

Κεφάλαιο 5: Συναρτήσεις μεταφοράς αεροσκάφους

Μαθησιακοί στόχοι

Μετά την ανάγνωση του κεφαλαίου οι φοιτητές θα είναι σε θέση:

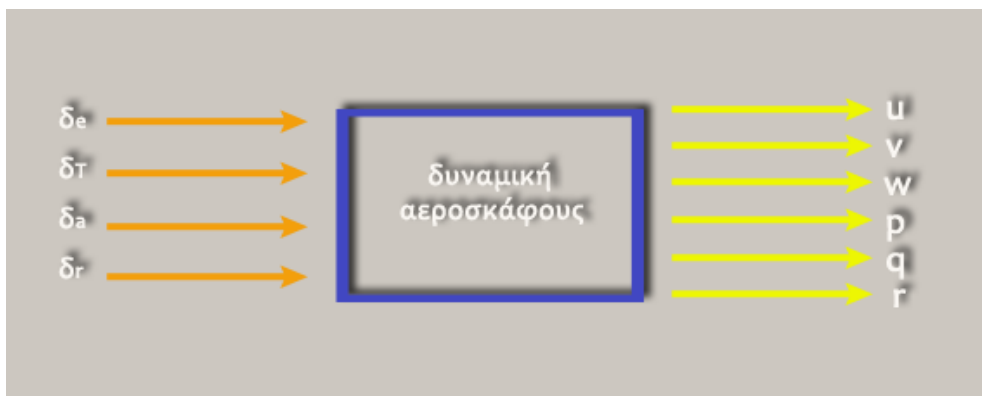
- Να χρησιμοποιούν συναρτήσεις μεταφοράς στη μελέτη της ευστάθειας και του ελέγχου αεροσκαφών
- Με τη βοήθεια των συναρτήσεων μεταφοράς αεροσκάφους να επιλύουν προβλήματα σχετικά με την απόκριση του αεροσκάφους σε εντολές του πιλότου
- Να αναγνωρίζουν τις χαρακτηριστικές κινήσεις του αεροσκάφους
- Να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τα προσεγγιστικά μοντέλα των βασικών κινήσεων του αεροσκάφους

Προαπαιτούμενη γνώση

Προαπαιτούμενες για την κατανόηση του κεφαλαίου είναι οι γνώσεις που αποκτήθηκαν στο Κεφάλαιο 4 και η γνώση των εννοιών του μετασχηματισμού Laplace και των συναρτήσεων μεταφοράς συστήματος. Απαραίτητη είναι και η γνώση επίλυσης συστημάτων εξισώσεων με τον κανόνα του Cramer.

5.1 Γενικά

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μέσα από τη διαδικασία της γραμμικοποίησης του μοντέλου κίνησης του αεροσκάφους καταλήξαμε στις γραμμικές εξισώσεις μικρών διαταραχών. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε πιο διεξοδικά τη συμπεριφορά του αεροσκάφους έπειτα από κάποια είσοδο (μέσω των επιφανειών ελέγχου) του πιλότου. Η συμπεριφορά αυτή είναι ουσιαστικά η απόκριση ανοικτού βρόγχου (όπως λέγεται στη θεωρία αυτόματου ελέγχου) του αεροσκάφους και δίνεται από τη σχέση μεταξύ κάποιας μεταβλητής εισόδου και κάποιας μεταβλητής εξόδου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι σχέσεις αυτές ορίζονται από τις συναρτήσεις μεταφοράς, δηλαδή το πηλίκο του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου προς τον μετασχηματισμό Laplace της εισόδου. Όπως θα δούμε, πρωτεύοντα ρόλο στον καθορισμό των συναρτήσεων μεταφοράς παίζουν οι παράμετροι που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ως αεροδυναμικούς παραγώγους ευστάθειας του αεροσκάφους.



Σχήμα 5.1 Μεταβλητές εισόδου και εξόδου

Για να απλοποιηθεί η ανάλυση, για μια ακόμα φορά μπορούμε να χωρίσουμε το μοντέλο της κίνησης του αεροσκάφους σε δύο ανεξάρτητα μοντέλα, που το ένα περιγράφει τη διαμήκη κίνηση και το άλλο την εγκάρσια-πορευιακή. Υπενθυμίζουμε ότι αυτό επιτρέπεται μόνο στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε μικρές

διαταραχές από μια θέση ισορροπίας και που η εξάρτηση (ζεύξη) μεταξύ διαμήκους και εγκάρσιας-ποριακής κίνησης είναι αμελητέα (βλ. π.χ., Cook, 2007, Etkin, 1996, Nelson, 1997, Raymer, 2006, Yechout, 2003).

5.2 Συναρτήσεις μεταφοράς διαμήκους κίνησης αεροσκάφους

Οι εξισώσεις κίνησης αεροσκάφους στο διάμηκες επίπεδο στην πιο απλή γραμμική τους μορφή είχαν βρεθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. εξισώσεις 4.5) και είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} m\dot{u} - uX_u - wX_w + mg\theta - qX_q &= X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_T} \delta_T \\ m\dot{w} - uZ_u - wZ_w - q(mU_e + Z_q) &= Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_T} \delta_T \\ I_y \dot{q} - uM_u - wM_w - \dot{w}M_{\dot{w}} - qM_q &= M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_T} \delta_T \end{aligned}$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace των παραπάνω εξισώσεων και θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, οι εξισώσεις μπορούν να αναχθούν ως εξής:

$$\begin{bmatrix} sm - X_u & -X_w & (mg - sX_q) \\ -Z_u & sm - Z_w & -s(mU_e + Z_q) \\ -M_u & -(sM_{\dot{w}} + M_w) & (s^2 I_y - sM_q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ w(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\delta_T} & X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_T} & Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_T} & M_{\delta_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_T(s) \\ \delta_e(s) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις (5.1) μπορούν να γραφούν πιο απλά με την εξής μορφή:

$$\mathbf{Ax}(s) = \mathbf{By}(s)$$

όπου

- A** είναι ο πίνακας του αεροσκάφους
- B** είναι ο πίνακας ελέγχου
- x** είναι το διάνυσμα των μεταβλητών εξόδου
- y** είναι το διάνυσμα των μεταβλητών εισόδου

Απόκριση γωνίας πρόνευσης ως προς το πηδάλιο ανόδου-καθόδου

Ως μια περίπτωση (case study) μπορούμε να εξετάσουμε την απόκριση της γωνίας πρόνευσης του αεροσκάφους ως προς το πηδάλιο ανόδου-καθόδου, θεωρώντας την ώση του κινητήρα σταθερή ($\delta_T(s) = 0$).

Οι εξισώσεις 5.1 τότε παίρνουν την εξής μορφή:

$$\begin{bmatrix} sm - X_u & -X_w & (mg - sX_q) \\ -Z_u & sm - Z_w & -s(mU_e + Z_q) \\ -M_u & -(sM_{\dot{w}} + M_w) & (s^2 I_y - sM_q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ w(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_T} \\ M_{\delta_T} \end{bmatrix} \delta_e(s) \quad (5.2)$$

Οι εξισώσεις 5.2 αποτελούν ένα σύστημα 3 επί 3 με άγνωστους τα $u(s)$, $w(s)$, $\theta(s)$. Ένας τρόπος για να λυθεί το σύστημα είναι να εφαρμόσουμε τον κανόνα του Cramer (για περισσότερες πληροφορίες βλ. Cook, 2007).

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Cramer για να βρούμε τη σχέση μεταξύ της μεταβλητής εξόδου $\theta(s)$ και της μεταβλητής εισόδου $\delta_e(s)$ έχουμε:

$$\theta(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} sm - X_u & -X_w & X_{\delta_e} \\ -Z_u & sm - Z_w & Z_{\delta_e} \\ -M_u & -(sM_{\dot{w}} + M_w) & M_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e(s)$$

όπου

$\Delta(s)$ είναι η ορίζουσα του πίνακα αεροσκάφους.

Ολοκληρώνοντας τις απαραίτητες πράξεις μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς που σχετίζει τον μετασχηματισμό Laplace της γωνίας πρόνευσης $\theta(s)$ με αυτόν της απόκλισης του πηδαλίου ανόδου-καθόδου $\delta_e(s)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_{\delta_e}^\theta}{\Delta(s)} = \frac{as^2 + bs + c}{\Delta(s)}$$

όπου οι συντελεστές του αριθμητή είναι:

$$\begin{aligned} a &= (m^2 M_{\delta_e} + m M_{\dot{w}} Z_{\delta_e}) \\ b &= X_\eta (M_{\dot{w}} Z_u + m M_u) + Z_{\delta_e} (m M_w - X_u M_{\dot{w}}) - M_{\delta_e} (m X_u + m Z_w) \\ c &= X_{\delta_e} (Z_u M_w - M_u Z_w) + Z_{\delta_e} (X_w M_u - M_w X_u) + M_{\delta_e} (X_u Z_w - X_w Z_u) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Αντίστοιχα, ο παρονομαστής είναι το εξής πολυώνυμο 4ου βαθμού:

$$\Delta(s) = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E$$

όπου οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι κι εκείνοι συναρτήσεις των αεροδυναμικών παραγώγων ευστάθειας:

$$\begin{aligned} A &= m^2 I_y \\ B &= -m I_y (Z_w + X_u) - m^2 M_q - m M_w (m U_e + Z_q) \\ C &= I_y (X_u Z_w - X_w Z_u) + (Z_q + m U_e) X_u M_{\dot{w}} - Z_u X_q M_{\dot{w}} + m (X_u M_q - X_q M_u) + m (M_q Z_w - M_w Z_q) - m^2 U_e M_{\dot{w}} \\ D &= M_q (Z_u X_w - X_u Z_w) + (m U_e + Z_q) (X_u M_w - X_w M_u) - X_q (Z_u M_w - Z_w M_u) - m g Z_u M_{\dot{w}} + m^2 g M_u \\ E &= m g (Z_u M_w - M_u Z_w) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Η εξίσωση που σχηματίζεται όταν το πολυώνυμο τεθεί ίσο με το μηδέν ορίζει τη διαμήκη χαρακτηριστική εξίσωση του αεροσκάφους και συνήθως παραγοντοποιείται σε δύο ζεύγη μιγαδικών ριζών. Το ένα ζεύγος περιγράφει την ταλαντευόμενη κίνηση που ονομάζεται *short period* (βραχείας περιόδου) και το άλλο περιγράφει την ταλαντευόμενη κίνηση που ονομάζεται *phugoid* (φυγοειδής).

Έτσι, ο παρονομαστής μπορεί να γραφεί κι ως εξής:

$$\Delta(s) = A(s^2 + 2\zeta_s \omega_s s + \omega_s^2)(s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2)$$

Όπως και με την πρόνευση, έτσι και οι υπόλοιπες συναρτήσεις μεταφοράς της απόκρισης στο πηδάλιο ανόδου-καθόδου μπορούν να ορισθούν ως εξής:

$$\frac{w(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_{\delta_e}^w}{\Delta(s)} \quad \text{και} \quad \frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_{\delta_e}^u}{\Delta(s)}$$

5.3 Τα είδη διαμήκους κίνησης

Η χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

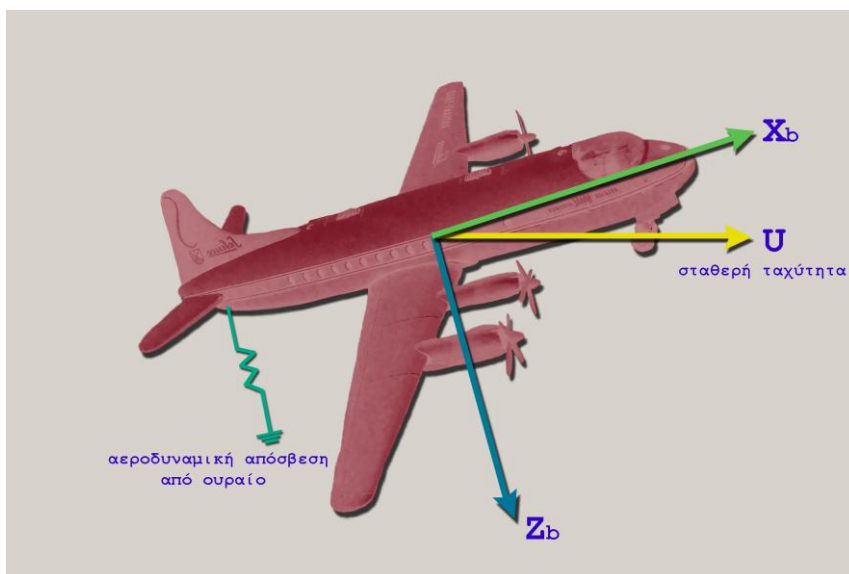
$$\Delta(s) = (s^2 + 2\zeta_s \omega_s s + \omega_s^2)(s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2) = 0$$

Στο σημείο αυτό θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά τις δυο ταλαντώσεις που προκύπτουν από την παραπάνω χαρακτηριστική εξίσωση.

5.3.1 Η ταλάντωση short period

Η short period ταλάντωση είναι μια ταλάντωση με απόσβεση σε πρόνευση γύρω από τον άξονα y_b . Όταν το αεροσκάφος διαταράσσεται από την κατάσταση ισορροπίας πρόνευσης, η κίνηση διεγείρεται και παρουσιάζεται ως μια ταλάντωση, στην οποία οι βασικές μεταβλητές που επηρεάζονται είναι οι θ, q, w . Σε αυτό το σημείο αξίζει να θυμίσουμε ότι $q = \dot{\theta}$. Η συχνότητα της ταλάντωσης βρίσκεται συνήθως μεταξύ 2 και 10 rad/s και η απόσβεση είναι θετική αν και πολλές φορές ανεπαρκής. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της short period ταλάντωσης είναι ότι η διαμήκης ταχύτητα παραμένει περίπου σταθερή (οπότε για τη διαταραχή ισχύει, $u = 0$).

Η φυσική κατάσταση μπορεί να απεικονισθεί εάν φαντασθούμε το αεροσκάφος να συγκρατείται σε πρόνευση από ένα ελατήριο γύρω από τον άξονα y_b . Μια διαταραχή σε πρόνευση έχει αποτέλεσμα μια ροπή αντίδρασης από το ελατήριο ξεκινώντας μία ταλάντωση. Στην πτήση, η απόσβεση δημιουργείται αεροδυναμικά κυρίως από το οριζόντιο σταθερό. Στην πραγματικότητα, βεβαίως, η παρατηρούμενη κίνηση οφείλεται σε έναν αριθμό από παραμέτρους.



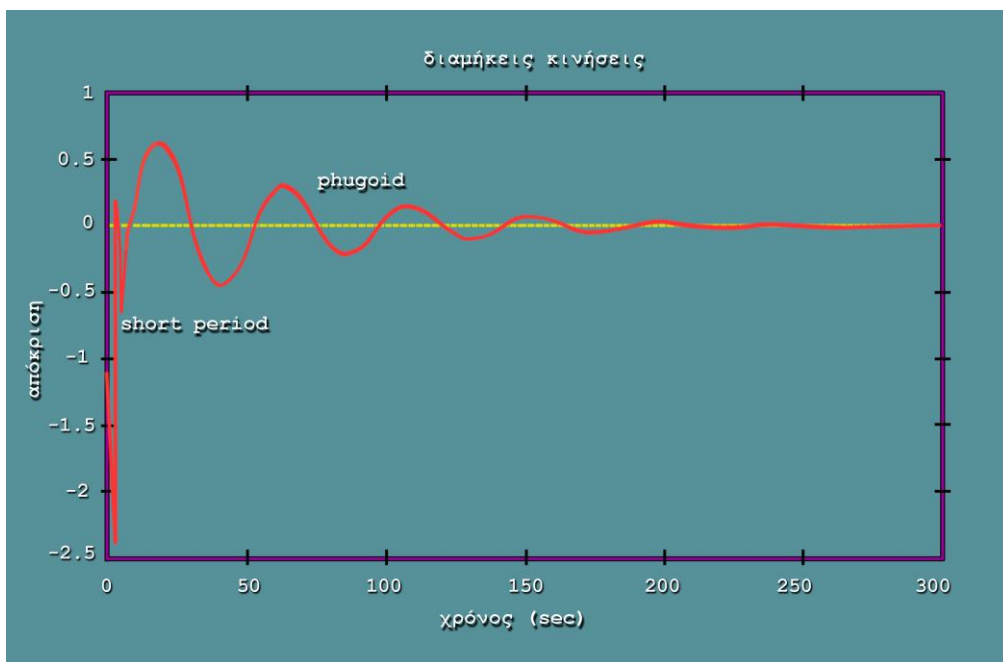
Σχήμα 5.2 Ταλάντωση short period

5.3.2 Η ταλάντωση phugoid

Η ταλάντωση phugoid είναι συνήθως μια ταλάντωση χαμηλής συχνότητας και απόσβεσης της ταχύτητας και του ύψους. Όποτε η ταχύτητα του αεροσκάφους διαταράσσεται από την τιμή ισορροπίας, η άντωση του αεροσκάφους μεταβάλλεται επίσης με αποτέλεσμα αυτό να κερδίζει ή να χάνει ύψος. Η ταλάντωση συνίσταται σε μια ημιτονοειδή κίνηση με απόσβεση γύρω από το αρχικό ύψος, όπου οι βασικές μεταβλητές που επηρεάζονται είναι η ταχύτητα u , η πρόνευση θ και το ύψος h . Αξίζει να σημειώσουμε ότι στις διαφορικές εξισώσεις που χρησιμοποιήσαμε για να περιγράψουμε τη διαμήκη κίνηση του αεροσκάφους δεν είχαμε συμπεριλάβει το ύψος ως μια από τις μεταβλητές κατάστασης, κάτι το οποίο όμως είναι εφικτό με την κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία.

Η κίνηση είναι τέτοια που η μεταβολή στην ταχύτητα είναι η μέγιστη όταν η μεταβολή στο ύψος είναι η ελάχιστη και αντίστροφα. Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης, η γωνία προσβολής α παραμένει σταθερή. Η περίοδος της phugoid είναι συνήθως μεταξύ 50 και 100 s και ο συντελεστής απόσβεσης είναι χαμηλός (συνήθως πολύ κοντά στο μηδέν). Μια καλή προσέγγιση του φαινομένου είναι ότι η ταλάντωση μπορεί να θεωρηθεί μια ανταλλαγή κινητικής και δυναμικής ενέργειας με κάποιες απώλειες λόγω της επίδρασης της οπισθέλκουσας.

Τέλος, είναι σημαντικό να ξεκαθαριστεί ένα σημείο που συχνά μπερδεύει τον σπουδαστή. Οι δυο κινήσεις που περιγράψαμε προηγουμένως μπορεί να εξετάζονται ως ξεχωριστές, αλλά στην πραγματικότητα διαδραματίζονται ταυτόχρονα, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 5.3). Ενώ η phugoid έχει μόλις ξεκινήσει, η short period έχει ήδη σχεδόν αποσβεστεί. Για κάποια δευτερόλεπτα, όμως, οι δυο κινήσεις συνυπάρχουν προτού η (συνήθως πολύ πιο αργή) phugoid συνεχίσει (αν δεν υπάρχει παρέμβαση του πιλότου) να εξελίσσεται μόνη της.



Σχήμα 5.3 Ταυτόχρονες phugoid και short period κινήσεις

Η διαμήκης δυναμική ευστάθεια παίζει καθοριστικό ρόλο στην ευκολία χειρισμού του αεροσκάφους και πρέπει οπωσδήποτε να είναι η επιθυμητή. Κάθε φορά που το αεροσκάφος διαταράσσεται ως απόκριση σε εντολές του πιλότου, οι κινήσεις που περιγράφηκαν διεγείρονται και δεν είναι δύσκολο να κατανοήσει κανείς τον σημαντικό ρόλο που παίζουν τα χαρακτηριστικά τους στην πλοήγηση.

Ο βαθμός δυσκολίας χειρισμού του αεροσκάφους ονομάζεται *πητική ικανότητα* και θα περιγραφεί αναλυτικά σε παρακάτω κεφάλαιο. Πολύ χοντρικά, πάντως, μπορούμε να πούμε ότι είναι απαραίτητο η short

period κίνηση, η οποία έχει περίπου την ίδια συχνότητα με αυτή του πιλότου (δηλαδή με το πόσο γρήγορα μπορεί να αντιδράσει εκείνος), να έχει μεγάλο συντελεστή απόσβεσης, αλλιώς είναι πιθανό να παρουσιαστούν σημαντικά προβλήματα στον χειρισμό του αεροσκάφους. Από την άλλη, επειδή η συχνότητα της phugoid είναι πολύ χαμηλότερη, ο μέσος πιλότος δεν έχει πρόβλημα να ελέγξει αυτή την κίνηση ακόμα και αν είναι ασταθής. Σε γενικές γραμμές, πάντως, είναι προτιμότερο να είναι τουλάχιστον ευσταθής και η συχνότητά της να είναι περίπου το ένα δέκατο αυτής της short period, ώστε να αποφεύγεται η ζεύξη μεταξύ των δυο κινήσεων.

Παράδειγμα

Αεροσκάφος κινείται με ταχύτητα 93 m/s και η συνάρτηση μεταφοράς αεροσκάφος για τη γωνία πρόνευσης ως προς την κλίση του πηδαλίου ανόδου-καθόδου είναι,

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_{\delta_e}^0}{\Delta(s)} = \frac{-4,66(s+0,14)(s+0,27)}{(s^2+0,89s+4,88)(s^2+0,033s+0,022)}$$

Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά των κινήσεων short period και phugoid, η τελική τιμή της πρόνευσης για είσοδο βήμα πλάτους 1 μοίρας και η απόκριση του αεροσκάφους σε πρόνευση για είσοδο βήμα πλάτους 1 μοίρας.

Λύση:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αεροσκάφους είναι:

$$\Delta(s) = (s^2 + 0,89s + 4,88)(s^2 + 0,033s + 0,022)$$

Συμπεραίνουμε ότι το πρώτο τριώνυμο, αφού ο τελευταίος του όρος –που είναι το τετράγωνο της ιδιοσυχνότητας– είναι μεγαλύτερος από τον τελευταίο όρο του δεύτερου τριωνύμου, αντιστοιχεί στην κίνηση short period.

Η γενική μορφή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι:

$$\Delta(s) = (s^2 + 2\zeta_s \omega_s s + \omega_s^2)(s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2)$$

Συγκρίνοντας τις δυο εκφράσεις προκύπτουν τα εξής:

Ιδιοσυχνότητα short period = 2,21 rad/s

Σταθερά απόσβεσης short period = 0,20

Ιδιοσυχνότητα phugoid = 0,15 rad/s

Σταθερά απόσβεσης phugoid = 0,011

Το αρνητικό πρόσημο της συνάρτησης μεταφοράς δείχνει ότι μια θετική απόκλιση του πηδαλίου ανόδου-καθόδου έχει αποτέλεσμα μία αρνητική μεταβολή της γωνίας πρόνευσης (nose down).

Για να βρούμε την απόκριση της γωνίας πρόνευσης σε βηματική είσοδο (μιας μοίρας) του πηδαλίου ανόδου-καθόδου, θέτουμε $\delta_e(s) = \frac{1}{s}$ κι έτσι έχουμε:

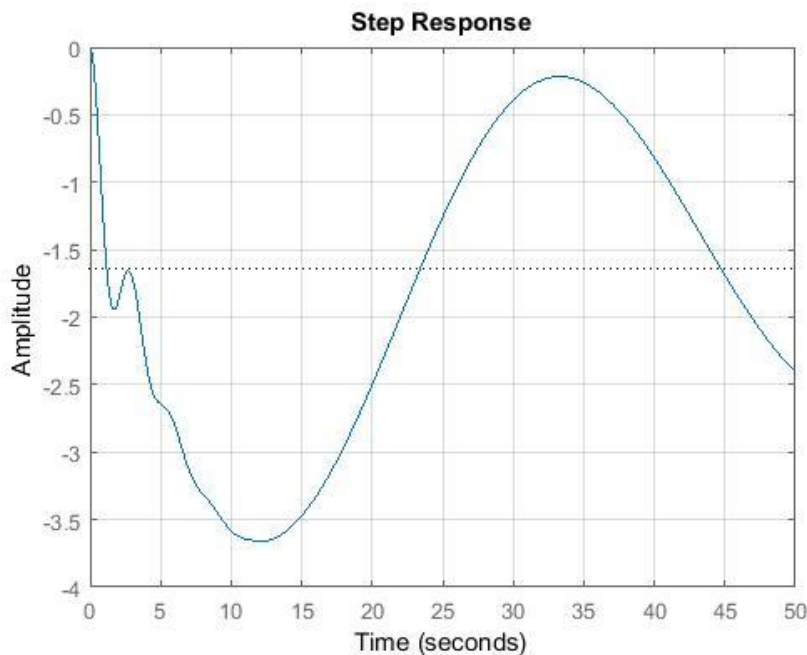
$$\theta(s) = \frac{-4,66(s+0,14)(s+0,27)}{s(s^2+0,89s+4,88)(s^2+0,033s+0,022)}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της τελικής τιμής για τους μετασχηματισμούς Laplace, προκύπτει:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\theta(s) = \frac{-4,66(0,14)(0,27)}{(4,88)(0,022)} = -1,64$$

Παρατηρούμε ότι για $s = 0$ η τελική τιμή της $\theta = -1,64$ μοίρες, οπότε αυτή θα είναι η τελική τιμή της πρόνευσης.

Χρησιμοποιώντας κάποιο κατάλληλο λογισμικό (π.χ. το Matlab®), μπορούμε να βρούμε τη ζητούμενη απόκριση του αεροσκάφους.



Παράδειγμα 5.1 Διαμήκεις κινήσεις αεροσκάφους

Παρατηρούμε στα πρώτα περίπου 5 δευτερόλεπτα την εμφάνιση της short period ταλάντωσης (που στη συνέχεια αποσβήνει). Μετά τα πρώτα δευτερόλεπτα η μόνη κίνηση που παραμένει είναι η phugoid.

5.4 Συναρτήσεις μεταφοράς εγκάρσιας-πορειακής κίνησης αεροσκάφους

Από το προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις κίνησης αεροσκάφους στο εγκάρσιο-πορειακό επίπεδο είναι δυνατόν στη γραμμική τους μορφή να γραφούν ως εξής:

$$m\dot{v} - vY_v - pY_p + r(mU_e - Y_r) - mg\phi = Y_{\delta_\alpha} \delta_\alpha + Y_{\delta_r} \delta_r$$

$$-vL_v + \dot{p}I_x - pL_p - \dot{r}I_{xz} - rL_r = L_{\delta_\alpha} \delta_\alpha + L_{\delta_r} \delta_r$$

$$-vN_v - \dot{p}I_{xz} - pN_p + \dot{r}I_z - rN_r = N_{\delta_\alpha} \delta_\alpha + N_{\delta_r} \delta_r$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες καθώς και $W_e = \theta_e = 0$, οι εξισώσεις μπορούν να ξαναγραφούν ως εξής:

$$\begin{bmatrix} sm - Y_v & -(sY_p + mg) & s(mU_e - Y_r) \\ -L_v & s(sI_x - L_p) & -s(sI_{xz} + L_r) \\ -N_v & -s(sI_{xz} + N_p) & s(sI_y - N_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(s) \\ \phi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{\delta_a} & Y_{\delta_r} \\ L_{\delta_a} & L_{\delta_r} \\ N_{\delta_a} & N_{\delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a(s) \\ \delta_r(s) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Παρατηρούμε ότι μεταβλητές εξόδου έχουμε επιλέξει τις γωνιακές αποκλίσεις ϕ , ψ . Εάν το θέλαμε, θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει, αντί για τις κλίσεις, τις γωνιακές ταχύτητες.

Απόκριση γωνίας διατοιχισμού στα πηδάλια ελέγχου κλίσης

Ως μια περίπτωση (case study), ας εξετάσουμε την απόκριση της κλίσης διατοιχισμού του αεροσκάφους στα πηδάλια κλίσης, θεωρώντας το πηδάλιο διεύθυνσης σταθερό ($\delta_r(s) = 0$).

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Cramer (και θέτοντας επίσης $\delta_r(s) = 0$), για να βρούμε τη σχέση μεταξύ της μεταβλητής εξόδου $\phi(s)$ και της μεταβλητής εισόδου $\delta_a(s)$ έχουμε:

$$\phi(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} sm - Y_v & Y_{\delta_a} & s(mU_e - Y_r) \\ -L_v & L_{\delta_a} & -s(sI_{xz} + L_r) \\ -N_v & N_{\delta_a} & s(sI_z - N_r) \end{bmatrix} \delta_a(s)$$

όπου

$\Delta(s)$ είναι η ορίζουσα του πίνακα αεροσκάφους.

Η συνάρτηση μεταφοράς που σχετίζει τη γωνία διατοιχισμού $\phi(s)$ με την απόκλιση των πηδαλίων κλίσης $\delta_a(s)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\frac{\phi(s)}{\delta_a(s)} = \frac{N_{\delta_a}^\phi}{\Delta(s)} = \frac{as^3 + bs^2 + cs + d}{\Delta(s)}$$

όπου οι συντελεστές του αριθμητή είναι συναρτήσεις των παραγώγων ευστάθειας και ο παρονομαστής είναι πάντοτε πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού:

$$\Delta(s) = s(As^4 + Bs^3 + C^2 + Ds + E)$$

όπου οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι και αυτοί συναρτήσεις των αεροδυναμικών παραγώγων ευστάθειας.

Η εξίσωση που σχηματίζεται όταν το πολυώνυμο τεθεί ίσο με μηδέν ορίζει την εγκάρσια-πορεία χαρακτηριστική εξίσωση του αεροσκάφους και συνήθως παραγοντοποιείται σε μια ρίζα στο μηδέν, ένα ζεύγος μιγαδικών ριζών και σε δύο πραγματικές ρίζες. Το ζεύγος των μιγαδικών ριζών περιγράφει την ταλαντευόμενη κίνηση που ονομάζεται *Dutch roll* και οι πραγματικές ρίζες τις κινήσεις *roll subsidence* και *spiral*.

Έτσι, ο παρονομαστής μπορεί να γραφεί:

$$\Delta(s) = As(s^2 + 2\zeta_{DR}\omega_{DR}s + \omega_{DR}^2)(sT_R + 1)(sT_S + 1)$$

Παρομοίως, οι υπόλοιπες συναρτήσεις μεταφοράς της απόκρισης στα πηδάλια κλίσης μπορούν να ορισθούν ως εξής:

$$\frac{\psi(s)}{\delta_a(s)} = \frac{N_{\delta_a}^\psi}{\Delta(s)} \quad \text{και} \quad \frac{v(s)}{\delta_a(s)} = \frac{N_{\delta_a}^v}{\Delta(s)}.$$

5.5 Τα είδη εγκάρσιας κίνησης

Όπως και για τη διαμήκη περίπτωση, ο παρονομαστής των συναρτήσεων μεταφοράς των εγκάρσιων πορευτικών μεταβλητών, καθορίζει τα διαφορετικά είδη κινήσεων.

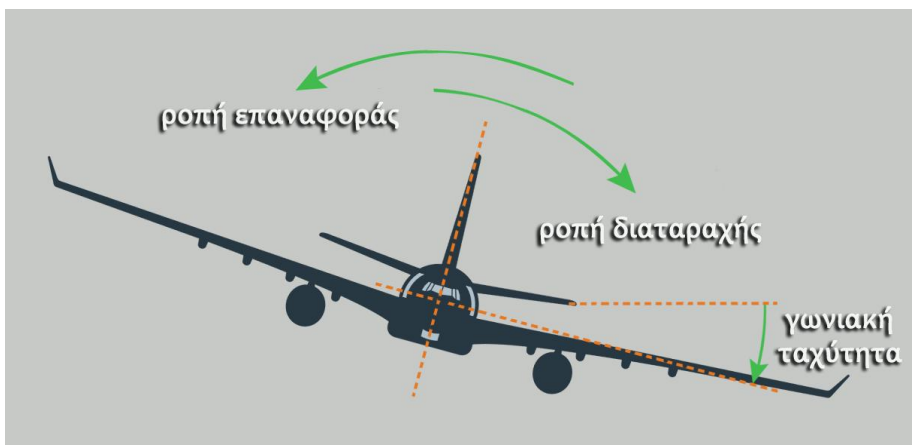
5.5.1 Η μηδενική ρίζα

Η μηδενική ρίζα μπορεί να αφαιρεθεί από τη χαρακτηριστική εξίσωση υποθέτοντας ότι για μικρές διαταραχές, $s\psi(s) = r(s)$. Μια μηδενική ρίζα στη χαρακτηριστική εξίσωση ενός γραμμικού συστήματος υποδηλώνει οριακή ευστάθεια και στην προκειμένη περίπτωση οφείλεται στο ότι η γωνία πορείας ψ του αεροσκάφους δεν επηρεάζει τη δυναμική του.

5.5.2 Η κίνηση roll subsidence

Η κίνηση που περιγράφεται από την πραγματική ρίζα $s = -\frac{1}{T_R}$ ονομάζεται roll subsidence. Η ρίζα είναι πάντοτε αρνητική και συνήθως αρκετά μεγαλύτερη (σε απόλυτη τιμή) από τη δεύτερη πραγματική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Η κίνηση roll subsidence είναι έτσι συνήθως ευσταθής, αν και μπορεί να γίνει ασταθής για μεγάλες διαταραχές όπου οι γραμμικές εξισώσεις μικρών διαταραχών παύουν να δίνουν ακριβή αποτελέσματα. Εμφανίζεται ως μια εκθετική σύγκλιση σε κίνηση διατοιχισμού γύρω από τον άξονα x_b του αεροσκάφους. Ουσιαστικά, αυτό που συμβαίνει είναι ότι όταν το αεροσκάφος διαταραχθεί, αποκτά εκθετικά μια νέα γωνιακή ταχύτητα διατοιχισμού. Η κίνηση είναι, λοιπόν, μια εκθετική καθυστέρηση με σταθερά χρόνου T_R συνήθως μικρότερη του 1 s.



Σχήμα 5.4 Κίνηση roll subsidence

Επιγραμματικά, μπορούμε να πούμε ότι εξαιτίας κάποιας εξωτερικής ροπής (ατμοσφαιρικής διαταραχής ή εντολής του πιλότου) το αεροσκάφος αποκτά μια γωνιακή επιτάχυνση και στρέφεται προς τη μια πλευρά. Λόγω της περιστροφικής κίνησης όμως, στη μια πτέρυγα δημιουργείται μεγαλύτερη άντωση από

ό,τι στην άλλη. Έτσι, αναπτύσσεται μια αντίθετη ροπή η οποία μειώνει τη γωνιακή επιτάχυνση μέχρι εκείνη να μηδενιστεί. Ως αποτέλεσμα το αεροσκάφος βλέπει τη γωνιακή του ταχύτητα να αυξάνεται με συνεχώς μικρότερο ρυθμό μέχρι να αποκτήσει μια σταθερή τιμή.

5.5.3 Η κίνηση spiral

Η κίνηση spiral περιγράφεται από τη δεύτερη πραγματική ρίζα $s = -\frac{1}{T_S}$.

Συνήθως, η σταθερά T_S είναι μεγαλύτερη από την T_R . Επίσης, η ρίζα μπορεί να είναι είτε αρνητική είτε θετική, κάτι που υποδηλώνει ότι η κίνηση μπορεί να είναι ευσταθής ή ασταθής. Στην πραγματικότητα βρίσκεται συνήθως κοντά στο μηδέν, δηλαδή έχουμε ουδέτερη ευστάθεια.

Η spiral κίνηση, λοιπόν, μπορεί να είναι μια εκθετική σύγκλιση ή απόκλιση. Το αποτέλεσμα, όταν η κίνηση είναι ασταθής, είναι μία σπιδράλ βουτιά. Επειδή η σταθερά χρόνου είναι μεγάλη, σε απόλυτη τιμή συνήθως πάνω από 100 s, η κίνηση αργεί να εξελιχθεί.

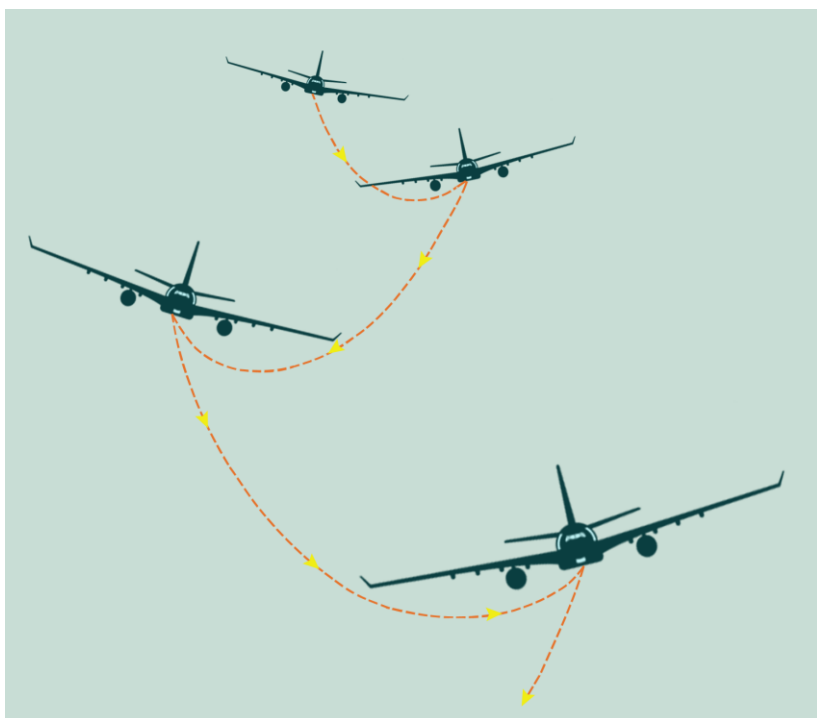
Σε σχέση με τις αεροδυναμικές παραγώγους ευστάθειας μπορεί ναδειχθεί ότι η συνθήκη για ευστάθεια της spiral είναι η εξής:

$$L_v N_r > L_r N_v$$

Από πρακτικής άποψης αυτό που συμβαίνει είναι ότι δυο σχεδιαστικοί παράγοντες του αεροσκάφους επιδρούν διαφορετικά στην κίνηση. Η διέδρη γωνία είναι εκείνη η οποία προσδίδει ευστάθεια στην κίνηση spiral, ενώ το κάθετο σταθερό οδηγεί την κίνηση σε αποσταθεροποίηση. Επειδή οι δυο επιδράσεις συνήθως αναιρούν (στο περίπου) η μια την άλλη, η κίνηση spiral έχει συνήθως τα χαρακτηριστικά ουδέτερης ευστάθειας.

5.5.4 Η κίνηση Dutch roll

Η κίνηση Dutch roll ονομάζεται έτσι, διότι λέγεται πως μοιάζει με την κίνηση ενός Ολλανδού που κάνει πατινάζ στον πάγο. Είναι μία κλασική ταλάντωση με απόσβεση, συνδυασμός εκτροπής και διατοιχισμού. Από αυτή την άποψη ο φυσικός μηχανισμός που τη δημιουργεί είναι αρκετά περίπλοκος. Επιγραμματικά, πάντως, μπορούμε να τη θεωρήσουμε ως την εγκάρσια εκδοχή της διαμήκους short period, με παρόμοια συχνότητα αλλά συνήθως μικρότερη απόσβεση. Η μικρότερη απόσβεση οφείλεται στο γεγονός ότι το κάθετο σταθερό λειτουργεί λιγότερο αποτελεσματικά ως αποσβεστήρας από όσο το οριζόντιο σταθερό. Αυτός είναι και ο λόγος που, όπως θα δούμε παρακάτω, πολλά συμβατικά αεροσκάφη χρησιμοποιούν κάποιο ΣΑΕ, ώστε να υπάρξει προσθήκη τεχνητής ευστάθειας για την κίνηση αυτή.



Σχήμα 5.5 Κίνηση Dutch roll

Όπως ίσχυε και στη διαμήκη περίπτωση έτσι και τώρα για την εγκάρσια, είναι απαραίτητο και οι δυο κινήσεις με μεγάλη συχνότητα (roll subsidence και Dutch roll) να διαθέτουν επαρκή απόσβεση, αλλιώς μπορεί να προκύψουν προβλήματα χειρισμού.

Για τη roll subsidence κίνηση υπάρχει και η περίπτωση η σταθερά χρόνου να είναι υπερβολικά μεγάλη, οπότε και το αεροσκάφος να αργεί πολύ να αντιδράσει στις εντολές του πιλότου. Από την άλλη, αν η απόσβεση δεν είναι επαρκής, το αεροσκάφος μπορεί να αντιδρά πιο γρήγορα από το επιθυμητό. Έτσι, οι παραπάνω προδιαγραφές συνήθως ορίζουν μια κατώτερη και μια ανώτερη τιμή για την απόσβεση της κίνησης αυτής.

Η κίνηση spiral, όταν είναι ασταθής, προκαλεί σταδιακή απόκλιση στο αεροσκάφος, κάτι που μπορεί να είναι προβληματικό εάν η σταθερά του χρόνου της κίνησης είναι μικρή (σε απόλυτη τιμή). Ιδιαίτερα προβλήματα μπορούν να δημιουργηθούν εάν η εξωτερική ορατότητα του πιλότου είναι περιορισμένη, αφού είναι εύκολο να αποπροσανατολιστεί, κάτι που μπορεί να επιφέρει καταστρεπτικά αποτελέσματα. Ο γενικός κανόνας, λοιπόν, είναι ότι κατά προτίμηση η spiral κίνηση πρέπει να είναι ευσταθής και αν αυτό δεν είναι εφικτό, η σταθερά χρόνου (ή πιο σωστά ο χρόνος διπλασιασμού του πλάτους) να είναι ανώτερη κάποιας κατώτερης τιμής.

Οι απαιτήσεις της Dutch roll κίνησης είναι παρόμοιες με αυτές της short period. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, πρέπει να έχει επαρκή απόσβεση για να αποφεύγονται προβλήματα χειρισμού.

Τέλος, όπως συμβαίνει και για τις διαμήκεις κινήσεις, ενώ οι κινήσεις roll subsidence, spiral, Dutch roll μελετώνται ξεχωριστά, στην πραγματικότητα συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Παράδειγμα

Αεροσκάφος έχει το ακόλουθο χαρακτηριστικό πολυώνυμο εγκάρσιας-πορείακής ευστάθειας:

$$\Delta(s) = s(s + 1,254)(s + 0,004)(s^2 + 0,22s + 2,235)$$

Να μελετηθούν τα χαρακτηριστικά της εγκάρσιας - πορείατικής δυναμικής ευστάθειας.

Λύση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και ένα ζεύγος μιγαδικών. Γνωρίζουμε ότι οι μιγαδικές ρίζες ανταποκρίνονται στην ταλάντωση Dutch roll. Έτσι, έχουμε:

$$\omega_{DR} = \sqrt{2,235} \Rightarrow \omega_{DR} = 1,49 \text{ rad/s}$$

Επίσης:

$$2\zeta_{DR}\omega_{DR} = 0,22 \Rightarrow \zeta_{DR} = \frac{0,22}{2 \cdot 1,49} \Rightarrow \zeta_{DR} = 0,07$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι η κίνηση spiral έχει ρίζα κοντά στο μηδέν, οπότε:

$$\frac{1}{T_s} = 0,004 \Rightarrow T_s = 250 \text{ s}$$

Τέλος, για την κίνηση roll subsidence:

$$\frac{1}{T_R} = 1,254 \Rightarrow T_R = 0,8 \text{ s}$$

5.6 Προσεγγιστικά μοντέλα κινήσεων

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε πιο απλά την απόκριση μεταβλητών, πολλές φορές χρησιμοποιούμε προσεγγίσεις για τη μελέτη των επιμέρους κινήσεων. Ειδικά για το διάμηκες επίπεδο, οι προσεγγίσεις αυτές, αν και απλοποιούν σε μεγάλο βαθμό τους υπολογισμούς, δίνουν τα αποτελέσματα με σχετικά μεγάλη ακρίβεια. Για το εγκάρσιο επίπεδο η ακρίβεια είναι μικρότερη. Παρακάτω δίνονται οι υποθέσεις και οι τύποι που προκύπτουν από την κάθε προσέγγιση.

Short period προσέγγιση

Υποθέσεις:

Η διαταραχή της οριζόντιας ταχύτητας είναι ίση με μηδέν, $u = 0$.

$$mU_e \gg Z_q$$

Τύποι:

$$\omega_s^2 = \left[\frac{Z_w M_q}{m I_y} - \frac{U_e M_w}{I_y} \right]$$

$$2\zeta_s \omega_s = - \left[\frac{M_q}{I_y} + \frac{Z_w}{m} + \frac{U_e M_{\dot{w}}}{I_y} \right]$$

Phugoid προσέγγιση

Υποθέσεις:

Η γωνία προσβολής α παραμένει σταθερή.

Η ώση είναι ίση με την οπισθέλκουσα.

Η συνολική μηχανική ενέργεια του αεροσκάφους παραμένει σταθερή.

Τύποι:

$$\omega_p = \frac{g\sqrt{2}}{U_e}$$

$$\zeta_p = 0$$

Roll subsidence προσέγγιση

Υποθέσεις:

Η κίνηση του αεροσκάφους συντελείται μόνο γύρω από τον άξονα x_b .

Τύποι:

$$T_R = -\frac{I_x}{L_p}$$

Spiral προσέγγιση

Για την κίνηση αυτή χρειάζονται πολλές υποθέσεις και η προσέγγιση γίνεται με μικρή σχετικά ακρίβεια.

Τύποι:

$$T_S = \frac{U_e(L_v N_p - N_v L_p)}{g(L_v N_r - N_v L_r)}$$

Dutch roll προσέγγιση

Υποθέσεις:

Η μεταβολή σε διατοιχισμό στην κίνηση είναι αμελητέα.

Τύποι:

$$\omega_{DR}^2 = \left[\frac{Y_v N_r}{m I_z} + \frac{U_e N_v}{I_z} \right]$$

$$2\zeta_{DR} \omega_{DR} = -\left[\frac{N_r}{I_z} + \frac{Y_v}{m} \right]$$

Παράδειγμα

Να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση phugoid για να βρεθούν τα χαρακτηριστικά της κίνησης για το αεροσκάφος του παραδείγματος της ενότητας 5.3.2.

Λύση:

Από το παράδειγμα γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του αεροσκάφους είναι 93 m/s.

Η προσέγγιση της phugoid δίνει:

$$\omega_p = \frac{g\sqrt{2}}{U_e} = \frac{9,81 \cdot \sqrt{2}}{93} = 0,15 \text{ rad/s}$$

$$\zeta_p = 0$$

Θυμίζουμε ότι χρησιμοποιώντας τις πλήρεις εξισώσεις μικρών διαταραχών, οι αντίστοιχες απαντήσεις ήταν:

$$\omega_p = 0,15 \text{ rad/s}$$

$$\zeta_s = 0,011$$

Συμπεραίνουμε ότι για τη συγκεκριμένη περίπτωση, η προσέγγιση της κίνησης phugoid είναι ακριβής στον προσδιορισμό της ιδιοσυχνότητας αλλά λιγότερο ακριβής στον προσδιορισμό του συντελεστή απόσβεσης.

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε την εξαγωγή των συναρτήσεων μεταφοράς του αεροσκάφους και τις χαρακτηριστικές κινήσεις του αεροσκάφους που απορρέουν από αυτές. Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο τα χαρακτηριστικά των κινήσεων αυτών επηρεάζουν τις πτητικές ικανότητες.

Βιβλιογραφία

Cook, M.V. (2007): Flight Dynamics Principles (2nd edition), Elsevier

Etkin, B., Reid, L.D. (1996): Dynamics of Flight: Stability and Control (3rd edition), John Wiley & Sons, Inc.

Nelson, R. (1997): Flight Stability and Automatic Control (2nd edition), McGraw-Hill
Science/Engineering/Math

Raymer, D.P. (2006): Aircraft Design: A Conceptual Approach (4th edition), American Institute of Aeronautics & Ast.

Yechout, T.R., Morris, S.L., Bossert, D.E., Hallgren, W.F. (2003): Introduction to Aircraft Flight Mechanics: Performance, Static Stability, Dynamic Stability, and Classical Feedback Control, American Institute of Aeronautics & Ast.