Λύσεις και Υποδείξεις Επιλεγμένων Ασκήσεων

1.1

1 i)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

2 ii)
$$\begin{array}{ccccc} & x_3 & & & = 0 \\ x_2 & & +x_4 & +3x_5 & = 2 \\ 3x_2 & & & & = 1 \end{array}.$$

Λύνοντας ως προς x_2 και στη συνέχεια ως προς x_4, βρίσκουμε ότι η γενική λύση του συστήματος είναι η 5άδα $(x_1, 1/3, 0, 5/3 - x_5, x_5)$ όπου $s, t \in \mathbb{R}$. Επομένως το σύνολο των λύσεων είναι

$$\{(s, \frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3} - t, t) : \ s, t \in \mathbb{R}\}.$$

3 Το σύνολο των λύσεων είναι ολόκληρος ο $\mathbb{R}^4$.

1.2

1 Υπάρχουν ακριβώς δύο τέτοιοι πίνακες.

2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ όπου } a \in \mathbb{C} .$$

3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ όπου } a \in \mathbb{C} .$$

4 $\operatorname{rank} A_2 = 2$ αφού η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A_2 είναι ο πίνακας
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.3

1 Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του επαυξημένου πίνακα των τεσσάρων συστημάτων είναι ο πίνακας

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2a-b \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & c-a-b \end{array}\right].$$

Επομένως, το σύνολο λύσεων του πρώτου συστήματος είναι το $\{(-3t, 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$, το δεύτερο σύστημα δεν είναι συμβατό, το σύνολο λύσεων του τρίτου συστήματος είναι το $\{(-3t, 2t+1, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Για να είναι το τέταρτο σύστημα συμβατό πρέπει $c - a - b = 0$.

2 Οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι x_3, x_4. Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το

$$\begin{aligned}\{(1 - \frac{1}{5}t - s, \frac{2}{5}t + s, t, s, 1) : t, s \in \mathbb{R}\} = \{(1,0,0,0,1) + t(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0, 0)\\ + s(-1, 1, 0, 1, 0) : t, s \in \mathbb{R}\}\ .\end{aligned}$$

3 $a = -2$.

5 Το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος είναι το $\{t(1,1,1,2) + s(0,1,2,1) : t, s \in \mathbb{C}\}$.

1.4

1 Απαλοίφοντας το t βρίσκουμε ότι $y - 2x - 2 = 0$

2 Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του αντίστοιχου συστήματος είναι

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Άρα το επίπεδο περιγράφεται ως το σύνολο

$$\{(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0) + t(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

3 $3y - 2z = 0$

4 Όλα τα επίπεδα της μορφής $ax + by + az = 0$ περνούν από τα τρία αυτά σημεία, για $a, b \in \mathbb{R}$ που δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν. Γεωμετρικά, αυτό συμβαίνει γιατί τα τρία σημεία ανήκουν στην ίδια ευθεία. Η εξίσωση της ευθείας είναι $\{t(1,0,1) : t \in \mathbb{R}\}$.

1.5

1 Η καμπύλη $y = -3 - 2x + x^2$ διέρχεται από τα δοθέντα σημεία.

2 Η καμπύλη $y = 2 - x^2 + x^3$ διέρχεται από τα δοθέντα σημεία.

3 Η καμπύλη $y = 2 + 2ax - (1+a)x^2 + (1-2a)x^3 + ax^4$ διέρχεται από τα δοθέντα σημεία. Είναι τετάρτου βαθμού, για κάθε $a \neq 0$.

2.1

1

(α΄) $\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 24 & 28 \end{bmatrix}$

(β΄) $\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$

2 $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & a(a^2+b^2-c^2) & b(a^2+b2-c^2) \\ a(a^2+b^2+c^2) & 0 & -c(a^2+b^2+c^2) \\ b(a^2+b^2+c^2) & c(a^2+b^2+c^2) & 0 \end{bmatrix}$

3 (α΄) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

(β΄) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

(γ΄) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$

4 Παρατηρούμε ότι
$$A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}.$$
Ο $A+A^T$ είναι συμμετρικός πίνακας ενώ ο $A-A^T$ είναι αντισυμμετρικός πίνακας.

5 Για $n=1$, η πρόταση ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $n=k$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$. Αφού $A_1\cdots A_{k+1} = (A_1\cdots A_k)A_{k+1}$, από την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής $A_1\cdots A_k$ είναι κάτω τριγωνικός. Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι κάτω τριγωνικός. Έστω A, B δύο κάτω τριγωνικοί πίνακες, $AB=(c_{ij})$. Τότε $c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{im}b_{mj}$. Θα αποδείξουμε ότι τα στοιχεία επάνω από την κύρια διαγώνιο του AB είναι ίσα με μηδέν. Έστω ότι $j>i$. Αν $k\leq i$, τότε $k<j$ και $b_{kj}=0$, άρα $a_{ik}b_{kj}=0$. Αν $k>i$, τότε $a_{ik}=0$ και $a_{ik}b_{kj}=0$. Επομένως $c_{ij}=0$ είναι μηδέν, για $j>i$ και AB είναι κάτω τριγωνικός.

2.2

1 $(E_{i+a\cdot j})^{-1} = E_{i-a\cdot j}$, $(E_{i\leftrightarrow j})^{-1} = E_{i\leftrightarrow j}$, $(E_{b\cdot i})^{-1} = E_{b\cdot i}$.

2
$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & 4 \end{bmatrix}, C^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 12 & -6 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3
$$X_1 = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4 $A^2+2A = I+n \Rightarrow A(A+2I_n) = (A+2I_n)A = I_n \Rightarrow A^{-1} = A+2I_n$. Ομοίως $B^{-1} = -1/3(2B^2+4B-2I_n)$

2.3

1 $a_1 = -2$, $a_2 = 3 + 3i$. Για την ορίζουσα a_3 να χρησιμοποιήσετε πράξεις γραμμών για να φέρετε τον πίνακα σε άνω τριγωνική μορφή: $a_3 = 90$. Για την a_4 να χρησιμοποιήσετε την ανάπτυξη της ορίσουσας ως προς την τέταρτη γραμμή: $a_4 = -72$.

2 Για την ορίζουσα b_1 παρατηρείστε ότι ο πίνακας είναι μπλοκ 3×3 πινάκων: $b_1 = 6$. Για την ορίζουσα b_2 παρατηρείστε ότι αν αντιμεταθέσετε δύο στήλες, ο πίνακας γίνεται μπλοκ πινάκων: $b_2 = 2$.

3 Να χρησιμοποιήσετε επαγωγή ως προς n.

4 Αφού A είναι 5×5, έπεται ότι $\det(2A) = 2^5 \det A$. Επομένως $\det 2A = 32i$. Επίσης, αφού $\det \operatorname{adj}(A) \det A = (\det A)^5$ βρίσκουμε ότι $\det(\operatorname{adj}(A)) = 1$.

5 $A = -A^T \Rightarrow \det A = (-1)^n \det A \Rightarrow \det A = 0$

6 Αν $a_i = a_j$ για $i \neq j$, τότε η ορίζουσα είναι μηδέν. Διαφορετικά, να χρησιμοποιήσετε επαγωγή ως προς n. Για το επαγωγικό βήμα ($n = k + 1$), να χρησιμοποιήσετε πράξεις γραμμών για να μηδενίσετε τα στοιχεία της πρώτης στήλης στις γραμμές $2, \ldots, k + 1$, στη συνέχεια να αναπτύξετε κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης και κατόπιν να διαιρέσετε την i γραμμή με $a_i - a_1$, για $i = 2, \ldots, k + 1$.

7 i $x_1 = 2/7$, $x_2 = 37/7$, $x_3 = 18/7$.

2.4

2 Οι λύσεις του συστήματος $A^T X = \mathbf{0}$ δίνουν το σύνολο

$$\{t(1, -1, 1, 0, 0, 0) + s(-1, 0, 0, -1, 1, 0) + r(0, 1, 0, 1, 0, 1) : t, s, r \in \mathbb{R}\} .$$

Για παράδειγμα, $(1, -1, 1, 0, 0, 0)$ δηλώνει την κυκλική διαδρομή που χρησιμοποιεί τις ακμές $1, 3$ κατά την φορά τους και την ακμή 2 με αντίθετη φορά.

3 Εφαρμόστε τον κανόνα του Cramer, χρησιμοποιώντας την τιμή της ορίζουσας του Vandermonde.

4 Ο $n \times (n + 1)$ πίνακας A των συντελεστών του συστήματος που πρέπει να επιλυθεί για να βρεθούν οι συντελεστές $a_0, \ldots, a_n$ της καμπύλης $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, περιέχει ως υποπίνακα τον πίνακα του Vanermonde. Αφού $\operatorname{rank} A = n$, έπεται ότι το σύστημα είναι συμβατό και έχει μία ελεύθερη μεταβλητή. Άρα έχει άπειρες λύσεις.

5 $Y = \begin{bmatrix} 1/3 & 3 & 2/3 \end{bmatrix}^T$, $X = \begin{bmatrix} -166/21 & 57/21 & 2/21 \end{bmatrix}^T$.

6 Θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του πίνακα $\begin{bmatrix} 31 & 32 & 36 \end{bmatrix}^T$.

3.1

1 Η L δίνεται από την εξίσωση $y = 2$ και δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^2$. Η L' δίνεται από την εξίσωση $y - 2x = 0$ και είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^2$.

2 Τα σημεία $(0, 0, 0)$ ($k = t = 0$), $(1, 0, 1)$ ($k = 0, t = 1$) και $(1, 1, 1)$ ($k = 1, t = 0$) ανήκουν στο E_1. Λύνουμε το σύστημα $-d = 0, a + b + c - d = 0, a + c - d = 0$. Το E_1 περιγράφεται από την εξίσωση $z - x = 0$ και είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^3$. Το E_2 δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^3$. Παρατηρείστε ότι $E_3 = E_1$.

3 2

4 *Μετακινούμε* το παραλληλόγραμμα οριζόντια και κάθετα κατά 1 μονάδα. Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 4)$, $(1, 6)$ υπολογίζεται από την Πρόταση 3.1.2.

5 6.

3.2

1 $(0, 0) \notin L$.

2 Έστω a, $b \in U$. Τότε $a = (a_1, a_1, a_3, \ldots, a_n)$ και ομοίως για το b. Αν $k, l \in \mathbb{k}$ τότε $ka + lb = (ka_1 + lb_1, ka_1 + lb_1, Ka_3 + lb_3, \ldots, ka_n + lb_n) \in U$. Ένα παράγον σύνολο για το U όταν $n = 4$ είναι το $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

3 Ένα παράγον σύνολο για το L είναι το $\{(1, -1, , 0), (0, 0, 1)\}$.

4 Ένα παράγον σύνολο για το U είναι το $\{(1, 1, 1)\}$. Ένα παράγον σύνολο για το V είναι το $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. $U \cap V = \{(0, 0, 0)\}$.

5 Όπως στο Παράδειγμα 3.2.4.7. Βρίσκουμε ότι $2z + y - 2x = 0$

6 $S(X) = S(Y) = \mathbb{R}^2$.

7 Εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.2.9. Το διάνυσμα $(1, 2, 3)$ ανήκει στον χώρο γραμμών και στηλών του A.

3.3

1 $2u_1 - u_4 = \mathbf{0}$.

2 $v_1 - v_2 - v_3 = \mathbf{0}$. Μία βάση για τον χώρο $S(\{v_1, v_2, v_3\})$ είναι το σύνολο $\{v_1, v_2\}$.

3 (α') $\{(1, -2)\}$.

(β') $\{(1, 0, -\frac{1}{3}), (0, 1, -\frac{1}{3})\}$.

(γ') Το παράγον σύνολο αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και είναι βάση για το U_3.

3.4

1 Να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα 3.4.5 για να αποδείξετε ότι $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) \geq 1$.

2 Έστω A ο πίνακας με στήλες να αντιστοιχούν στα διανύσματα που παράγουν τον U και W. Τότε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $U+W = \mathbb{R}^4$ (διαλέξτε την αγαπημένη σας βάση για το $\mathbb{R}^4$). Από τις σχέσεις $\Sigma_5 = 2\Sigma_2$ και $\Sigma_6 = -2\Sigma_3 + \Sigma_4$ και επομένως $\Sigma_2 = 1/5\Sigma_5$, ενώ $\Sigma_3 = 1/2(\Sigma_4 - \Sigma_6)$. Συνεπώς, $U \cap W = S(\{(1,1,0,0),(1,1,0,0)\})$.

3 (α′) $C_B(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_B(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(β′) $C_B(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_B(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(γ′) $C_B(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C_B(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

4 $C_D(w_1) = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

5 (α′) $v = e_1 + e_2 + 2e_3 = (1,1,2)$

(β′) $v = e_1 + 3e_2 + e_3 = (1,3,1)$

6 Αφού

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

έπεται ότι

$$C_D(w_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ C_D(w_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

7 Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως το σύνολο $\{(1,1,1,0,1),(0,0,0,1,1)\}$ είναι βάση για τον $\Gamma(A)$. Το σύνολο $\{(1,2),(2,5)\}$ είναι βάση για τον $\Sigma(A)$. Αφού το σύνολο των λύσεων του ομογενού συστήματος $AX = \mathbf{0}$ είναι το

$$\{t(-1,1,0,0,0) + s(-1,0,1,0,0) + f(-1,0,0,-1,1) : s,t,f \in\in \Bbbk\},$$

έπεται ότι

$$\{(-1,1,0,0,0),(-1,0,1,0,0),(-1,0,0,-1,1)\}$$

είναι βάση για τον $\mathrm{null}(A)$. Παρατηρούμε ότι $-\Sigma_1 + \Sigma_2 = 0$, $-\Sigma_1 + \Sigma_3 = 0$, $\Sigma_1 + \Sigma_4 - \Sigma_6 = 0$.

8 Αν $BX = 0$, τότε $(AB)X = 0$. Επομένως $\mathrm{null}(B) \subset \mathrm{null}(AB)$ και συνεπώς $\dim_{\mathbb{k}} \mathrm{null}(B) \leq \dim_{\mathbb{k}} \mathrm{null}(AB)$.

9 Σύμφωνα με την Άσκηση 8 και το Θεώρημα 3.4.3, προκύπτει ότι $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B)$. Επομένως, για τον πίνακα $B^T A^T$, ισχύει ότι $\mathrm{rank}(B^T A^T) \leq \mathrm{rank}(A^T)$. Να χρησιμοποιήσετε τώρα την Πρόταση 3.4.1 για να προκύψει το ζητούμενο.

3.5

1 Το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές από το $\mathbb{R}$ που έχουν βαθμό 6 δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}[x]$, αφού για παράδειγμα $x^6 + (-1)(x^6 - 2x) = 2x$ που έχει βαθμό 1. Μία βάση για τον υποχώρο των πολυωνύμων με συντελεστές από το $\mathbb{R}$ που έχουν βαθμό $\leq m$ είναι το σύνολο $\{1, x, \ldots, x^m\}$

2 Αν E_{ij} είναι ο πίνακας με 1 στη θέση ij και μηδέν στις άλλες θέσεις, τότε παρατηρείστε ότι $\{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{nm}\}$ είναι βάση για τον $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{k})$.

3 Μία βάση για τον υποχώρο των διαγωνίων $n \times n$ πινάκων στον $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{k})$ είναι το σύνολο $\{E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}\}$ με τον συμβολισμό της προηγούμενης άσκησης.

4.1

2 $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y)$.

3 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4, 3x_1 + x_2 - x_4)$,
$g(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 3x_1 + x_2, 5x_1, 6x_1 - x_2)$

4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5 $f(4, -3) = (1, -11)$

6 $e_1 \mapsto (0, -1) \mapsto (0, -1) \mapsto (0, -2) \mapsto (0, -2)$. $e_2 \mapsto e_1 \mapsto (3, 0) \mapsto (3, 0) \mapsto (-3, 0)$.

Να συμπεράνετε ότι $f(x, y) = (-3y, -2x)$.

4.2

1 Αφού

$$A = \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 1 & 0 & 2 & c \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -2 & a - 2b \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 1 & 0 & 2 & c - a + 2b \end{array}\right],$$

έπεται ότι $(1, 0, 1), (2, 1, 0)$ είναι βάση για την $\mathrm{Im} f$. Σημειώστε επίσης ότι η $\mathrm{Im} f$ είναι το επίπεδο $c - a + 2b = 0$ στον $\mathbb{R}^3$.

3 Μία βάση για τον V είναι το σύνολο $\{(1,-1,0),(0,1,-1)\}$. Σύμφωνα με τον Πίνακα 4.2.1.iv, η γραμμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to V$,με $f(e_1)=(1,-1,0)$, $f(e_2)=(0,1,-1)$ είναι ισομορφισμός. Παρατητείστε ότι $f(x,y)=f(xe_1+ye_2)=(x,-x+y,-y)$ και ότι ο πίνακας της συνάρτησης ως προς τις δυο αυτές βάσεις είναι ο μοναδιαίος.

4 Όπως στην προηγούμενη άσκηση. Αν $v_1=(1,-1,0)$ και $v_2=(0,1,-1)$ τότε $f:V\to\mathbb{R}^2$, $v_1\mapsto e_1$, $v_2\mapsto e_2$ είναι ισομορφισμός. Επομένως $av_1+bv_2\mapsto(a,b)$.

4.3

1

$$S_{D\leftarrow B}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&3&0&0\\3&1&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix},S_{B\leftarrow D}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}0&-1&3&0\\0&3&-1&0\\-8&-3&1&8\\8&1&-3&0\end{bmatrix}.$$

2 $f(x,y)=(5x-y,-2x)$.

3 $f(x,y,z)=(x,x-y-z,y), f^{-1}(x,y,z)=(x,z,x-y-z)$.

5.1

1 $\phi(v)=-v,\forall v\in\mathbb{R}^2$. Επομένως, η ϕ έχει την ιδιοτιμή $\lambda=-1$ και κάθε $v\in\mathbb{R}^2, v\neq(0,0)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ.

2 Η ϕ έχει δύο ιδιοτιμές, ±1. Για το $\lambda=-1$, τα ιδιοδιανύσματα είναι της μορφής $(x,0,z)$. Για το $\lambda=1$ τα ιδιοδιάνυσματα είναι της μορφής $(0,y,0)$.

3 (α΄) Για $\lambda_1=5$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $v_1=(1,1)$.
Για $\lambda_2=-1$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $v_2=(1,-\frac{1}{2})$.

(β΄) Για $\lambda_1=\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(1,\frac{i\sqrt{3}-1}{2},-\frac{i\sqrt{3}+1}{2})$.
Για $\lambda_2=-\frac{i\sqrt{3}+1}{2}$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(1,-\frac{i\sqrt{3}+1}{2},\frac{i\sqrt{3}-1}{2})$.
Για $\lambda_3=1$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $v_3=(1,1,1)$.

4 (α΄) Για $\lambda_1=3$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(1,1,-2)$.
Για $\lambda_2=2$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(1,0,0)$.

(β΄) Για $\lambda_1=2$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(1,2)$.
Για $\lambda_2=-1$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(1,\frac{1}{2})$.

(γ΄) Για $\lambda_1=0$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(-i,1)$.
Για $\lambda_2=2$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(i,1)$.

5

$$AX=\lambda X\Longrightarrow(A+kI)X=(\lambda+k)X\ .$$

Για να δείξετε ότι $A^mX=\lambda^mX$, χρησιμοποιείστε επαγωγή.

6 Να χρησιμοποιήσετε την προηγούμενη άσκηση για να δείξετε ότι $Av=\lambda v\Longrightarrow(3A^2-A+2I)v=(\lambda^2-\lambda+2)v$

5.2

1 Να κάνετε χρήση της σχέσης της ορίζουσας και του ίχνους ενός πίνακα για να δείξετε ότι οι άλλες δύο ιδιοτιμές είναι οι $\pm 2i$.

2 $V_3 = \{t(1,1,-2) : t \in \mathbb{R}\}$, $V_2 = \{t(1,0,0) : t \in \mathbb{R}\}$.

3 Αν $B = S^{-1}AS$, τότε $\det(B - xI_n) = \det(A - xI_n)$. Επομένως έχουν τον ίδιο σταθερό όρο, δηλ. $\det(B) = \det(A)$. Ομοίως, έχουν τον ίδιο συντελεστή για τον όρο x^{n-1} και $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A)$

4 Η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 1, είναι 3 ενώ η γεωμετρική της πολλαπλότητα είναι ίση με 1. Η αλγεβρική πολλαπλότητα των άλλων ιδότιμών είναι 1, άρα και η γεωμετρική πολλαπλότητά τους είναι 1.

5.3

1 Ναι.

2 Ναι.

3 $a \neq b \in \mathbb{R}$

4 ΟA δεν διαγωνιοποιείται.

5 Ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

6 Ο A είναι 4×4 πίνακα. Αφού $\det(A) = 4$, έπεται ότι $\mathrm{rank}(A) = 4$. Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton προκύπτει ότι $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^3 - 2A^2 + I)$.

7 $A^{-1} = -\frac{1}{12}(-A^2 - 2A + 7I_3)$ και $A^4 = 11A^2 - 2A - 24I_3$.

8 Υπάρχουν δύο μορφές για τα μπλοκ του Jordan για την ιδιοτιμή 3 και τρεις μορφές για τα μπλοκ του Jordan για την ιδιοτιμή 1. Συνολικά, υπάρχουν 6 συνδυασμοί.

5.4

1 $\|v\| = \sqrt{30}$, $\|3v\| = 3\sqrt{30}$, $\|\frac{1}{5}v\| = \frac{\sqrt{30}}{5}$.

2 Να αναπτύξετε το εσωτερικό γινόμενο $\langle u+v, u+v\rangle$ και να παρατηρήσετε ότι $\langle u, v\rangle = 0$.

3 Παρατηρείστε ότι A^TA είναι διαγώνιος πίνακας, όπου $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε την Πρόταση 5.4.7.

4 $A^T(A^T)^T = A^TA = I_n$.

5

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

6 Ο 3×3 πίνακας έχει τρεις διακριτές ιδιοτιμές ($1, 2, 7$) και είναι διαγωνιοποιήσιμος.

8 Να παρατηρήσετε ότι $\|(1/2, 1/2)\| \neq 1$, άρα δεν υπάρχει ορθογώνιος A_1. Για τον A_2, να δείξετε πρώτα ότι $a = \pm\sqrt{15}/4$.

9 Να επιβεβαιώσετε ότι $(-1, 0, i)$ είναι ορθογώνιο ως προς το $(1, 0, i)$. Στη συνέχεια, για να βρείτε διάνυσμα $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, ορθογώνιο προς τα άλλα δύο, να λύσετε το σύστημα $a - ic = 0$, $-a - ic = 0$.

11 Να θέσετε $w = h(v)$ και να συμπεράνετε ότι $h(v) = \mathbf{0}$.

5.5

1 Αν A είναι ο πίνακας της ϕ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, τότε A^T είναι ο πίνακας της ϕ^* ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Αφού

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \phi^*(x, y, z) = (x+y-z, 2x+y+z, y)\,.$$

5 Αν $X \in \text{null}(A)$, τότε $AX = 0$ και επομένως $A^T AX = 0$, δηλ. $X \in \text{null}(A^T A)$. Αντίστροφα, αν $X \in \text{null}(A^T A)$, θα δείξουμε ότι $X \in \text{null}(A)$. Έστω $Y = AX$. Τότε

$$\langle Y, Y\rangle = \langle AX, AX\rangle = \langle X, A^T AX\rangle = \langle X, \mathbf{0}\rangle = 0$$

και επομένως $Y = 0$, δηλ. $Y \in \text{null}(A)$. Το τελικό συμπέρασμα για τις βαθμίδες των πινάκων προκύπτει από το Θεώρημα 3.4.3.

3 $\langle Av, Av\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle \Longrightarrow \langle v, A^T A\, v\rangle = \lambda^2 \langle v, v\rangle \Longrightarrow \langle v, v\rangle = \lambda^2\langle v, v\rangle$. Αφού $\langle v, v\rangle \neq 0$, έπεται ότι $\lambda = \pm 1$.

4 Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5.5, αρκεί $A = A^T$. Έτσι, η πρώτη στήλη του A είναι απόλυτα καθορισμένη. Για παράδειγμα, μπορείτε να επιλέξετε τον A να είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}\,.$$

6 Αρκεί $A = \overline{A^T}$. Για παράδειγμα, μπορείτε να επιλέξετε τον A να είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+3i \\ 1-3i & 0 \end{bmatrix}\,.$$

6.1

1 $\text{proj}_{v_1}(v) = \frac{3a+b-c}{11} v_1$, $\text{proj}_{v_2}(v) = \frac{a-2b+c}{6} v_2$, $\text{proj}_{v_3}(v) = \frac{a+4b+7c}{66} v_3$.

Για τα υπόλοιπα ερωτήματα, παρατηρούμε ότι η βάση B είναι ορθογώνια. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την Έκφραση (6.1.2.1). Επομένως, αν $U =< v_1, v_2 >$, τότε $\text{proj}_U(v) = \text{proj}_{v_1}(v) + \text{proj}_{v_2}(v)$ και $v = \text{proj}_{\mathbb{R}^3}(v) = \text{proj}_{v_1}(v) + \text{proj}_{v_2}(v) + \text{proj}_{v_3}(v)$.

2 $\text{proj}_{v_1} u = \frac{9}{25} v_1$. Για τα υπόλοιπα ερωτήματα, προχωρήστε όπως στην Άσκηση 1.

3 Η ορθογώνια βάση που προκύπτει με την εφαρμογή του Αλγορίθμου 6.1.1, παραλλαγή i είναι η $(u_1, (5, 2, -5), (-1, 5, 1))$.

4 Να βρείτε **πρώτα** μία ορθογώνια βάση για τον U ή να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο 6.1.2. $\mathrm{proj}_U(v) = \frac{1}{5}(-4, -1, 2, -3)$.

5 Να βρείτε **πρώτα** μία ορθογώνια βάση για τον U ή να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο 6.1.2. Αφού $(3, 3, 4) - \mathrm{proj}_U(3, 3, 4) = \frac{1}{3}(2, 2, -2)$, η ζητούμενη απόσταση είναι $(2\sqrt{3})/3$.

6.2

1 Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $1, i, 0$. Επομένως ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος και υπάρχει D διαγώνιος έτσι ώστε $A = SDS^{-1}$. Συνεπώς $A^{100} = SD^{100}S^{-1}$ και

$$D^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε τους πίνακες S και S^{-1} και να πολλαπλασιάσετε τους τρεις αυτούς πίνακες.

2 Όπως στο πρώτο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 6.2.3, να χρησιμοποιήσετε ότι

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle T(e_i), \text{ για κάθε } v \in \mathbb{R}^n .$$

3 $f(x, y) = (-2y + 2, x + 1)$.

4 Αφού η μία ιδιοτιμή είναι το 1 και η άλλη ιδιοτιμή έχει απόλυτη τιμή μικρότερη του 1, το σύστημα θα ισορροπήσει.

6 $f_1 = e^{3x}$, $f_2 = e^{3x} - 2e^{2x}$, $f_3 = 2e^{2x} - e^{3x}$.

7 Η καμπύλη είναι υπερβολή.

8 $(1/6, 0, 1/3)$.

9 Η ζητούμενη ευθεία είναι $y = -\frac{1}{2} + \frac{7}{5}$.