Κεφάλαιο 1

Οι πραγματικοί αριθμοί.

1.1 Τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\overline{\mathbb{R}}$.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε $\mathbb{R}$. Τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών τα συμβολίζουμε, αντιστοίχως, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$. Προσέξτε: δεχόμαστε ως σύνολο των φυσικών το $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Δηλαδή, δεν θεωρούμε φυσικό τον ακέραιο 0.

Στο βιβλίο αυτό όταν λέμε "αριθμός" ή "σύνολο" εννοούμε "πραγματικός αριθμός" ή "υποσύνολο του $\mathbb{R}$" εκτός αν υπάρχει διευκρίνηση για κάτι διαφορετικό.[1]

Από τις αλγεβρικές ιδιότητες των αριθμών θα αναφέρουμε μόνο δύο βασικές ταυτότητες και δύο ανισότητες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*
[α] *Για κάθε x, y ισχύει*

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}). \tag{1.1}$$

[β] *Ισχύει*

$$nx^{n-1}(y-x) \leq y^n - x^n \leq ny^{n-1}(y-x) \qquad \text{αν } \ 0 \leq x \leq y. \tag{1.2}$$

Απόδειξη. [α] Πολλαπλασιάζουμε τις δύο παρενθέσεις και διαγράφουμε όμοιους όρους.
[β] Με την υπόθεση $0 \leq x \leq y$ παρατηρούμε ότι, αν στην δεύτερη παρένθεση στη δεξιά μεριά της (1.1) αντικαταστήσουμε κάθε x με το y, τότε το άθροισμα στην παρένθεση αυξάνεται (με την ευρεία έννοια) και καθένας από τους n όρους της γίνεται y^{n-1} ενώ, αν αντικαταστήσουμε κάθε y με το x, τότε το άθροισμα στην παρένθεση φθίνει (με την ευρεία έννοια) και καθένας από τους n όρους της γίνεται x^{n-1}. $\square$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ BERNOULLI. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει*

$$(a+1)^n \geq na + 1 \qquad \text{αν } \ a \geq -1.$$

Απόδειξη. [2] Αν $a \geq 0$, θέτουμε $y = a + 1$ και $x = 1$ στην αριστερή ανισότητα (1.2) ενώ, αν $-1 \leq a \leq 0$, θέτουμε $y = 1$ και $x = a + 1$ στην δεξιά ανισότητα (1.2). $\square$

ΔΙΩΝΥΜΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ NEWTON. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε x, y ισχύει*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}.$$

[1] Στο κεφάλαιο 11 θα γίνεται ευρύτερη χρήση του όρου "σύνολο".
[2] Άλλες δύο αποδείξεις της ανισότητας του Bernoulli είναι στην άσκηση 1.1.5 και στο παράδειγμα 5.4.6.

Απόδειξη. [3] Αν αναπτύξουμε το γινόμενο

$$(x+y)^n = (x+y)\cdots(x+y) \qquad (n \ \text{φορές})$$

χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα, θα βρούμε ένα άθροισμα όρων καθένας από τους οποίους είναι ένα γινόμενο n όρων το οποίο προκύπτει παίρνοντας από κάθε παρένθεση είτε τον x είτε τον y και πολλαπλασιάζοντάς τους. Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $0 \le k \le n$ σχηματίζουμε το γινόμενο $x^k y^{n-k}$ παίρνοντας τον x από k από τις παρενθέσεις και τον y από τις υπόλοιπες $n-k$ παρενθέσεις. Τώρα, για κάθε συγκεκριμένο $k \in \mathbb{Z}$ με $0 \le k \le n$, το πλήθος των όμοιων όρων $x^k y^{n-k}$ που θα προκύψουν στο συνολικό άθροισμα είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων επιλογής από τις n συνολικές παρενθέσεις εκείνων των k παρενθέσεων που θα μας δώσουν τους k παράγοντες x. Όμως, το πλήθος των τρόπων επιλογής k αντικειμένων από n αντικείμενα ισούται με τον λεγόμενο **διωνυμικό συντελεστή**

$$\tbinom{n}{k} = \tfrac{n!}{k!(n-k)!} = \tfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Άρα για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $0 \le k \le n$ υπάρχουν $\binom{n}{k}$ όμοιοι όροι $x^k y^{n-k}$. □

Σημειώνουμε, επίσης, ότι η απόλυτη τιμή $|x|$ εκφράζει το *μέγεθος* του x καθώς και την *απόσταση* του x από τον 0. Και, γενικότερα, η $|x-y|$ εκφράζει την *απόσταση*[4] ανάμεσα στους x και y. Όσο μικρότερη είναι η $|x-y|$ τόσο κοντύτερα είναι ο x στον y.

Τέλος, ας θυμηθούμε μερικές βασικές ανισοτικές σχέσεις για την απόλυτη τιμή.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2. [α] *Αν $a > 0$, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:*

$$|x| \le a \quad \text{αν και μόνο αν} \quad -a \le x \le a.$$

$$|x| < a \quad \text{αν και μόνο αν} \quad -a < x < a.$$

[β] *Για κάθε x, y ισχύει η* **τριγωνική ανισότητα***:*

$$|x \pm y| \le |x| + |y|.$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε περιπτώσεις σχετικά με το αν οι x και y είναι ≥ 0 ή ≤ 0. Κατά τα άλλα, η απόδειξη είναι στοιχειώδης. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. *Ορίζουμε το* **επεκτεταμένο** $\mathbb{R}$*, δηλαδή το σύνολο*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Δεχόμαστε ότι το $+\infty$ είναι μεγαλύτερο από κάθε αριθμό, ότι το $-\infty$ είναι μικρότερο από κάθε αριθμό και ότι το $-\infty$ είναι μικρότερο από το $+\infty$. Δηλαδή:

$$-\infty < x, \qquad x < +\infty, \qquad -\infty < +\infty.$$

Ορίζουμε τα αντίθετα

$$-(+\infty) = -\infty\,, \qquad -(-\infty) = +\infty\,.$$

Ορίζουμε τα αθροίσματα

$$(+\infty) + x = +\infty, \qquad x + (+\infty) = +\infty, \qquad (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

[3] Άλλες δύο αποδείξεις του διωνυμικού τύπου του Newton είναι στην άσκηση 1.1.5 και στο παράδειγμα 5.4.8. Πάντως, η πιο ουσιαστική απόδειξη είναι αυτή εδώ.

[4] Αυτή είναι η λεγόμενη Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα σημεία της ευθείας. Η έννοια αυτή επεκτείνεται ως Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα σημεία του επιπέδου και ανάμεσα στα σημεία του χώρου και, ακόμη περισσότερο, ανάμεσα στα σημεία του d-διάστατου Ευκλείδειου χώρου. Επίσης, υπάρχει και η έννοια της απόστασης ανάμεσα σε συναρτήσεις την οποία θα δούμε στα κεφάλαια 9 και 10. Όλες αυτές οι έννοιες της απόστασης θα μελετηθούν με ενιαίο τρόπο στη γενικότητά τους στο κεφάλαιο 11 των μετρικών χώρων.

$$(-\infty)+x=-\infty, \qquad x+(-\infty)=-\infty, \qquad (-\infty)+(-\infty)=-\infty.$$

Όμως, δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$(+\infty)+(-\infty), \qquad (-\infty)+(+\infty)$$

και αυτές οι παραστάσεις χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές αθροίσματος**.
Ορίζουμε τις διαφορές

$$(+\infty)-x=+\infty, \qquad x-(-\infty)=+\infty, \qquad (+\infty)-(-\infty)=+\infty,$$

$$(-\infty)-x=-\infty, \qquad x-(+\infty)=-\infty, \qquad (-\infty)-(+\infty)=-\infty.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$(+\infty)-(+\infty), \qquad (-\infty)-(-\infty)$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές διαφοράς**.
Ορίζουμε τα γινόμενα

$$(\pm\infty)x=\pm\infty, \quad x(\pm\infty)=\pm\infty \qquad \textit{αν } \ x>0,$$

$$(\pm\infty)x=\mp\infty, \quad x(\pm\infty)=\mp\infty \qquad \textit{αν } \ x<0,$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty, \qquad (\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$(\pm\infty)0, \qquad 0(\pm\infty)$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές γινομένου**.
Ορίζουμε τα αντίστροφα

$$\tfrac{1}{+\infty}=0, \qquad \tfrac{1}{-\infty}=0.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για την παράσταση

$$\tfrac{1}{0}$$

και χαρακτηρίζεται **απροσδιόριστη μορφή αντιστρόφου**.
Ορίζουμε τους λόγους

$$\tfrac{\pm\infty}{x}=\pm\infty \quad \textit{αν } x>0, \qquad \tfrac{\pm\infty}{x}=\mp\infty \quad \textit{αν } x<0, \qquad \tfrac{x}{\pm\infty}=0.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$\tfrac{x}{0}, \qquad \tfrac{\pm\infty}{0}, \qquad \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \tfrac{\pm\infty}{\mp\infty}$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές λόγου**.
Τέλος,[5] *ορίζουμε τις απόλυτες τιμές*

$$|+\infty|=+\infty, \qquad |-\infty|=+\infty.$$

Βάσει της επέκτασης της έννοιας της *ανισότητας* από το $\mathbb{R}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ αιτιολογείται η χρήση των συμβόλων $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ και $(-\infty,+\infty)$ για τα αντίστοιχα διαστήματα $\{x\,|\,x>a\}$, $\{x\,|\,x\geq a\}$, $\{x\,|\,x<b\}$, $\{x\,|\,x\leq b\}$ και $\mathbb{R}$, δηλαδή για τα λεγόμενα *μη-φραγμένα διαστήματα*. Στο $\overline{\mathbb{R}}$ έχουμε, επιπλέον, και τα διαστήματα $(a,+\infty]$, $[a,+\infty]$, $[-\infty,b)$, $[-\infty,b]$, $[-\infty,+\infty)$, $(-\infty,+\infty]$, $[-\infty,+\infty]$.

[5] Κάποιοι επιπλέον ανάλογοι ορισμοί σε σχέση με την πράξη της δύναμης θα δούμε στους ορισμούς 1.10 και 2.13.

Οι επεκτάσεις των αλγεβρικών πράξεων από το $\mathbb{R}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ δεν είναι αυθαίρετες. Όλοι οι παραπάνω τύποι ανάγονται στην εμπειρική αντίληψή μας για τις έννοιες του “μεγάλου” (θετικού ή αρνητικού) και του “μικρού” (θετικού ή αρνητικού) και για τις μεταξύ τους σχέσεις. Για παράδειγμα, η εμπειρία υπαγορεύει ότι το άθροισμα δύο πολύ μεγάλων θετικών ποσοτήτων είναι πολύ μεγάλη θετική ποσότητα και αυτό αιτιολογεί το να ορίσουμε ότι $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$. Από την εμπειρία μας, και πάλι, γνωρίζουμε ότι η διαφορά δύο πολύ μεγάλων θετικών ποσοτήτων μπορεί να είναι είτε πολύ μεγάλη θετική ποσότητα είτε πολύ μεγάλη αρνητική ποσότητα είτε *οποιαδήποτε* ενδιάμεση ποσότητα. Αυτό δικαιολογεί το ότι δεν ορίζεται συγκεκριμένο αποτέλεσμα για το $(+\infty) - (+\infty)$ και τον χαρακτηρισμό του ως *απροσδιόριστη μορφή*. Επίσης, το γινόμενο μιας πολύ μεγάλης θετικής ποσότητας και μιας πολύ μικρής ποσότητας (θετικής ή αρνητικής) μπορεί να είναι είτε πολύ μεγάλη θετική ποσότητα είτε πολύ μεγάλη αρνητική ποσότητα είτε *οποιαδήποτε*, ακόμη και πολύ μικρή, ενδιάμεση ποσότητα. Αυτό δικαιολογεί το ότι δεν ορίζεται αποτέλεσμα για το $(+\infty)0$ και τον χαρακτηρισμό του, επίσης, ως *απροσδιόριστη μορφή*.

Σύμβολα όπως το a ή το A δηλώνουν, συνήθως, αριθμούς ή σύνολα αριθμών. Αν, όμως, γράψουμε, για παράδειγμα, $a \in (-3, +\infty]$ θα εννοούμε ότι το a μπορεί να πάρει και την τιμή $+\infty$. Και αν γράψουμε $A \subseteq [-\infty, 2]$ θα εννοούμε ότι το σύνολο A μπορεί να περιέχει και το $-\infty$.

Ασκήσεις.

1.1.1. [6] Αν $a \leq x \leq b$ και $a \leq y \leq b$, αποδείξτε ότι $|x - y| \leq b - a$ και διατυπώστε το γεωμετρικό νόημα αυτής της ανισότητας.

1.1.2. Αν $x \leq y < 0$ και $z \leq w < 0$, αποδείξτε ότι $0 < yw \leq xz$. Βασίστε την απόδειξή σας στο ότι: αν $a, b \geq 0$, τότε $ab \geq 0$.

1.1.3. [α] Έστω $b_1, \ldots, b_n > 0$. Αν $l \leq \frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \leq u$, αποδείξτε ότι $l \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n} \leq u$.
[β][7] Έστω $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{N}$. Αν $l \leq y_1, \ldots, y_n \leq u$, αποδείξτε ότι $l \leq \frac{\nu_1 y_1+\cdots+\nu_n y_n}{\nu_1+\cdots+\nu_n} \leq u$.
Γενικότερα, έστω $w_1, \ldots, w_n > 0$ και $w_1 + \cdots + w_n = 1$. Αν $l \leq y_1, \ldots, y_n \leq u$, αποδείξτε ότι $l \leq w_1 y_1 + \cdots + w_n y_n \leq u$.

1.1.4. Για καθεμιά από τις παρακάτω ανισότητες γράψτε στη μορφή ένωσης διαστημάτων το σύνολο των x για τους οποίους η ανισότητα είναι αληθής: $|x+1| > 2$, $|x-1| < |x+1|$, $\frac{x}{x+2} > \frac{x+3}{3x+1}$, $(x-2)^2 \geq 4$, $|x^2 - 7x| > x^2 - 7x$, $\frac{(x-1)(x+4)}{(x-7)(x+5)} > 0$, $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \leq 0$.
Για καθένα από τα επόμενα σύνολα βρείτε *μία* ανισότητα με μεταβλητή x ώστε το σύνολο αυτό να είναι το σύνολο των x για τους οποίους η ανισότητα είναι αληθής: $(-\infty, 3]$, $(2, +\infty)$, $(3, 7)$, $(-\infty, -2) \cup (1, 4) \cup (7, +\infty)$, $[-2, 4] \cup [6, +\infty)$, $[-1, 4) \cup (4, 8]$, $(-\infty, -2] \cup [1, 4) \cup [7, +\infty)$.

1.1.5. Αποδείξτε την ανισότητα του Bernoulli και τον διωνυμικό τύπο του Newton με επαγωγή.

1.2 Supremum και infimum.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. *Έστω μη-κενό σύνολο A.*
Το A χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένο** *αν υπάρχει u με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$. Κάθε u με την ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται* **άνω φράγμα** *του A.*

---

[6] Το περιεχόμενο αυτής της “ανώδυνης” άσκησης είναι πιο χρήσιμο απ’ ό,τι δείχνει.

[7] Η **μέση τιμή** οποιωνδήποτε αριθμών $y_1, \ldots, y_n$, όπου ο κάθε y_k εμφανίζεται ν_k φορές, είναι ο λόγος του συνολικού αθροίσματος των αριθμών προς το συνολικό πλήθος τους, δηλαδή ο αριθμός

$$\frac{\nu_1 y_1+\cdots+\nu_n y_n}{\nu_1+\cdots+\nu_n} = \frac{\nu_1}{\nu_1+\cdots+\nu_n} y_1 + \cdots + \frac{\nu_n}{\nu_1+\cdots+\nu_n} y_n = w_1 y_1 + \cdots + w_n y_n,$$

όπου κάθε $w_k = \frac{\nu_k}{\nu_1+\cdots+\nu_n}$ είναι η **σχετική συχνότητα** ή **σχετικό βάρος** του αντίστοιχου y_k, δηλαδή η αναλογία του αριθμού εμφανίσεων του y_k προς τον συνολικό αριθμό εμφανίσεων των $y_1, \ldots, y_n$. Γενικότερα, αν $w_1, \ldots, w_n > 0$ και $w_1 + \cdots + w_n = 1$, οι αριθμοί $w_1, \ldots, w_n$ ονομάζονται **βάρη** και ο $w_1 y_1 + \cdots + w_n y_n$ ονομάζεται **μέση τιμή** των $y_1, \ldots y_n$ ως προς αυτά τα βάρη.

Το A χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένο** *αν υπάρχει l με την ιδιότητα να ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x \in A$. Κάθε l με την ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται* **κάτω φράγμα** *του A.*

Τέλος, το A χαρακτηρίζεται **φραγμένο** *αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχουν l και u με την ιδιότητα να ισχύει $l \leq x \leq u$ για κάθε $x \in A$.*

Προσέξτε: αν ο u είναι άνω φράγμα του A, τότε κάθε $u' \geq u$ είναι κι αυτός άνω φράγμα του A. Επίσης, αν ο l είναι κάτω φράγμα του A, τότε κάθε $l' \leq l$ είναι κι αυτός κάτω φράγμα του A.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3. [α] *Έστω ότι ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x > a$. Τότε $l \leq a$.*
[β] *Έστω ότι ισχύει $u \geq x$ για κάθε $x < b$. Τότε $u \geq b$.*

Απόδειξη. [α] Υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $a < l$. Θεωρούμε τον αριθμό $x = \frac{a+l}{2}$ για τον οποίο ισχύει $a < x < l$. Υπάρχει, επομένως, αριθμός $x > a$ για τον οποίο δεν ισχύει $l \leq x$. Αυτό είναι, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, άτοπο.

[β] Ομοίως, υποθέτουμε ότι $u < b$. Θεωρούμε τον αριθμό $x = \frac{u+b}{2}$ για τον οποίο ισχύει $u < x < b$. Υπάρχει, επομένως, αριθμός $x < b$ για τον οποίο δεν ισχύει $u \geq x$. Αυτό είναι άτοπο. □

Παράδειγμα 1.2.1. Είναι προφανές ότι κάθε $l \leq a$ είναι κάτω φράγμα καθενός από τα διαστήματα $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$. Αναρωτιόμαστε αν υπάρχουν και άλλοι l οι οποίοι είναι κάτω φράγματα αυτών των διαστημάτων.
Ας δούμε την περίπτωση των διαστημάτων $[a, b]$, $[a, b)$, $[a, +\infty)$. Αν ο l είναι κάτω φράγμα ενός από αυτά τα διαστήματα, τότε πρέπει να ισχύει $l \leq a$, διότι ο a είναι στοιχείο αυτών των διαστημάτων. Άρα τα κάτω φράγματα και των τριών αυτών διαστημάτων είναι οι αριθμοί $l \leq a$ και κανένας άλλος.
Τώρα πάμε στην περίπτωση των διαστημάτων $(a, b]$, (a, b), $(a, +\infty)$. Έστω ότι ο l είναι κάτω φράγμα ενός από αυτά τα διαστήματα. Τώρα ο a δεν είναι στοιχείο κανενός από αυτά τα διαστήματα, οπότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε *αμέσως* ότι $l \leq a$. Και προχωράμε ως εξής. Αρχικά βλέπουμε ότι, όποιο κι αν είναι το διάστημα που έχουμε επιλέξει, ο l είναι αυτομάτως κάτω φράγμα του $(a, +\infty)$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x > a$. Τώρα, όμως, η πρόταση 1.3 λέει ότι $l \leq a$. Άρα τα κάτω φράγματα και των διαστημάτων $(a, b]$, (a, b), $(a, +\infty)$ είναι οι αριθμοί $l \leq a$ και κανένας άλλος.
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι καθένα από τα διαστήματα $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ έχει ένα *μέγιστο* κάτω φράγμα, τον a, και οι αριθμοί $l \leq a$ είναι όλα τα κάτω φράγματά του. Το σύνολο των κάτω φραγμάτων καθενός από αυτά τα διαστήματα είναι το διάστημα $(-\infty, a]$.

Παράδειγμα 1.2.2. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, είναι προφανές ότι κάθε $u \geq b$ είναι άνω φράγμα καθενός από τα διαστήματα $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$. Μπορούμε να αποδείξουμε, με "συμμετρικό" τρόπο, ότι κανένας άλλος αριθμός δεν είναι άνω φράγμα οποιουδήποτε από αυτά τα διαστήματα. Αυτό είναι άμεσο για τα $[a, b]$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$ και είναι πόρισμα της πρότασης 1.3 για τα $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, b)$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι καθένα από αυτά τα διαστήματα έχει ένα *ελάχιστο* άνω φράγμα, τον b, και οι αριθμοί $u \geq b$ είναι όλα τα άνω φράγματά του. Το σύνολο των άνω φραγμάτων καθενός από αυτά τα διαστήματα είναι το διάστημα $[b, +\infty)$.

Παράδειγμα 1.2.3. Τα διαστήματα $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένα και τα διαστήματα $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ δεν είναι κάτω φραγμένα.

Παράδειγμα 1.2.4. Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένο και, επειδή ο 1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του, τα κάτω φράγματα του $\mathbb{N}$ είναι όλοι οι $l \leq 1$ και κανένας άλλος. Δηλαδή, ο 1 είναι το *μέγιστο* κάτω φράγμα του $\mathbb{N}$ και το σύνολο των κάτω φραγμάτων του $\mathbb{N}$ είναι το $(-\infty, 1]$.
Στην επόμενη ενότητα θα αποδείξουμε ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

Στα παραδείγματα 1.2.1, 1.2.2 και 1.2.3 όλα τα σύνολα είναι διαστήματα. Το σύνολο του παραδείγματος 1.2.4 δεν είναι διάστημα. Πρέπει να έχουμε συνεχώς κατά νου ότι υπάρχουν σύνολα τα οποία δεν είναι διαστήματα. Όταν διαβάζουμε κάτι (πρόταση, θεώρημα, άσκηση κ.τ.λ.) το οποίο αναφέρεται σε κάποια σύνολα, δεν πρέπει να επιτρέπουμε στον εαυτό μας να υποθέτει ως δεδομένο ότι τα σύνολα αυτά είναι διαστήματα. Το να σχηματίζουμε την συγκεκριμένη εικόνα διαστήματος για ένα αφηρημένο σύνολο πολλές φορές βοηθά την σκέψη μας, αλλά επίσης πολλές φορές είναι παραπλανητικό και οδηγεί σε εσφαλμένες απλοϊκές "αποδείξεις". Έχοντας αυτήν την παρατήρηση κατά νου, προχωράμε παρακάτω.

Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ SUPREMUM. *Κάθε μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Η *ιδιότητα supremum* είναι η σημαντικότερη και βαθύτερη ιδιότητα του $\mathbb{R}$. Η ιδιότητα αυτή, όπως θα βλέπουμε διαρκώς από εδώ και πέρα, *είναι η βάση για να αποδειχτούν όλα τα σημαντικά αποτελέσματα της Ανάλυσης.*

Δεν θα αποδείξουμε τώρα την ιδιότητα supremum. Η απόδειξή της εντάσσεται στο πλαίσιο της *αξιωματικής θεμελίωσης* του $\mathbb{R}$ και προκύπτει από τον τρόπο με τον οποίο *δημιουργείται* το σύνολο $\mathbb{R}$ από το υποσύνολό του $\mathbb{N}$. Με όλα αυτά τα ζητήματα, δηλαδή την δημιουργία του $\mathbb{R}$ από το $\mathbb{N}$ και την απόδειξη της ιδιότητας supremum, ασχολείται το κεφάλαιο 13.

Τώρα, με βάση την ιδιότητα supremum, θα αποδείξουμε τη "συμμετρική" ιδιότητα infimum. Θα δείτε ότι η απόδειξη βασίζεται σε μια απλή ιδέα: *η "συμμετρία" ως προς τον 0 αντιστρέφει τις ανισοτικές σχέσεις ή, με άλλα λόγια, τα "πάνω" γίνονται "κάτω" και τα "κάτω" γίνονται "πάνω".*

Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ INFIMUM. *Κάθε μη-κενό, κάτω φραγμένο σύνολο έχει μέγιστο κάτω φράγμα.*

Απόδειξη. Έστω μη-κενό, κάτω φραγμένο σύνολο A.
Θεωρούμε το σύνολο
$$-A = \{-x \,|\, x \in A\}.$$
Τα σύνολα A και $-A$ είναι "συμμετρικά" ως προς τον 0. Δηλαδή, τα στοιχεία του ενός συνόλου είναι τα αντίθετα των στοιχείων του άλλου συνόλου.
Το A είναι μη-κενό, οπότε και το $-A$ είναι μη-κενό.
Επίσης, αν l είναι ένα οποιοδήποτε κάτω φράγμα του A, τότε ο $-l$ είναι άνω φράγμα του $-A$, οπότε το $-A$ είναι άνω φραγμένο.
Επειδή, λοιπόν, το $-A$ είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, από την ιδιότητα supremum συνεπάγεται ότι έχει ελάχιστο άνω φράγμα και έστω u_0 το ελάχιστο άνω φράγμα του $-A$.
Επειδή ο u_0 είναι άνω φράγμα του $-A$, ο $-u_0$ είναι κάτω φράγμα του A.
Αν υπήρχε κάτω φράγμα l του A μεγαλύτερο του $-u_0$, τότε το $-l$ θα ήταν άνω φράγμα του $-A$ μικρότερο του u_0. Αυτό είναι άτοπο διότι ο u_0 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $-A$. Άρα δεν υπάρχει κάτω φράγμα l του A μεγαλύτερο του $-u_0$.
Άρα ο $-u_0$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3. *Το* **μέγιστο κάτω φράγμα** *ενός μη-κενού και κάτω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται και* **infimum** *του A.*

Το **ελάχιστο άνω φράγμα** *ενός μη-κενού και άνω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται και* **supremum** *του A.*

Το infimum και το supremum του A συμβολίζονται, αντιστοίχως,

$$\inf A \quad \text{ή} \quad \text{g.l.b.}\, A \qquad\qquad \sup A \quad \text{ή} \quad \text{l.u.b.}\, A.$$

Παράδειγμα 1.2.5. Όπως είδαμε στα παραδείγματα 1.2.1 και 1.2.2, όλα τα διαστήματα $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ έχουν το ίδιο supremum, τον b, και όλα τα διαστήματα $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ έχουν το ίδιο infimum, τον a.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4. *Αν το σύνολο A έχει ελάχιστο ή μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό ονομάζεται, αντιστοίχως, και* **minimum** *ή* **maximum** *του A.*

Το minimum και το maximum του A συμβολίζονται, αντιστοίχως,

$$\min A \qquad \max A.$$

Από τα διαστήματα $[a, b]$ και $[a, b)$ καταλαβαίνουμε ότι κάποια μη-κενά, άνω φραγμένα σύνολα έχουν maximum και κάποια άλλα δεν έχουν maximum. Πάντως, κάθε μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει οπωσδήποτε supremum.

Παράδειγμα 1.2.6. Αν ένα σύνολο A έχει maximum, τότε $\sup A = \max A$, δηλαδή το supremum του A ταυτίζεται με το maximum του A.
Πράγματι, κάθε στοιχείο του A είναι μικρότερο ή ίσο του $\max A$, οπότε το $\max A$ είναι άνω φράγμα του A. Επίσης, επειδή το $\max A$ είναι *στοιχείο* του A δεν μπορεί να υπάρχει άνω φράγμα του A μικρότερο του $\max A$. Άρα το $\max A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν ένα σύνολο A έχει minimum, τότε $\inf A = \min A$, δηλαδή το infimum του A ταυτίζεται με το minimum του A.
Το $A = \{0\} \cup [2, 3] \cup \{4\}$ έχει $\min A = 0$ και $\max A = 4$. Άρα $\inf A = 0$ και $\sup A = 4$.

Παράδειγμα 1.2.7. $\min \mathbb{N} = 1$, οπότε $\inf \mathbb{N} = 1$. Όμως, το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο: κανένας $n \in \mathbb{N}$ δεν μπορεί να είναι μέγιστο στοιχείο του $\mathbb{N}$ διότι ο $n + 1 \in \mathbb{N}$ είναι μεγαλύτερος του n.
Βέβαια, το ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο δεν σημαίνει ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει άνω φράγμα και κατ' επέκταση supremum. Το ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο σημαίνει ότι δεν έχει άνω φράγμα το οποίο να είναι συγχρόνως και στοιχείο του. Θα μπορούσε, όμως, το $\mathbb{N}$ να έχει άνω φράγμα κάποιον μη-φυσικό αριθμό. Αυτό θα το ξεκαθαρίσουμε στην επόμενη ενότητα.

Παράδειγμα 1.2.8. Το $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ έχει $\max A = 1$, οπότε $\sup A = 1$. Τώρα, το A *δεν έχει* ελάχιστο στοιχείο: κανένας $\frac{1}{n} \in A$ δεν είναι ελάχιστο στοιχείο του A διότι ο $\frac{1}{n+1} \in A$ είναι μικρότερος του $\frac{1}{n}$. Όμως, επειδή το A είναι κάτω φραγμένο με κάτω φράγμα, για παράδειγμα, τον 0, το A *έχει* infimum. Θα υπολογίσουμε το $\inf A$ στην επόμενη ενότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5. *Αν το μη-κενό σύνολο A δεν είναι κάτω φραγμένο, ορίζουμε* $\inf A = -\infty$.
Αν το μη-κενό σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, ορίζουμε $\sup A = +\infty$.

Αιτιολογούμε (προσέξτε: *δεν αποδεικνύουμε*) τον ορισμό. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, δεν έχει ως άνω φράγμα κανέναν *αριθμό*. Όμως, το $+\infty$ συμβολίζει μια "ποσότητα" μεγαλύτερη από κάθε αριθμό, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως το μοναδικό, και, επομένως, το ελάχιστο, "άνω φράγμα" του A.

Παρατηρήστε ότι *κάθε μη-κενό σύνολο A έχει supremum και infimum*. Αν το A είναι άνω φραγμένο, το supremum του είναι αριθμός και, αν δεν είναι άνω φραγμένο, το supremum του είναι $+\infty$. Ομοίως, αν το A είναι κάτω φραγμένο, το infimum του είναι αριθμός και, αν δεν είναι κάτω φραγμένο, το infimum του είναι $-\infty$. Επίσης, για κάθε μη-κενό σύνολο A ισχύει

$$\inf A \leq \sup A.$$

Πράγματι, για κάθε $x \in A$ ισχύει $\inf A \leq x$ και $x \leq \sup A$ επειδή, ακριβώς, το $\inf A$ είναι κάτω φράγμα του A και το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A.

Γενικά, όταν γράφουμε $\sup A$, χωρίς άλλη ιδιαίτερη διευκρίνηση, θα εννοούμε ότι αυτό είναι αριθμός ή $+\infty$. Επίσης, όταν γράφουμε $\inf A$ θα εννοούμε ότι αυτό είναι αριθμός ή $-\infty$.

Τα επόμενα θα μας βοηθήσουν να σχηματίσουμε καλύτερη "εικόνα" των ποσοτήτων $\sup A$ και $\inf A$. Δείτε το σχήμα 1.

Το $\sup A$ χαρακτηρίζεται από τις εξής δύο ιδιότητες (i) και (ii):

(i) *Δεν υπάρχει κανένα στοιχείο του A μεγαλύτερο του* $\sup A$.

Αυτό είναι προφανές στην περίπτωση που είναι $\sup A = +\infty$ και, αν το $\sup A$ είναι αριθμός, αυτό προκύπτει από το ότι το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A.
Η ιδιότητα (i) διατυπώνεται, ισοδύναμα, ως εξής:

$$\text{Για κάθε } x \in A \text{ ισχύει } x \leq \sup A.$$

(ii) *Όσο θέλουμε κοντά στο* $\sup A$ *υπάρχει στοιχείο του A.*

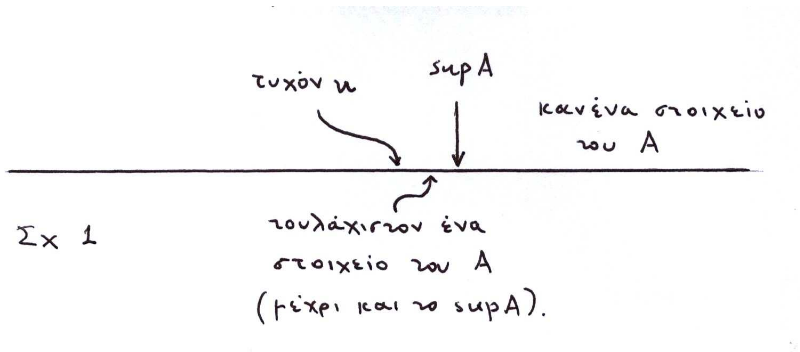
Πράγματι, στην περίπτωση $\sup A = +\infty$ πάρτε οποιονδήποτε αριθμό u, όσο μεγάλο θέλετε. Τότε ο u δεν είναι άνω φράγμα του A (διότι το A δεν είναι άνω φραγμένο), οπότε υπάρχει $x \in A$ ώστε $u < x$. Άρα όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ υπάρχει στοιχείο του A.
Στην περίπτωση που το $\sup A$ είναι αριθμός πάρτε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, όσο μικρό θέλετε. Τότε ο $\sup A - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A (διότι ο $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A), οπότε υπάρχει $x \in A$ ώστε $\sup A - \epsilon < x$ και, επομένως (λόγω του (i)),

$$\sup A - \epsilon < x \leq \sup A.$$

Άρα υπάρχει x στο A, του οποίου η απόσταση από τον $\sup A$ είναι μικρότερη από τον προεπιλεγμένο ϵ. Άρα όσο θέλουμε κοντά στον $\sup A$ υπάρχει στοιχείο του A.
Η ιδιότητα (ii) διατυπώνεται, ισοδύναμα, ως εξής:

Για κάθε $u < \sup A$ υπάρχει $x \in A$ ώστε να ισχύει $u < x \leq \sup A$.

Γιατί λέμε ότι οι ιδιότητες (i) και (ii) *χαρακτηρίζουν* το supremum του συνόλου A; Το λέμε διότι, όπως είδαμε, το $\sup A$ έχει αυτές τις ιδιότητες, αλλά και, *αντιστρόφως*, αν έχουμε κάποιο στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$ με αυτές τις δύο ιδιότητες, τότε το στοιχείο αυτό είναι αναγκαστικά το $\sup A$. Πράγματι, έστω ότι ο αριθμός u έχει τις ιδιότητες (i) και (ii). Η ιδιότητα (i) του u (*Δεν υπάρχει κανένα στοιχείο του A μεγαλύτερο του u.*) λέει, προφανώς, ότι ο u είναι άνω φράγμα του A. Η ιδιότητα (ii) του u (*Όσο θέλουμε κοντά στον u υπάρχει στοιχείο του A.*) λέει ότι δεν υπάρχει άνω φράγμα του A μικρότερο από τον u. Διότι, αν υπήρχε $u' < u$ ο οποίος είναι άνω φράγμα του A, τότε στο διάστημα ανάμεσα στους u' και u δεν θα υπήρχε κανένα στοιχείο του A και άρα ο u δεν θα είχε την ιδιότητα (ii). Στην περίπτωση που το $u = +\infty$ έχει τις ιδιότητες (i) και (ii), τότε πάλι η ιδιότητα (ii) του $+\infty$ λέει ότι το A δεν έχει κανένα άνω φράγμα και άρα δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup A = +\infty$.



Ομοίως, το $\inf A$ χαρακτηρίζεται από τις εξής δύο ιδιότητες (i) και (ii):
(i) *Δεν υπάρχει κανένα στοιχείο του A μικρότερο του* $\inf A$.

Για κάθε $x \in A$ ισχύει $\inf A \leq x$.

(ii) *Όσο θέλουμε κοντά στο* $\inf A$ *υπάρχει στοιχείο του* A.

Για κάθε $l > \inf A$ υπάρχει $x \in A$ ώστε να ισχύει $\inf A \leq x < l$.

Τώρα θα δούμε μια λίγο απρόσμενη εφαρμογή της ύπαρξης των supremum και infimum ενός συνόλου.

Έστω ότι το σύνολο A είναι οποιοδήποτε *διάστημα*. Γνωρίζουμε ότι το A έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε x ώστε $x_1 < x < x_2$ ισχύει $x \in A$. Με άλλα λόγια: *ένα διάστημα περιέχει κάθε στοιχείο που είναι ανάμεσα σε δύο στοιχεία του*. Η πρόταση 1.4 λέει ότι, από τα μη-κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει τα διαστήματα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4. *Έστω μη-κενό σύνολο A με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε x με $x_1 < x < x_2$ ισχύει $x \in A$. Τότε το A είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Έστω

$$u = \sup A, \qquad l = \inf A,$$

οπότε $-\infty \leq l \leq u \leq +\infty$. Τότε, προφανώς, $A \subseteq [l, u]$.
Έστω $x \in (l, u)$. Τότε ο x δεν είναι κάτω φράγμα ούτε άνω φράγμα του A, οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x < x_2$. Βάσει της υπόθεσης, συνεπάγεται $x \in A$. Επομένως, $(l, u) \subseteq A$.
Από τη διπλή σχέση $(l, u) \subseteq A \subseteq [l, u]$ προκύπτουν ακριβώς τέσσερις περιπτώσεις:

$$A = (l, u) \quad \text{ή} \quad A = [l, u] \quad \text{ή} \quad A = (l, u] \quad \text{ή} \quad A = [l, u).$$

Σε κάθε περίπτωση το A είναι διάστημα και, μάλιστα, με άκρα τα $\inf A$ και $\sup A$. □

Ασκήσεις.

1.2.1. Αποδείξτε ότι $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ και $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

1.2.2. Αποδείξτε ότι το διάστημα $(a, +\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένο και ότι το $[a, b)$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

1.2.3. Αν ισχύει $l \leq a + \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, αποδείξτε ότι $l \leq a$.
Αν ισχύει $|a - b| \leq \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, αποδείξτε ότι $a = b$.

1.2.4. Αν ισχύει $a \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ για κάθε ϵ με $0 < \epsilon < 1$, αποδείξτε ότι $a \leq 0$.

1.2.5. Έστω $\inf A = \inf B$ και $\sup A = \sup B$. Συνεπάγεται $A = B$;

1.2.6. Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι το κλειστό διάστημα $[\inf A, \sup A]$ είναι το *ελάχιστο* κλειστό διάστημα στο $\overline{\mathbb{R}}$ το οποίο περιέχει το A.

1.2.7. Υπάρχει *ελάχιστο* ανοικτό διάστημα το οποίο να περιέχει ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

1.2.8. Έστω μη-κενό σύνολο A. Περιγράψτε (με τύπο) συναρτήσει του $\sup A$ το σύνολο των άνω φραγμάτων του A, διακρίνοντας τις περιπτώσεις: $\sup A = +\infty$ και $\sup A < +\infty$. Κάντε το ίδιο σε σχέση με το σύνολο των κάτω φραγμάτων του A και με το $\inf A$.

1.2.9. Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι $\sup A \in A$ αν και μόνο αν το A έχει μέγιστο στοιχείο. Κάντε το ίδιο για το $\inf A$ και για το ελάχιστο στοιχείο του A.

1.2.10. Έχοντας υπ' όψη και τα παραδείγματα $A = [0, 2]$, $A = [0, 2)$, $A = [0, 1] \cup \{2\}$, απαντήστε, γενικά, για ένα μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο A και για τον $u = \sup A$ στα εξής ερωτήματα:
Είναι σωστό ότι ισχύει $A \cap (u - \epsilon, u] \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$;
Είναι σωστό ότι ισχύει $A \cap (u - \epsilon, u) \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$;
Ποιά είναι η απάντηση στα προηγούμενα ερωτήματα αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι $u \notin A$;
Προσαρμόστε όλα τα προηγούμενα στην περίπτωση του $l = \inf A$.

1.2.11. Έστω μη-κενό σύνολο A και αριθμός u.
Αποδείξτε ότι $\sup A \leq u$ αν και μόνο αν ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$.
Αποδείξτε ότι $u \leq \sup A$ αν και μόνο αν για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$.
Προσαρμόστε όλα τα προηγούμενα για το $\inf A$ και αριθμό l.

1.2.12. Έστω μη-κενά σύνολα A, B.

[α] Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$ αν και μόνο αν ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.

[β] Πρώτον, μερικά παραδείγματα.
Δείτε ότι τα σύνολα $A = (-\infty, 0], B = [0, +\infty)$ έχουν την ιδιότητα να ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Κατόπιν, βρείτε το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.
Κάντε το ίδιο για τα $A = (-\infty, 0]$, $B = (0, +\infty)$, για τα $A = (-4, -2)$, $B = (-2, +\infty)$ και για τα $A = (-\infty, 0)$, $B = [1, 13]$.
Τώρα, γενικά, έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Περιγράψτε (με τύπο) συναρτήσει των $\sup A$, $\inf B$ το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.

[γ] Έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$ ώστε $y - x \leq \epsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$ και ότι υπάρχει *μοναδικός* ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Ποιός είναι αυτός ο ξ;

[δ] Έστω ότι ισχύει $0 < x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$ ώστε $\frac{y}{x} \leq 1 + \epsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$ και ότι υπάρχει ακριβώς ένας ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.

1.2.13. Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \cup B = \mathbb{R}$ και ώστε να ισχύει $x < y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Παρατηρήστε ότι τα A, B είναι συμπληρωματικά και ότι το A είναι αριστερά του B. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε είτε $A = (-\infty, \xi)$, $B = [\xi, +\infty)$ είτε $A = (-\infty, \xi]$, $B = (\xi, +\infty)$.

1.2.14. Έστω μη-κενά σύνολα A, B. Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ και κάθε $\gamma < x$ υπάρχει $y \in B$ ώστε $y > \gamma$.

1.2.15. Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

1.2.16. [α] Έστω μη-κενά σύνολα A, B.
Αποδείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ και $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.
Αν, επιπλέον, το $A \cap B$ δεν είναι κενό, αποδείξτε ότι $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ και ότι $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$.
Ισχύει πάντοτε ότι $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$ ή ότι $\inf(A \cap B) = \max\{\inf A, \inf B\}$;

[β] Για το μη-κενό σύνολο A ορίζουμε $-A = \{-x \,|\, x \in A\}$.
Αποδείξτε ότι $\sup(-A) = -\inf A$ και $\inf(-A) = -\sup A$.

[γ] Για μη-κενά σύνολα A, B ορίζουμε $A + B = \{x + y \,|\, x \in A, y \in B\}$.
Ποιό είναι το $A + B$ αν $A = [3, 5]$, $B = [1, 7]$ καθώς και αν $A = (3, 5)$, $B = (1, 7)$;
Αποδείξτε ότι $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ και $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

[δ] Για μη-κενά σύνολα A, B ορίζουμε $A \cdot B = \{xy \,|\, x \in A, y \in B\}$.
Ποιό είναι το $A \cdot B$ αν $A = [3, 5]$, $B = [1, 7]$, αν $A = (3, 5)$, $B = (1, 7)$ αλλά και αν $A = (-1, 5)$, $B = (-2, 7)$;
Αν $A, B \subseteq (0, +\infty)$, αποδείξτε ότι $\inf(A \cdot B) = \inf A \inf B$ και $\sup(A \cdot B) = \sup A \sup B$.

1.2.17. Ποιά πιστεύετε ότι είναι τα κάτω φράγματα και τα άνω φράγματα του $\emptyset$; Επομένως, πώς θα ορίζατε τα $\inf \emptyset$, $\sup \emptyset$; Θα ίσχυε τότε η ανισότητα $\inf \emptyset \leq \sup \emptyset$;

1.2.18. [8] [α] Έστω συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο $[a, b]$. Αν $f(a) > a$ και $f(b) < b$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

[β] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι για κάθε $x \in I$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$ για κάθε $x', x'' \in (x - \delta, x + \delta) \cap I$ με $x' \leq x \leq x''$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I.

[8] Αυτήν την άσκηση θα τήν ξαναδούμε ως άσκηση 2.4.16.

1.3 Άμεσα πορίσματα της Ιδιότητας Supremum.

Ξαναδείτε τα παραδείγματα 1.2.4 και 1.2.7.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1. *Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο και, επομένως,* $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο, οπότε το $\sup \mathbb{N}$ είναι αριθμός.
Ο αριθμός $\sup \mathbb{N} - 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, οπότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\sup \mathbb{N} - 1 < n$. Συνεπάγεται $\sup \mathbb{N} < n + 1$ και καταλήγουμε σε άτοπο, διότι $n + 1 \in \mathbb{N}$. $\square$

Το θεώρημα 1.1 συνεπάγεται το εξής:

Η ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ. *Αν $l > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \frac{1}{n} < l$.*

Πράγματι, αν $l > 0$, θεωρούμε τον αριθμό $\frac{1}{l}$ και, επειδή το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{l} < n$ ή, ισοδύναμα, $0 < \frac{1}{n} < l$.

Παράδειγμα 1.3.1. Ξαναδείτε το παράδειγμα 1.2.8.
Το σύνολο $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ έχει $\inf A = 0$.
Πράγματι, αφ' ενός ο 0 είναι κάτω φράγμα του A αφ' ετέρου από την Αρχιμήδεια ιδιότητα προκύπτει ότι κανένας $l > 0$ δεν είναι κάτω φράγμα του A. Επομένως, το μέγιστο κάτω φράγμα του A είναι ο 0.

Η πρόταση 1.5 λέει ότι *κάθε αριθμός είναι ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς ακεραίους.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5. *Για κάθε x υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \leq x < k + 1$.*

Απόδειξη. Έστω αριθμός x.
Σύμφωνα με το θεώρημα 1.1 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > x$ και υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $m > -x$. Θέτουμε $l = -m$, οπότε οι l, n είναι ακέραιοι και

$$l < x < n.$$

Ας θεωρήσουμε ότι ισχύει η επαγωγική υπόθεση:

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αν ισχύει η ανισότητα $k \leq x$, τότε ισχύει και η ανισότητα $k + 1 \leq x$.

Τότε από την αρχή της επαγωγής και από το ότι η ανισότητα $k \leq x$ ισχύει για $k = l$, συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα $k \leq x$ ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $k \geq l$. Αυτό, όμως, δεν είναι σωστό διότι η ανισότητα $k \leq x$ δεν ισχύει για τον $k = n$.
Επομένως, η αρχική επαγωγική υπόθεση δεν είναι σωστή, οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \leq x$ και $k + 1 > x$, δηλαδή ώστε $k \leq x < k + 1$.
Τώρα θα δούμε ότι ο ακέραιος k με την ιδιότητα $k \leq x < k + 1$ είναι μοναδικός.
Έστω $k \leq x < k+1$ και $k' \leq x < k' + 1$ για κάποιους $k, k' \in \mathbb{Z}$. Τότε $k < k' + 1$ και $k' < k + 1$, οπότε $-1 < k' - k < 1$. Επειδή $k' - k \in \mathbb{Z}$, συνεπάγεται $k' - k = 0$, οπότε $k' = k$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6. *Ο $k \in \mathbb{Z}$ για τον οποίο ισχύει $k \leq x < k + 1$, η ύπαρξη και η μοναδικότητα του οποίου εξασφαλίζεται από την πρόταση 1.5, ονομάζεται* **ακέραιο μέρος** *του x και συμβολίζεται $[x]$.*

Δηλαδή,

$$[x] \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad [x] \leq x < [x] + 1.$$

Παράδειγμα 1.3.2. $[3] = 3$, $[-3] = -3$, $[3.5] = 3$, $[-3.5] = -4$.

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει ότι *κάθε ανοικτό διάστημα, οσοδήποτε μικρό, περιέχει τουλάχιστον έναν ρητό*. Η ιδιότητα αυτή των ρητών, δηλαδή το να περιέχει οποιοδήποτε δοσμένο ανοικτό διάστημα κάποιον από αυτούς, ονομάζεται *πυκνότητα των ρητών* (*στο* $\mathbb{R}$) ή *πυκνότητα του* $\mathbb{Q}$ (*στο* $\mathbb{R}$). Λίγο πιο μετά θα δούμε ότι την ίδια ιδιότητα έχουν και οι άρρητοι.

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ. *Για κάθε* a, b *με* $a < b$ *υπάρχει ρητός* r *ώστε* $a < r < b$.

Απόδειξη. Επειδή $b - a > 0$, συνεπάγεται, σύμφωνα με την Αρχιμήδεια ιδιότητα, ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < b - a$. Επομένως, $na + 1 < nb$, οπότε

$$na < [na] + 1 \leq na + 1 < nb.$$

Τότε για τον ρητό $r = \frac{[na]+1}{n}$ ισχύει $a < r < b$. □

Ασκήσεις.

1.3.1. Ξαναδείτε την άσκηση 1.2.3.
Αν ισχύει $l \leq a + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $l \leq a$.
Αν ισχύει $|a - b| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $a = b$.

1.3.2. Βρείτε τα infimum και supremum των συνόλων $\{(-1)^n n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{(-1)^n - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 - \frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[2n-1, 2n]$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$.

1.3.3. Βρείτε το infimum και το supremum του $(a, b) \cap \mathbb{Q} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, a < r < b\}$.

1.3.4. Ξαναδείτε την άσκηση 1.2.12.
Τα σύνολα $A = \{-\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ικανοποιούν την υπόθεση ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Βρείτε το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Κάντε το ίδιο για τα $A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < 0\}$, $B = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > 0\}$.

1.3.5. Αν ισχύει $r \geq a$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r > b$, αποδείξτε ότι $b \geq a$.
Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < b\}$, αποδείξτε ότι $a = b$.
Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\} \cap \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > b\} = \emptyset$, αποδείξτε ότι $a \leq b$.
Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \leq a\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \geq b\} = \mathbb{Q}$, αποδείξτε ότι $b \leq a$.

1.4 Ρίζες, δυνάμεις, λογάριθμοι.

Υπενθυμίζουμε τους ορισμούς των δυνάμεων με *ακέραιο* εκθέτη.
Αν $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ (δηλαδή, αν $n \in \mathbb{N}$), ορίζουμε τη δύναμη a^n με τον γνωστό τρόπο:

$$a^n = a \cdots a \quad (n \text{ φορές}).$$

Αν $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$ και $a \neq 0$, ορίζουμε:

$$a^n = \frac{1}{a \cdots a \ (-n \text{ φορές})}.$$

Τέλος, αν $n = 0$ και $a \neq 0$, ορίζουμε:

$$a^0 = 1.$$

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες εκτίθενται στην άσκηση 1.4.3 και όλες έχουν απλές αλγεβρικές αποδείξεις γνωστές από το λύκειο. Το μοναδικό ουσιαστικό στοιχείο αυτών των αποδείξεων είναι το σωστό μέτρημα των παραγόντων των διαφόρων γινομένων. Θα τις θεωρήσουμε γνωστές.

1.4.1 Ρίζες.

Όμως, δεν θα θεωρήσουμε γνωστές τις δυνάμεις με μη-ακέραιους εκθέτες και, ειδικώτερα, τις ρίζες παρά το ότι στο λύκειο μαθαίνουμε να χειριζόμαστε αλγεβρικά όλες αυτές τις παραστάσεις. Ο λόγος είναι ότι στον ορισμό τους παίζει ουσιαστικό ρόλο η ιδιότητα supremum.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Για κάθε $y \geq 0$ υπάρχει μοναδικός $x \geq 0$ ώστε $x^n = y$.*

Απόδειξη. [9] Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και $y \geq 0$.
Θεωρούμε το σύνολο
$$X = \{x \,|\, x \geq 0, x^n \leq y\}.$$
Πρώτον, είναι προφανές ότι $0 \in X$, οπότε το X είναι μη-κενό. Κατόπιν, από το $y+1 \geq 1$ συνεπάγεται $(y+1)^n \geq y+1 > y$. Άρα για κάθε $x \in X$ ισχύει $x^n \leq y < (y+1)^n$ και, επομένως, $x < y+1$. Άρα το X είναι άνω φραγμένο με άνω φράγμα τον $y+1$.
Επειδή το X είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, το $\sup X$ είναι αριθμός. Θέτουμε
$$\xi = \sup X.$$
Προφανώς, $\xi \geq 0$, διότι $0 \in X$. Θα αποδείξουμε ότι $\xi^n = y$.
Έστω $\xi^n < y$. Τότε $\frac{y-\xi^n}{n(\xi+1)^{n-1}} > 0$ και θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\epsilon \leq 1$ και $\epsilon \leq \frac{y-\xi^n}{n(\xi+1)^{n-1}}$. Από την ανισότητα (1.2) συνεπάγεται
$$(\xi+\epsilon)^n - \xi^n \leq n(\xi+\epsilon)^{n-1}\big((\xi+\epsilon)-\xi\big) = n(\xi+\epsilon)^{n-1}\epsilon \leq n(\xi+1)^{n-1}\epsilon \leq y-\xi^n.$$
Άρα $(\xi+\epsilon)^n \leq y$, οπότε $\xi+\epsilon \in X$. Άτοπο, διότι ο ξ είναι άνω φράγμα του X. Άρα $\xi^n \geq y$.
Έστω $\xi^n > y$. Τότε $\frac{\xi^n-y}{n\xi^{n-1}} > 0$ και θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\epsilon \leq \frac{\xi^n-y}{n\xi^{n-1}}$. Με λίγες πράξεις βλέπουμε ότι συνεπάγεται $\epsilon \leq \xi$ και, πάλι από την ανισότητα (1.2), συνεπάγεται
$$\xi^n - (\xi-\epsilon)^n \leq n\xi^{n-1}\big(\xi-(\xi-\epsilon)\big) = n\xi^{n-1}\epsilon \leq \xi^n - y.$$
Άρα $y \leq (\xi-\epsilon)^n$. Άρα για κάθε $x \in X$ ισχύει $x^n \leq y \leq (\xi-\epsilon)^n$ και, επομένως, $x \leq \xi-\epsilon$. Άρα ο $\xi-\epsilon$ είναι άνω φράγμα του X. Αυτό είναι άτοπο, διότι ο ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του X. Άρα $\xi^n \leq y$.
Από τις ανισότητες $\xi^n \geq y$ και $\xi^n \leq y$ συνεπάγεται $\xi^n = y$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, την ύπαρξη μη-αρνητικής λύσης της $x^n = y$ στη γενική περίπτωση $y \geq 0$.
Μένει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της μη-αρνητικής λύσης της $x^n = y$. Αυτό είναι εύκολο: αν $\xi_1, \xi_2 \geq 0$, ${\xi_1}^n = y$ και ${\xi_2}^n = y$, τότε ${\xi_1}^n = {\xi_2}^n$, οπότε $\xi_1 = \xi_2$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Για κάθε $y \geq 0$, η μη-αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = y$, την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της οποίας εξασφαλίζει το θεώρημα 1.2, ονομάζεται n-**οστή ρίζα** του y και συμβολίζεται*
$$\sqrt[n]{y}.$$
Αν $n = 2$, τότε η $\sqrt[2]{y}$ συμβολίζεται και $\sqrt{y}$.

Τονίζουμε ότι η *$\sqrt[n]{y}$ ορίζεται μόνο για μη-αρνητικούς αριθμούς y.* Επίσης, είναι σαφές από τον ορισμό της n-οστής ρίζας (ως μη-αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = y$) ότι $\sqrt[n]{0} = 0$ και ότι ισχύει $\sqrt[n]{y} > 0$ για κάθε $y > 0$.

Τώρα, θεωρώντας δεδομένη την ύπαρξη μοναδικής μη-αρνητικής λύσης της εξίσωσης $x^n = y$ για $y \geq 0$, θεωρούμε γνωστά από το λύκειο τα εξής. Αν ο n είναι άρτιος, τότε η εξίσωση $x^n = y$ έχει (i) ακριβώς δύο λύσεις, τους $\sqrt[n]{y}$ και $-\sqrt[n]{y}$, αν $y > 0$, (ii) ακριβώς μία λύση, τον 0, αν $y = 0$, και (iii) καμία λύση, αν $y < 0$. Αν ο n είναι περιττός, τότε η εξίσωση $x^n = y$ έχει (i) ακριβώς

[9] Αργότερα, στο παράδειγμα 4.4.20 θα ξανααποδείξουμε την ύπαρξη της n-οστής ρίζας $\sqrt[n]{y}$ ενός οποιουδήποτε μη-αρνητικού αριθμού y. Άλλη μία απόδειξη υπάρχει στην άσκηση 2.4.12.

μία λύση, τον $\sqrt[n]{y}$, αν $y > 0$, (ii) ακριβώς μία λύση, τον 0, αν $y = 0$, και (iii) ακριβώς μία λύση, τον $-\sqrt[n]{-y}$, αν $y < 0$. Όλα αυτά αποδεικνύονται πολύ εύκολα.

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να συνειδητοποιήσουμε το εξής. *Στο λύκειο δεν αποδεικνύεται η ύπαρξη των ριζών* $\sqrt[n]{y}$. Ο λόγος είναι ότι στο λύκειο δεν μαθαίνουμε τίποτα για την βάση αυτής της απόδειξης, δηλαδή την ιδιότητα supremum. Στο λύκειο απλώς *δεχόμαστε* ότι οι ρίζες υπάρχουν και απλώς μαθαίνουμε να χειριζόμαστε αλγεβρικά αυτούς τους αριθμούς. Όποιος επιθυμεί μπορεί να δει την άσκηση 1.4.4 και να αποδείξει εύκολα, με αλγεβρικό τρόπο, τις βασικές ιδιότητες των ριζών. Στα παρακάτω αυτές τις ιδιότητες θα τις θεωρούμε γνωστές.

Το θεώρημα 1.2 μπορεί να "διαβαστεί" και με άλλο τρόπο. Γνωρίζουμε ότι, αν $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση με τύπο x^n είναι γνησίως αύξουσα (και, επομένως, ένα-προς-ένα) στο $[0, +\infty)$ και έχει τιμές στο $[0, +\infty)$. Αυτά είναι στοιχειώδη. Το θεώρημα 1.2 λέει ότι η συνάρτηση x^n με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ είναι και *επί* του $[0, +\infty)$. Δηλαδή, η $y = x^n$ εκφράζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο πεδίο ορισμού της, το $[0, +\infty)$, και στο σύνολο τιμών της, το $[0, +\infty)$. Τώρα, σύμφωνα με τον ορισμό των ριζών, η $x = \sqrt[n]{y}$ εκφράζει την αντίστροφη αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Δηλαδή, οι συναρτήσεις $y = x^n$ (περιορισμένη στο $[0, +\infty)$) και $x = \sqrt[n]{y}$ είναι αντίστροφες. Και, επειδή η $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα, η $x = \sqrt[n]{y}$ είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα.

Ας δούμε τώρα ένα χρήσιμο - και βαθύ - κριτήριο για το αν μια ρίζα είναι ρητός ή άρρητος. Το περιλαμβάνουμε αν και η απόδειξή του είναι καθαρά αλγεβρικής φύσης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6. *Έστω φυσικοί n, k. Τότε ο $\sqrt[n]{k}$ είναι ρητός αν και μόνο αν ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού. Με άλλα λόγια, αν ο $\sqrt[n]{k}$ είναι ρητός, τότε είναι φυσικός.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού, δηλαδή ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $k = m^n$. Τότε ο $\sqrt[n]{k} = m$ είναι φυσικός και, επομένως, ρητός.
Αντιστρόφως, έστω ότι ο $\sqrt[n]{k}$ είναι ρητός, δηλαδή $\sqrt[n]{k} = \frac{m}{l}$, όπου $m, l \in \mathbb{N}$. Κάνοντας απλοποίηση, αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι m, l δεν έχουν κοινό διαιρέτη > 1.
Από την $\sqrt[n]{k} = \frac{m}{l}$ συνεπάγεται $l^n k = m^n$. Γνωρίζουμε ότι, αν ένας φυσικός διαιρεί το γινόμενο δύο φυσικών και δεν έχει κοινούς διαιρέτες > 1 με έναν από τους δύο αριθμούς, τότε διαιρεί τον άλλον. Τώρα, ο l διαιρεί τον $l^n k$, οπότε διαιρεί τον $m^n = m^{n-1}m$. Επειδή ο l δεν έχει κοινούς διαιρέτες > 1 με τον m, ο l διαιρεί τον $m^{n-1} = m^{n-2}m$. Για το ίδιο λόγο, ο l διαιρεί τον $m^{n-2} = m^{n-3}m$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, καταλήγουμε στο ότι ο l διαιρεί τον $m^0 = 1$. Άρα $l = 1$, οπότε $k = m^n$ και ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού. □

Τώρα θα δούμε, επιτέλους, ότι το $\mathbb{R}$ δεν αποτελείται μόνο από ρητούς.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7. *Το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι κενό.*

Απόδειξη. Επειδή, προφανώς, ο 2 δεν είναι τετράγωνο φυσικού, από την πρόταση 1.6 συνεπάγεται ότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός. □

Παρατηρήστε ότι η ύπαρξη έστω και ενός αρρήτου βασίζεται στο θεώρημα 1.2 του οποίου η απόδειξη βασίζεται, με τη σειρά της, στην ιδιότητα supremum.

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει ότι *κάθε ανοικτό διάστημα, οσοδήποτε μικρό, περιέχει τουλάχιστον έναν άρρητο*. Η ιδιότητα αυτή των αρρήτων ονομάζεται *πυκνότητα των αρρήτων* (*στο* $\mathbb{R}$) ή *πυκνότητα του* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (*στο* $\mathbb{R}$).

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ. *Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει άρρητος x ώστε $a < x < b$.*

Απόδειξη. Έστω $a < b$.
Θεωρούμε οποιονδήποτε *άρρητο* c, για παράδειγμα τον $c = \sqrt{2}$. Επειδή $a - c < b - c$, υπάρχει ρητός r ώστε $a - c < r < b - c$. Τότε ο $r + c$ είναι άρρητος και $a < r + c < b$. □

1.4.2 Δυνάμεις με ρητούς μη-ακέραιους εκθέτες.

Τώρα θα ασχοληθούμε για λίγο με τον ορισμό των δυνάμεων με μη-ακέραιο εκθέτη αρχίζοντας με την περίπτωση *ρητού μη-ακέραιου* εκθέτη.

ΛΗΜΜΑ 1.1. *Έστω $y > 0$, $m, k \in \mathbb{Z}$, $n, l \in \mathbb{N}$, $n, l \geq 2$ ώστε $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$. Τότε $(\sqrt[n]{y})^m = (\sqrt[l]{y})^k$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $c = (\sqrt[n]{y})^m$ και $d = (\sqrt[l]{y})^k$, οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι $c = d$.
Τώρα, λόγω ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες,

$$c^{nk} = (\sqrt[n]{y})^{mnk} = \big((\sqrt[n]{y})^n\big)^{mk} = y^{mk}, \qquad d^{ml} = (\sqrt[l]{y})^{kml} = \big((\sqrt[l]{y})^l\big)^{mk} = y^{mk}$$

και, επομένως,

$$c^{nk} = d^{ml}. \tag{1.3}$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι $nk = ml$.
Αν $nk = ml \neq 0$, από την (1.3) συνεπάγεται $c = d$.
Αν $nk = ml = 0$ ή, ισοδύναμα, $m = k = 0$, τότε η ισότητα $(\sqrt[n]{y})^m = (\sqrt[l]{y})^k = 1$ είναι προφανής. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8. *Τώρα, έστω $y > 0$ και $r \in \mathbb{Q}$ ώστε ο r να μην είναι ακέραιος. Υπάρχουν άπειρα ζεύγη αριθμών $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ ώστε $r = \frac{m}{n}$. Όμως, σύμφωνα με το λήμμα 1.1, ο αριθμός $(\sqrt[n]{y})^m$ είναι ο ίδιος για κάθε τέτοιο ζεύγος. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε και ορίζουμε*

$$y^r = (\sqrt[n]{y})^m,$$

χρησιμοποιώντας ένα οποιοδήποτε ζεύγος $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ ώστε $r = \frac{m}{n}$.
Τέλος, αν $r \in \mathbb{Q}$ με $r > 0$, ορίζουμε

$$0^r = 0.$$

Από τον ορισμό είναι σαφές ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ ισχύει $y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$ για κάθε $y \geq 0$. Άρα οι ρίζες είναι ειδικές περιπτώσεις δυνάμεων με ρητούς εκθέτες.

Επίσης, είναι σαφές ότι ισχύει $y^r > 0$ για κάθε $y > 0$ και για κάθε ρητό r.

Στην άσκηση 1.4.5 διατυπώνονται οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες. Όλες οι ιδιότητες αποδεικνύονται με αλγεβρικό τρόπο, εύκολα, με χρήση των αντίστοιχων ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες και των ιδιοτήτων των ριζών. Κι αυτές τις ιδιότητες θα τις θεωρούμε γνωστές.

Όπως και στην περίπτωση των ριζών, τονίζουμε ότι *η δύναμη y^r με ρητό μη-ακέραιο εκθέτη r ορίζεται μόνο για μη-αρνητικούς αριθμούς y και, μάλιστα, αν $r \leq 0$, η δύναμη y^r ορίζεται μόνο για θετικούς y.*

1.4.3 Δυνάμεις με άρρητους εκθέτες.

Τέλος, έστω ότι ο x είναι άρρητος και έστω $y > 1$. Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

Το X είναι μη-κενό αφού μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε ρητό $r < x$ (για παράδειγμα, τον $r = [x]$) και τότε ο αντίστοιχος y^r ανήκει στο X. Είναι εύκολο να δούμε ότι το X είναι και άνω φραγμένο. Πράγματι, για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x$ ισχύει $r < [x] + 1$ και, επομένως, $y^r < y^{[x]+1}$ (λόγω των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες). Άρα ο $y^{[x]+1}$ είναι άνω φράγμα του X. Άρα το $\sup X$ είναι αριθμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9. [10] *Αν $y > 1$ και ο x είναι άρρητος, ορίζουμε*

$$y^x = \sup\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

[10] Δεύτερος ορισμός της δύναμης με άρρητο εκθέτη υπάρχει στην άσκηση 2.4.20.

Κατόπιν, αν $y = 1$ και ο x είναι άρρητος, ορίζουμε

$$1^x = 1.$$

Αν $0 < y < 1$ και ο x είναι άρρητος, τότε $\frac{1}{y} > 1$, οπότε έχει ορισθεί ο $(\frac{1}{y})^x$ και ορίζουμε

$$y^x = \tfrac{1}{(1/y)^x}.$$

Τέλος, αν ο x είναι άρρητος και $x > 0$, ορίζουμε

$$0^x = 0.$$

Επομένως, συνυπολογίζοντας τους προηγούμενους σχετικούς ορισμούς, έχουμε τα εξής. *Αν $y < 0$, τότε ο y^x ορίζεται αν και μόνο αν ο x είναι ακέραιος.*[11] *Αν $y = 0$, τότε ο y^x ορίζεται αν και μόνο αν ο x είναι θετικός. Αν $y > 0$, τότε ο y^x ορίζεται για κάθε x.*

ΛΗΜΜΑ 1.2. *Έστω $y > 1$. Για κάθε $b > 1$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1 < y^{1/n} < b$.*

Απόδειξη. Αν $y > 1$ και $b > 1$, τότε, επειδή $\frac{b-1}{y-1} > 0$, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα συνεπάγεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \frac{1}{n} < \frac{b-1}{y-1}$. Από την ανισότητα (1.2) συνεπάγεται, για έναν τέτοιον n, ότι

$$b^n - 1 \geq n(b-1) > y - 1$$

και, επομένως, $y^{1/n} < b$. Η ανισότητα $1 < y^{1/n}$ είναι προφανής. □

ΛΗΜΜΑ 1.3. *Έστω $x \in \mathbb{Q}$ και $y > 1$. Τότε $y^x = \sup\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{Q}$ και $y > 1$.
Αν $r \in \mathbb{Q}$ και $r < x$, τότε $y^r < y^x$. Άρα ο y^x είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.
Έστω a οποιοδήποτε άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.
Επειδή τα στοιχεία του συνόλου είναι θετικοί αριθμοί, συνεπάγεται $a > 0$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $a < y^x$, οπότε $\frac{y^x}{a} > 1$. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα 1.2, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1 < y^{1/n} < \frac{y^x}{a}$ και, επομένως, $a < y^{x-(1/n)}$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $x - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ και $x - \frac{1}{n} < x$ και, επομένως, ο $y^{x-(1/n)}$ ανήκει στο $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.
Άρα $y^x \leq a$.
Άρα ο y^x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$. □

Παρατηρήστε ότι το λήμμα 1.3 *αποδεικνύει* την ισότητα $y^x = \sup\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ στην περίπτωση που ο x είναι ρητός. Όμως, στην περίπτωση που ο x είναι άρρητος η ίδια ισότητα *δεν αποδεικνύεται*: απλώς χρησίμευσε για να *οριστεί* ο αριθμός y^x.

ΛΗΜΜΑ 1.4. [α] *Έστω $r \in \mathbb{Q}$ και $r < x_1 + x_2$. Τότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$ και $r_1 + r_2 = r$.*
[β] *Έστω $x_1, x_2 > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ και $0 < r < x_1 x_2$. Τότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < r_1 < x_1$ και $0 < r_2 < x_2$ και $r_1 r_2 = r$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $r \in \mathbb{Q}$ και $r < x_1 + x_2$.
Τότε $r - x_1 < x_2$, οπότε υπάρχει $r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $r - x_1 < r_2 < x_2$. Θέτουμε $r_1 = r - r_2$, οπότε $r_1 \in \mathbb{Q}$. Προφανώς, $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$ και $r_1 + r_2 = r$.
[β] Έστω $x_1, x_2 > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ και $0 < r < x_1 x_2$.
Τότε $0 < \frac{r}{x_1} < x_2$, οπότε υπάρχει $r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < \frac{r}{x_1} < r_2 < x_2$. Θέτουμε $r_1 = \frac{r}{r_2}$, οπότε $r_1 \in \mathbb{Q}$. Προφανώς, $0 < r_1 < x_1$ και $0 < r_2 < x_2$ και $r_1 r_2 = r$. □

Στην πρόταση 1.8 αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων. Όλες οι ιδιότητες αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες.

[11] Αργότερα, στην υποενότητα 4.3.1, θα δούμε γιατί δεν ορίζονται οι δυνάμεις y^x με μη-ακέραιο εκθέτη όταν $y < 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8. [α] *Έστω* $y, y_1, y_2 > 0$. *Τότε* ${y_1}^x {y_2}^x = (y_1 y_2)^x$, $y^{x_1} y^{x_2} = y^{x_1+x_2}$, $(y^{x_1})^{x_2} = y^{x_1 x_2}$.

[β] *Έστω* $x_1 < x_2$. *Αν* $y > 1$, *τότε* $y^{x_1} < y^{x_2}$. *Αν* $0 < y < 1$, *τότε* $y^{x_1} > y^{x_2}$.

[γ] *Έστω* $0 < y_1 < y_2$. *Αν* $x > 0$, *τότε* ${y_1}^x < {y_2}^x$. *Αν* $x < 0$, *τότε* ${y_1}^x > {y_2}^x$.

Απόδειξη. [α] Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε ελεύθερα τις εξής δύο παρατηρήσεις.

(i) *Αν* $y > 1$, *τότε ισχύει* $y^r \leq y^x$ *για κάθε* $r \in \mathbb{Q}$ *με* $r < x$.

(Διότι γνωρίζουμε ότι ο y^x είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.)

(ii) *Αν* $y > 1$ *και ισχύει* $y^r \leq a$ *για κάθε* $r \in \mathbb{Q}$ *με* $r < x$, *τότε* $y^x \leq a$.

(Διότι, βάσει της υπόθεσης, ο a είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ και διότι γνωρίζουμε ότι ο y^x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του ίδιου συνόλου.)

Απόδειξη της πρώτης ισότητας.

Έστω $y_1, y_2 > 1$.

Έστω οποιοσδήποτε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x$. Τότε $(y_1 y_2)^r = {y_1}^r {y_2}^r \leq {y_1}^x {y_2}^x$. Άρα $(y_1 y_2)^x \leq {y_1}^x {y_2}^x$.

Έστω οποιοιδήποτε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ με $r_1, r_2 < x$. Θέτουμε $r = \max\{r_1, r_2\} \in \mathbb{Q}$, οπότε $r < x$, και τότε ${y_1}^{r_1} {y_2}^{r_2} \leq {y_1}^r {y_2}^r = (y_1 y_2)^r \leq (y_1 y_2)^x$. Άρα ισχύει ${y_1}^{r_1} \leq \frac{(y_1 y_2)^x}{{y_2}^{r_2}}$. Άρα ${y_1}^x \leq \frac{(y_1 y_2)^x}{{y_2}^{r_2}}$. Συνεπάγεται ${y_2}^{r_2} \leq \frac{(y_1 y_2)^x}{{y_1}^x}$ και, επομένως, ${y_2}^x \leq \frac{(y_1 y_2)^x}{{y_1}^x}$. Άρα ${y_1}^x {y_2}^x \leq (y_1 y_2)^x$.

Από τις $(y_1 y_2)^x \leq {y_1}^x {y_2}^x$ και ${y_1}^x {y_2}^x \leq (y_1 y_2)^x$ προκύπτει ${y_1}^x {y_2}^x = (y_1 y_2)^x$.

Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε.

Απόδειξη της δεύτερης ισότητας.

Έστω $y > 1$.

Έστω οποιοιδήποτε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ με $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$. Τότε $y^{r_1} y^{r_2} = y^{r_1+r_2} \leq y^{x_1+x_2}$ και, επομένως, $y^{r_1} \leq \frac{y^{x_1+x_2}}{y^{r_2}}$. Άρα $y^{x_1} \leq \frac{y^{x_1+x_2}}{y^{r_2}}$. Συνεπάγεται $y^{r_2} \leq \frac{y^{x_1+x_2}}{y^{x_1}}$ και, επομένως, $y^{x_2} \leq \frac{y^{x_1+x_2}}{y^{x_1}}$. Άρα $y^{x_1} y^{x_2} \leq y^{x_1+x_2}$.

Έστω οποιοσδήποτε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x_1 + x_2$. Τότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$ και $r_1 + r_2 = r$. Άρα ισχύει $y^r = y^{r_1+r_2} = y^{r_1} y^{r_2} \leq y^{x_1} y^{x_2}$. Άρα $y^{x_1+x_2} \leq y^{x_1} y^{x_2}$.

Από τις $y^{x_1} y^{x_2} \leq y^{x_1+x_2}$ και $y^{x_1+x_2} \leq y^{x_1} y^{x_2}$ προκύπτει $y^{x_1} y^{x_2} = y^{x_1+x_2}$.

Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε.

Απόδειξη της τρίτης ισότητας.

Έστω $y > 1$ και $x_1, x_2 > 0$.

Έστω οποιοιδήποτε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ με $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$. Θεωρούμε $r'_1, r'_2 \in \mathbb{Q}$ με $r_1 \leq r'_1$ και $r_2 \leq r'_2$ και $0 < r'_1 < x_1$ και $0 < r'_2 < x_2$. Τότε $(y^{r'_1})^{r'_2} = y^{r'_1 r'_2} \leq y^{x_1 x_2}$ και, επομένως, $y^{r_1} \leq y^{r'_1} \leq (y^{x_1 x_2})^{1/r'_2}$. Άρα $y^{x_1} \leq (y^{x_1 x_2})^{1/r'_2}$. Επειδή $y^{x_1} \geq y^{r'_1} > 1$, συνεπάγεται $(y^{x_1})^{r_2} \leq (y^{x_1})^{r'_2} \leq y^{x_1 x_2}$ και, επομένως, $(y^{x_1})^{x_2} \leq y^{x_1 x_2}$.

Έστω οποιοσδήποτε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x_1 x_2$. Θεωρούμε $r' \in \mathbb{Q}$ με $r \leq r'$ και $0 < r' < x_1 x_2$. Τότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < r_1 < x_1$ και $0 < r_2 < x_2$ και $r_1 r_2 = r'$. Άρα $y^r \leq y^{r'} = y^{r_1 r_2} = (y^{r_1})^{r_2} \leq (y^{x_1})^{r_2} \leq (y^{x_1})^{x_2}$. Άρα $y^{x_1 x_2} \leq (y^{x_1})^{x_2}$.

Από τις $(y^{x_1})^{x_2} \leq y^{x_1 x_2}$ και $y^{x_1 x_2} \leq (y^{x_1})^{x_2}$ προκύπτει $(y^{x_1})^{x_2} = y^{x_1 x_2}$.

Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε.

[β] Έστω $x_1 < x_2$ και $y > 1$.

Θεωρούμε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$. Τότε για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x_1$ ισχύει $y^r \leq y^{r_1}$. Άρα $y^{x_1} \leq y^{r_1}$. Από την άλλη μεριά, ισχύει $y^{r_1} < y^{r_2} \leq y^{x_2}$. Άρα $y^{x_1} < y^{x_2}$.

Η περίπτωση $0 < y < 1$ προκύπτει αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε.

[γ] Έστω $0 < y_1 < y_2$ και $x > 0$.

Τότε $1 < \frac{y_2}{y_1}$ και, από το [β], $1 = (\frac{y_2}{y_1})^0 < (\frac{y_2}{y_1})^x$ και, από το [α], ${y_1}^x < {y_1}^x (\frac{y_2}{y_1})^x = (y_1 \frac{y_2}{y_1})^x = {y_2}^x$.

Η περίπτωση $x < 0$ προκύπτει αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε. $\square$

Ξεχωρίζουμε δύο από τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Η πρώτη είναι η εξής. Αν $y > 1$, τότε η y^x είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x στο $\mathbb{R}$

και, αν $0 < y < 1$, τότε η y^x είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του x στο $\mathbb{R}$.

Η δεύτερη, ανάλογη ιδιότητα είναι η εξής. Αν $x > 0$, τότε η y^x είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του y στο $[0, +\infty)$ και, αν $x < 0$, τότε η y^x είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του y στο $(0, +\infty)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10. *Ορίζουμε τις δυνάμεις*

$$a^{+\infty} = +\infty \quad \text{αν } a > 1, \qquad a^{+\infty} = 0 \quad \text{αν } 0 \le a < 1,$$

$$a^{-\infty} = 0 \quad \text{αν } a > 1, \qquad a^{-\infty} = +\infty \quad \text{αν } 0 < a < 1,$$

$$(+\infty)^b = +\infty \quad \text{αν } b > 0 \text{ ή } b = +\infty, \qquad (+\infty)^b = 0 \quad \text{αν } b < 0 \text{ ή } b = -\infty.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$0^0, \qquad 1^{+\infty}, \qquad 1^{-\infty}, \qquad (+\infty)^0, \qquad 0^{-\infty}$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές δύναμης**.

Οι παραπάνω απροσδιόριστες μορφές δύναμης δεν είναι τόσο γνωστές όσο οι απροσδιόριστες μορφές των πιο απλών πράξεων και τις οποίες είδαμε στον ορισμό 1.1. Όμως, παρουσιάζονται, όπως θα δούμε, συχνά στον υπολογισμό ορίων και η επιπόλαιη χρήση αυτών των παραστάσεων καταλήγει σε λάθη.

1.4.4 Λογάριθμοι.

Εδώ, στο τελευταίο μέρος αυτής της ενότητας, θα δούμε τον ορισμό των λογαρίθμων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3. *Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Τότε για κάθε $y > 0$ υπάρχει μοναδικός x ώστε $a^x = y$.*

Απόδειξη. Έστω $a > 1$ και $y > 1$.
Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{x \,|\, a^x \le y\}.$$

Προφανώς, $0 \in X$. Επίσης, σύμφωνα με το λήμμα 1.2, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^n > y$. Τότε, για κάθε $x \in X$ ισχύει $a^x \le y \le a^n$, οπότε $x \le n$. Άρα το X είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, οπότε το $\sup X$ είναι αριθμός.
Θέτουμε

$$\xi = \sup X.$$

Θα αποδείξουμε ότι $a^\xi = y$.
Έστω $a^\xi < y$. Σύμφωνα με το λήμμα 1.2 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^{1/n} < \frac{y}{a^\xi}$. Τότε $a^{\xi + (1/n)} < y$, οπότε $\xi + \frac{1}{n} \in X$. Αυτό είναι άτοπο διότι ο ξ είναι άνω φράγμα του X. Άρα $a^\xi \ge y$.
Έστω $a^\xi > y$. Από το λήμμα 1.2, και πάλι, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^{1/n} < \frac{a^\xi}{y}$. Τότε $y < a^{\xi - (1/n)}$, οπότε για κάθε $x \in X$ ισχύει $a^x \le y < a^{\xi - (1/n)}$ και, επομένως, $x < \xi - \frac{1}{n}$. Άρα ο $\xi - \frac{1}{n}$ είναι άνω φράγμα του X. Αυτό είναι άτοπο διότι ο ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του X. Άρα $a^\xi \le y$.
Από τις $a^\xi \ge y$ και $a^\xi \le y$ συνεπάγεται $a^\xi = y$.
Οι αποδείξεις στις άλλες περιπτώσεις ανάγονται στο αποτέλεσμα της πρώτης περίπτωσης ως εξής.
Αν $a > 1$ και $y = 1$, τότε η $a^x = y$ έχει την προφανή λύση $x = 0$.
Αν $a > 1$ και $0 < y < 1$, τότε, επειδή $\frac{1}{y} > 1$, υπάρχει η ώστε $a^\eta = \frac{1}{y}$ και, επομένως, για τον $\xi = -\eta$ ισχύει $a^\xi = a^{-\eta} = y$.
Τέλος, αν $0 < a < 1$ και $y > 0$, τότε, επειδή $\frac{1}{a} > 1$, υπάρχει η ώστε $(\frac{1}{a})^\eta = y$, οπότε για τον $\xi = -\eta$ ισχύει $a^\xi = a^{-\eta} = y$.
Απομένει να αποδείξουμε ότι η λύση της εξίσωσης $a^x = y$ είναι μοναδική: αν $a^{\xi_1} = y$ και $a^{\xi_2} = y$, τότε $a^{\xi_1} = a^{\xi_2}$, οπότε $\xi_1 = \xi_2$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11. [12] *Αν $y > 0$ και $a > 0$, $a \neq 1$, τότε η λύση της $a^x = y$, η ύπαρξη και η μοναδικότητα της οποίας εξασφαλίζεται από το θεώρημα 1.3, ονομάζεται* **λογάριθμος** *του y με* **βάση** *a και συμβολίζεται*

$$\log_a y.$$

Έστω $a > 1$. Τότε, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η συνάρτηση $y = a^x$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Οι τιμές της $y = a^x$ είναι θετικές. Τώρα, το θεώρημα 1.3 λέει ότι το σύνολο τιμών της είναι ακριβώς το $(0, +\infty)$. Δηλαδή, η $y = a^x$ εκφράζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο $(-\infty, +\infty)$ και στο $(0, +\infty)$. Και, σύμφωνα με τον ορισμό των λογαρίθμων, η $x = \log_a y$ εκφράζει την αντίστροφη αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο $(0, +\infty)$ και στο $(-\infty, +\infty)$. Επειδή η $y = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x στο $(-\infty, +\infty)$, η $x = \log_a y$ είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα συνάρτηση του y στο $(0, +\infty)$.

Αν $0 < a < 1$, ισχύουν όσα είπαμε για την περίπτωση $a > 1$ με μία διαφορά. Η $y = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του x στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ και η $x = \log_a y$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του y στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Και πάλι, οι δύο συναρτήσεις είναι αντίστροφες.

Η πρόταση 1.9 περιγράφει όλες τις βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.9. *Έστω $a, b > 0$, $a, b \neq 1$.*
[α] $\log_a(y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$ *για κάθε* $y_1, y_2 > 0$.
[β] $\log_a(y^z) = z \log_a y$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* z.
[γ] $\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$ *για κάθε* $y > 0$.
[δ] $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.
[ε] *Έστω* $0 < y_1 < y_2$. *Αν* $a > 1$, *τότε* $\log_a y_1 < \log_a y_2$. *Αν* $0 < a < 1$, *τότε* $\log_a y_1 > \log_a y_2$.

Απόδειξη. [α] Ορίζουμε $x_1 = \log_a y_1$ και $x_2 = \log_a y_2$, οπότε $a^{x_1} = y_1$ και $a^{x_2} = y_2$. Τότε $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2} = y_1 y_2$, οπότε $\log_a(y_1 y_2) = x_1 + x_2 = \log_a y_1 + \log_a y_2$.
[β] Ορίζουμε $x = \log_a y$, οπότε $a^x = y$. Τότε $a^{zx} = (a^x)^z = y^z$ και, επομένως, $\log_a(y^z) = zx = z \log_a y$.
[γ] Ορίζουμε $x = \log_b y$ και $w = \log_a b$, οπότε $b^x = y$ και $a^w = b$. Άρα $a^{wx} = (a^w)^x = b^x = y$. Άρα $\log_a y = wx = \log_a b \log_b y$.
[δ] Η $\log_a 1 = 0$ προκύπτει από την $a^0 = 1$ και η $\log_a a = 1$ από την $a^1 = a$.
[ε] Ορίζουμε $x_1 = \log_a y_1$ και $x_2 = \log_a y_2$, οπότε $y_1 = a^{x_1}$ και $y_2 = a^{x_2}$. Τότε $a^{x_1} < a^{x_2}$ και, αν $a > 1$, συνεπάγεται $x_1 < x_2$ ενώ, αν $0 < a < 1$, συνεπάγεται $x_1 > x_2$. □

Ασκήσεις.

1.4.1. Βρείτε το infimum και το supremum του $(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,|\, a < x < b\}$.

1.4.2. Έστω οποιοσδήποτε *άρρητος* a και το σύνολο $A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\}$. Παρατηρήστε ότι $A \subseteq \mathbb{Q}$ και ότι το A είναι μη-κενό και άνω φραγμένο στο $\mathbb{Q}$. Δηλαδή, υπάρχει $u \in \mathbb{Q}$ (για παράδειγμα, ο $u = [a] + 1$) ώστε να ισχύει $r \leq u$ για κάθε $r \in A$.

Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμός στο $\mathbb{Q}$, ο οποίος να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Συμπεράνατε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν έχει την ιδιότητα supremum.

1.4.3. [α] Αν $a, b > 0$ και $m, n \in \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι $a^n b^n = (ab)^n$, $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$.
[β] Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$ και $m < n$. Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι $a^m < a^n$. Αν $0 < a < 1$, αποδείξτε ότι $a^n < a^m$.
[γ] Έστω $0 < a < b$ και $n \in \mathbb{Z}$. Αν $n > 0$, αποδείξτε ότι $0 < a^n < b^n$. Αν $n < 0$, αποδείξτε ότι $0 < b^n < a^n$.

[12] Δεύτερος ορισμός του λογαρίθμου υπάρχει στην άσκηση 2.4.21.

1.4.4. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και $n, m \geq 2$.
[α] Αν $y, y_1, y_2 \geq 0$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{y_1 y_2} = \sqrt[n]{y_1}\,\sqrt[n]{y_2}$ και $\sqrt[n]{\sqrt[m]{y}} = \sqrt[nm]{y}$.
[β] Έστω $n < m$. Αν $y > 1$, αποδείξτε ότι $\sqrt[m]{y} < \sqrt[n]{y}$. Αν $0 < y < 1$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{y} < \sqrt[m]{y}$.
[γ] Έστω $0 \leq y_1 < y_2$. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{y_1} < \sqrt[n]{y_2}$.

1.4.5. Έστω $r, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$.
[α] Αν $y, y_1, y_2 > 0$, αποδείξτε ότι ${y_1}^r {y_2}^r = (y_1 y_2)^r$, $y^{r_1} y^{r_2} = y^{r_1 + r_2}$, $(y^{r_1})^{r_2} = y^{r_1 r_2}$.
[β] Έστω $r_1 < r_2$. Αν $y > 1$, αποδείξτε ότι $y^{r_1} < y^{r_2}$. Αν $0 < y < 1$, αποδείξτε ότι $y^{r_1} > y^{r_2}$.
[γ] Έστω $0 < y_1 < y_2$. Αν $r > 0$, αποδείξτε ότι ${y_1}^r < {y_2}^r$. Αν $r < 0$, αποδείξτε ότι ${y_1}^r > {y_2}^r$.

1.4.6. Έστω $y > 1$. Αποδείξτε ότι $y^x = \inf\{y^r \mid r \in \mathbb{Q}, x < r\}$.

1.4.7. Αποδείξτε ότι οι $\sqrt{3}$, $\sqrt[7]{129}$ και $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

1.4.8. [13] [α] Έστω $n, k, m \in \mathbb{N}$ ώστε οι k, m να μην έχουν κοινό διαιρέτη > 1. Αποδείξτε ότι ο $\sqrt[n]{k/m}$ είναι ρητός αν και μόνο αν καθένας από τους k, m είναι n-οστή δύναμη φυσικού.
[β] Έστω $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ και έστω ότι οι $k, m \in \mathbb{Z}$ δεν έχουν κοινό διαιρέτη > 1. Αν ο $\frac{k}{m}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, αποδείξτε ότι ο k διαιρεί τον a_0 και ο m διαιρεί τον a_n.

1.4.9. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Βρείτε συνθήκη, σχετική με τους πρώτους παράγοντες των m, n, η οποία να είναι ισοδύναμη με το ότι ο $\log_m n$ είναι ρητός.

[13] Δύο γενικεύσεις της πρότασης 1.6.

Βασική βιβλιογραφία.

Apostol, T. (1974) *Mathematical Analysis, Ch 1.* Addison-Wesley.

Bartle, R. (1967) *The Elements of Real Analysis, Ch I.* Wiley.

Bartle, R. & Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 2.* Wiley.

Beals, R. (2004) *Analysis, an Introduction, Ch 2.* Cambridge Univ. Press.

Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 2.* Springer.

Berberian, S. (1994) *A First Course in Real Analysis, Ch 1-2.* Springer.

Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 2.* Springer.

Ghorpade, S. & Limaye, B. (2006) *A Course in Calculus and Real Analysis, Ch 1.* Springer.

Grauert, H. & Lieb, I. (1967) *Differential- und Integralrechnung, Band I, Kap I.* Springer.

Hayes Jr, C. (1964) *Concepts of Real Analysis, Ch 2.* Wiley.

Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 2.* Chapman and Hall.

Landau, E. (2001) *Differential and Integral Calculus, Introduction.* American Math. Society & Chelsea.

Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch I.* Springer.

Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 1, 3.* Springer.

Rosenlicht, M. (1986) *Introduction to Analysis, Ch II.* Dover.

Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 1.* Springer.

Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 1.* McGraw-Hill.

Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 1-2, 8, 28.* Cambridge Univ. Press.

Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 1.* Pearson.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 1-2.* Dover.

Buck, R. & Buck, E. (2003) *Advanced Calculus, Ch 1.* Waveland Press.

Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 1.* Springer.

Dieudonné, J. (1969) *Foundations of Modern Analysis, Vol 1, Ch 2.* Academic Press.

Goffman, C. (1966) *Introduction to Real Analysis, Ch 1.* Harper and Row.

Goffman, C. (1953) *Real Functions, Ch 4.* Rinehart.

Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 1.* Wiley.

Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 2.* Mir Publishers.

Pugh, C. (2015) *Real Mathematical Analysis, Ch 1.* Springer.

Smirnov, V. I. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch I.* Pergammon Press.