο και της (x_n).

Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, x_{n_k} \leq \overline{\lim}\, x_{n_k} \leq \overline{\lim}\, x_n$.

2.7.11. [α] Αποδείξτε ότι ο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας (x_n) αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για άπειρους n.

[β] Έστω $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της ακολουθίας (x_n). Αν (y_n) είναι οποιαδήποτε ακολουθία στο X και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $y \in X$.

Έστω $a < b < c \leq d$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) με σύνολο υποακολουθιακών ορίων το $[a, b) \cup [c, d]$ ή το $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.

2.7.12. Αποδείξτε ότι η (x_n) έχει μέγιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \geq \overline{\lim}\, x_n$.

Αποδείξτε ότι η (x_n) έχει ελάχιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \leq \underline{\lim}\, x_n$.

2.7.13. [α] Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leq \overline{\lim}\, x_n$.

Πώς από αυτό προκύπτει ως άμεση συνέπεια το θεώρημα του Cesáro στην άσκηση 2.3.41[α];

[β] Αν ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \overline{\lim}\, x_n$.

[γ] Αν ισχύει $y_n > 0$ για κάθε n και $y_1 + \cdots + y_n \to +\infty$, αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, \frac{x_n}{y_n} \leq \underline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_n}{y_n}$.

2.7.14. [59] Έστω ακολουθία Cauchy (x_n).

Έστω $\underline{x} = \underline{\lim}\, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\overline{x} = \overline{\lim}\, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Από την απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy κρατάμε ότι η (x_n) είναι φραγμένη, οπότε $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$. Έστω $\underline{x} < \overline{x}$. Θεωρήστε l, u ώστε $\underline{x} < l < u < \overline{x}$. Τότε ισχύει $x_m < l$ για άπειρους m και $x_n > u$ για άπειρους n. Άρα ισχύει $x_n - x_m > u - l$ για άπειρους n, m. Αποδείξτε ότι αυτό είναι άτοπο. Συμπεράνατε ότι $\underline{x} = \overline{x}$, οπότε η (x_n) συγκλίνει.

2.7.15. Έστω ακολουθία (x_n). Θέτουμε $u_n = \sup\{x_k \,|\, k \geq n\}$, $l_n = \inf\{x_k \,|\, k \geq n\}$ για κάθε n.

Παρατηρήστε ότι ισχύει $l_n \leq u_n$ για κάθε n.

Αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $u_n = +\infty$ για κάθε n.

Αν η (x_n) είναι άνω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $u_n \in \mathbb{R}$ και $u_{n+1} \leq u_n$ για κάθε n, οπότε η (u_n) έχει όριο στο $[-\infty, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $u_n \to \overline{\lim}\, x_n$.[60]

Αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $l_n = -\infty$ για κάθε n.

Αν η (x_n) είναι κάτω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $l_n \in \mathbb{R}$ και $l_n \leq l_{n+1}$ για κάθε n, οπότε η (l_n) έχει όριο στο $(-\infty, +\infty]$. Αποδείξτε ότι $l_n \to \underline{\lim}\, x_n$.[61]

2.7.16. Δείτε την πρόταση 2.18.

[α] Αποδείξτε ότι το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι ο μοναδικός αριθμός $\overline{x}$ που έχει τις εξής δύο ιδιότητες: (i) αν $\overline{x} < x$, τότε ισχύει τελικά $x_n < x$ και (ii) αν $x < \overline{x}$, τότε ισχύει $x < x_n$ για άπειρους n. Διατυπώστε και αποδείξτε τα αντίστοιχα για το $\underline{\lim}\, x_n$.

[β] Αν ισχύει τελικά $x_n < x$, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n \leq x$. Αν ισχύει $x < x_n$ για άπειρους n, αποδείξτε ότι $x \leq \overline{\lim}\, x_n$. Διατυπώστε και αποδείξτε τα αντίστοιχα για το $\underline{\lim}\, x_n$.

2.7.17. Έστω ακολουθία (x_n) με την ιδιότητα: $x_{n+1} - x_n \to 0$. Φυσικά, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία έχει αυτήν την ιδιότητα και ένα παράδειγμα ακολουθίας με αυτήν την ιδιότητα και με όριο $+\infty$ είναι η $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$.

Αν $\underline{x} = \underline{\lim}\, x_n$ και $\overline{x} = \overline{\lim}\, x_n$, αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι ολόκληρο το διάστημα $[\underline{x}, \overline{x}] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Θεωρήστε την ακολουθία $(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 0, \dots)$. Ποιό είναι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της;

Βρείτε ακολουθία (x_n) ώστε $x_{n+1} - x_n \to 0$ και ώστε το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της να είναι το $\overline{\mathbb{R}}$.

2.7.18. [α][62] Έστω άρρητος $a > 0$. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = na - [na]$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι το $[0, 1]$.

[β] Έστω άρρητος $a > 0$. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = \sin(na\pi)$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι το $[-1, 1]$.

---

[59] Τέταρτη απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy.

[60] Αυτός είναι ένας εναλλακτικός ισοδύναμος ορισμός του ανώτατου ορίου: $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$, αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, και $\overline{\lim}\, x_n = \lim u_n$, αν η (x_n) είναι άνω φραγμένη.

[61] Ο "συμμετρικός" εναλλακτικός ισοδύναμος ορισμός του κατώτατου ορίου: $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$, αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, και $\underline{\lim}\, x_n = \lim l_n$, αν η (x_n) είναι κάτω φραγμένη.

[62] Συνέχεια της άσκησης 2.3.16.

Βασική βιβλιογραφία.

Bartle, R. (1967) *The Elements of Real Analysis, Ch III.* Wiley.
Bartle, R. & Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 3.* Wiley.
Beals, R. (2004) *Analysis, an Introduction, Ch 3.* Cambridge Univ. Press.
Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 7, 11.* Springer.
Berberian, S. (1994) *A First Course in Real Analysis, Ch 2-3.* Springer.
Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 2.* Dover.
Buck, R. & Buck, E. (2003) *Advanced Calculus, Ch 1.* Waveland Press.
Courant, R. (1988) *Differential and Integral Calculus, Vol I, Ch I.* Wiley.
Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 1.* Springer.
Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 2.* Springer.
Ghorpade, S. & Limaye, B. (2006) *A Course in Calculus and Real Analysis, Ch 2.* Springer.
Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 2.* Wiley.
Grauert, H. & Lieb, I. (1967) *Differential- und Integralrechnung, Band I, Kap II.* Springer.
Hardy, G. (2008) *A Course of Pure Mathematics, Ch IV.* Cambridge Univ. Press.
Hayes Jr, C. (1964) *Concepts of Real Analysis, Ch 4-5.* Wiley.
Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 3.* Chapman and Hall.
Landau, E. (2001) *Differential and Integral Calculus, Ch 1-2.* American Math. Society & Chelsea.
Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch II.* Springer.
Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 3.* Mir Publishers.
Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 2.* Springer.
Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 2.* Springer.
Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 2.* Pearson.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 3-4.* Springer.
Gleason, A. (1991) *Fundamentals of Abstract Analysis, Ch 12.* Taylor and Francis.
Goffman, C. (1966) *Introduction to Real Analysis, Ch 2.* Harper and Row.
Goffman, C. (1953) *Real Functions, Ch 4.* Rinehart.
Graves, L. (2009) *The Theory of Functions of Real Variables, Ch II-III.* Dover.
Rosenlicht, M. (1986) *Introduction to Analysis, Ch III.* Dover.
Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 3.* McGraw-Hill.
Smirnov, V. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch I.* Pergammon Press.
Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 22.* Cambridge Univ. Press.