Κεφάλαιο 6

6. Δάνεια

6.1. Γενικά

Το σημαντικότερο και σίγουρα το πιο διαδεδομένο κεφάλαιο των οικονομικών μαθηματικών είναι αυτό των δανείων. Κράτη, δημόσιοι οργανισμοί, επιχειρήσεις αλλά και ιδιώτες χρειάζονται χρήματα για τις ανάγκες τους και έτσι καταφεύγουν στη λύση του δανεισμού.

Με τον όρο **Δάνειο** ονομάζουμε κάθε ποσό που δίνεται, συνήθως εντόκως, και πρέπει να επιστραφεί μετά από καθορισμένο χρόνο. Ο χρόνος που μεσολαβεί από την έναρξη μέχρι τη λήξη του δανείου ονομάζεται **διάρκεια του δανείου.**

Ανάλογα με τη διάρκεια αποπληρωμής του δανείου προκύπτουν οι ακόλουθες κατηγορίες:

- Βραχυπρόθεσμα δάνεια είναι αυτά των οποίων η διάρκεια είναι μικρότερη από 1 έτος.
- Μακροπρόθεσμα δάνεια είναι αυτά των οποίων η διάρκεια είναι μεγαλύτερη από 1 έτος.

Στα βραχυπρόθεσμα δάνεια συνήθως χρησιμοποιούμε τον απλό τόκο ενώ στα μακροπρόθεσμα τον ανατοκισμό.

Τα μακροπρόθεσμα δάνεια ανάλογα με τον τρόπο που εξοφλούνται χωρίζονται σε πάγια και σε εξοφλητέα.

Πάγια ονομάζονται τα δάνεια που δεν έχουν συγκεκριμένη διάρκεια εξόφλησης, αλλά ο οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να πληρώνει τους τόκους στο τέλος κάθε περιόδου. Έτσι το δάνειο μπορεί να εξοφληθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή πληρώνοντας το αρχικό ποσό.

Εξοφλητέα ονομάζονται τα δάνεια που έχουν συγκεκριμένη διάρκεια.

Τα εξοφλητέα δάνεια χωρίζονται και αυτά σε δύο κατηγορίες, τα εφάπαξ και τα τοκοχρεολυτικά.

- Εξοφλητέα εφάπαξ δάνεια ονομάζονται αυτά που εξοφλούνται με μία δόση.
- Εξοφλητέα τοκοχρεωλυτικά δάνεια ονομάζονται αυτά που εξοφλούνται με περισσότερες από μία δόσεις.

Με τον όρο Τοκοχρεολύσιο ονομάζουμε το ποσό που δίνεται από τον οφειλέτη σε κάθε περίοδο και περιλαμβάνει τους τόκους και το χρεολύσιο. Η κάθε δόση χωρίζεται σε δύο μέρη, ένα μέρος αφορά την αποπληρωμή του αρχικού κεφαλαίου (Χρεολύσιο) και το άλλο μέρος αφορά την αποπληρωμή των τόκων.

Η απόσβεση ενός δανείου μπορεί να γίνει με τους ακόλουθους τρόπους:

I. Εξοφλητέα εφάπαξ.
II. Εξοφλητέα με ίσα μέρη κεφαλαίων.
III. Εξοφλητέα με τη μέθοδο σταθερού χρεολυσίου.
IV. Εξοφλητέα με τη μέθοδο προοδευτικού χρεολυσίου.
V. Εξοφλητέα με τη μέθοδο των δύο επιτοκίων.

Για περισσότερες λεπτομέρειες δες: Αλεξανδρή (1989), Αποστολόπουλο (1996), Αποστολόπουλο (2002), Βασιλάκη (2005), Βόσκογλου (1996), Καραπιστόλη (1994), Κιόχο και Κιόχο (1999), Κούγια και Γεωργίου (2004), Οικονομόπουλο (2002), Σφακιανό και Σφακιανό (2010), Τσεβά (2003), Φράγκο (2007), Χουβαρδά (1998), Zima και Brown (1997).

6.2. Δάνεια εξοφλητέα εφάπαξ

6.2.1. Αν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου

Αν συμβολίσουμε με K το ποσό του δανείου, τότε, εφόσον οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου αυτοί θα είναι $K \cdot i$ Έτσι αν το δάνειο θα πληρωθεί μετά από n περιόδους η ονομαστική αξία του θα είναι ίση με $K \cdot n \cdot i + K$

Η παρούσα αξία του δανείου αντίστοιχα θα είναι:

$K \cdot i \cdot \frac{1}{1+i}$ για τους τόκους της πρώτης περιόδου

$K \cdot i \cdot \frac{1}{(1+i)^2}$ για τους τόκους της δεύτερης περιόδου

$K \cdot i \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$ για τους τόκους της ν-οστής περιόδου

και

$K \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$ για την αποπληρωμή του κεφαλαίου.

Άρα η παρούσα αξία του δανείου ισούται με:

$$K \cdot i \cdot \frac{1}{(1+i)^1} + \ldots + K \cdot i \cdot \frac{1}{(1+i)^n} + K \cdot \frac{1}{(1+i)^n} =$$

$$K \cdot i \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n} \right] + K \cdot \frac{1}{(1+i)^n} =$$

$$K \cdot i \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^1} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} \right] + K \cdot \frac{1}{(1+i)^n} =$$

$$K \cdot i \cdot \left[\frac{1}{1+i} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{-i}{1+i}} \right] + K \cdot \frac{1}{(1+i)^n} =$$

$$K \cdot i \cdot \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \right] + K \cdot \frac{1}{(1+i)^n} =$$

$$K \cdot i \cdot a_{\overline{n|}\, i} + K \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$K \cdot i \cdot a_{\overline{n|}\, i} + K \cdot U^n$$

$$K \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right) + K \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = K$$

Αντίστοιχα για την εύρεση της τελικής αξίας του δανείου, ακολουθώντας αντίστοιχη διαδικασία θα έχουμε:

$K \cdot i \cdot (1+i)^0$ για τους τόκους της πρώτης περιόδου

$K \cdot i \cdot (1+i)^1$ για τους τόκους της δεύτερης περιόδου

$K \cdot i \cdot (1+i)^{n-1}$ για τους τόκους της ν-οστής περιόδου

και

K για την αποπληρωμή του δανείου.

Άρα η τελική αξία του δανείου ισούται με:

$$K \cdot i \cdot (1+i)^0 + \ldots + K \cdot i \cdot (1+i)^{n-1} + K =$$

$$K \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} + K =$$

Παράδειγμα 1

Δάνειο €15.000 πρέπει να εξοφληθεί μετά από 10 χρόνια με επιτόκιο 8%. Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου, να υπολογισθούν (α) η παρούσα αξία, (β) η τελική αξία του δανείου.

Λύση

α) Η παρούσα αξία των τόκων που έχουμε καταβάλλει ισούται με:

$$K \cdot i \cdot a_{\overline{n}|\, i} = K \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) = 15.000 \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}08^{10}}\right) = 8.052{,}10$$

Η παρούσα αξία του κεφαλαίου είναι:

$$K \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = 15.000 \cdot \frac{1}{1{,}08^{10}} = 6.947{,}90$$

β) Η τελική αξία του δανείου θα είναι:

$$K \cdot i \cdot S_{\overline{n}|\, i} + K = 15.000 \cdot 0{,}08 \cdot S_{\overline{10}|\, 0{,}08} + 15.000 =$$

$$= 15.000 \cdot 0{,}08 \cdot 14{,}48656 + 15.000 = 32.383{,}88$$

Το ονομαστικό ποσό που θα πρέπει να δώσουμε είναι:

$$K \cdot n \cdot i + K = 15.000 \cdot 10 \cdot 0{,}08 + 15.000 = 27.000$$

Αναλυτικά η απόσβεση του δανείου φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα 6.1:

$$K \cdot i = 15.000 \cdot 0{,}08 = 1.200$$

Έτος	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Υπόλοιπο
1	1.200	--	1.200	15.000
2	1.200	--	1.200	15.000
3	1.200	--	1.200	15.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1.200	15.000	12.000	0
ΣΥΝΟΛΟ	12.000	15.000	27.000	

Πίνακας 6.1 *Απόσβεση δανείου.*

6.2.2. Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου

Εφόσον οι τόκοι δεν πληρώνονται στο τέλος κάθε περιόδου, τότε το ποσό που πρέπει να καταβληθεί στο τέλος των n περιόδων θα είναι:

$$K_n = K \cdot (1+i)^n$$

Παράδειγμα 2

Δάνειο €15.000 πρέπει να εξοφληθεί μετά από 10 χρόνια με επιτόκιο 8%. Να υπολογισθεί το ποσό που πρέπει να δοθεί για την εξόφληση του δανείου αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου.

Λύση

Αν δεν πληρώνουμε τους τόκους το ποσό που θα πρέπει να δώσουμε είναι:

$$K = 15.000 \cdot (1 + 0{,}08)^{10} = 15.000 \cdot 2{,}158925 = 32.383{,}88$$

Προφανώς τα αποτελέσματα στο παράδειγμα 1 και 2 είναι ίδια αφού:

$$K \cdot i \cdot S_{\overline{n}|\, i} + K = K \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} + K = K \cdot (1+i)^n$$

6.3. Δάνεια εξοφλητέα με ίσα μέρη κεφαλαίου

Στην περίπτωση αυτή το χρεολύσιο είναι σταθερό σε κάθε περίοδο, ενώ μεταβάλλεται ο τόκος της κάθε περιόδου. Αυτό συνεπάγεται ότι η δόση δεν θα είναι σταθερή. Για να υπολογίσουμε το χρεολύσιο της κάθε περιόδου διαιρούμε το ποσό του δανείου με τον αριθμό των περιόδων.

Αν υποθέσουμε ότι κάποιος δανείστηκε κεφάλαιο K, με επιτόκιο i, για n χρονικές περιόδους, με τη μέθοδο εξόφλησης των ίσων μερών θα καταβάλλει στο τέλος κάθε περιόδου για την εξόφληση του κεφαλαίου ποσό $\frac{K}{n}$ ενώ για την καταβολή του τόκου για κάθε περίοδο θα έχουμε:

$K \cdot i$ για τους τόκους της πρώτης περιόδου

$\left(K - \frac{K}{n}\right) \cdot i$ για τους τόκους της δεύτερης περιόδου

$\left(K - \frac{2K}{n}\right) \cdot i$ για τους τόκους της τρίτης περιόδου

$\left(K - \frac{(n-1)K}{n}\right) \cdot i$ για τους τόκους της n περιόδου

Προφανώς το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του δανείου της t περιόδου θα είναι:

$$K - t \cdot \frac{K}{n}$$

Παράδειγμα 3

Δάνειο €12.000 πρέπει να εξοφληθεί μετά από 6 χρόνια με επιτόκιο 10%. Αν το δάνειο εξοφλείται με ίσα μέρη κεφαλαίου να βρεθεί η απόσβεση του δανείου ανά έτος.

Λύση

Για να υπολογίσουμε το χρεολύσιο της κάθε περιόδου έχουμε:

$$\frac{K}{n} = \frac{12.000}{6} = 2.000$$

Για την πρώτη περίοδο ο τόκος θα είναι

$$K \cdot i = 12.000 \cdot 0{,}1 = 1.200$$

Όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα 6.2 η απόσβεση του δανείου για την πρώτη περίοδο είναι:

Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Πληρωμένο ποσό	Υπόλοιπο
1.200	2.000	3.200	2.000	10.000

Πίνακας 6.2 *Απόσβεση δανείου πρώτης περιόδου.*

Για τη δεύτερη περίοδο ο τόκος θα είναι

$$K \cdot i = 10.000 \cdot 0{,}1 = 1.000$$

Η απόσβεση του δανείου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα 6.3:

Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Πληρωμένο ποσό	Υπόλοιπο
1.000	2.000	3.000	4.000	8.000

Πίνακας 6.3 *Απόσβεση δανείου δεύτερης περιόδου.*

Όμοια βρίσκουμε (πίνακας 6.4):

Έτος	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Υπόλοιπο
1	1.200	2.000	3.200	10.000
2	1.000	2.000	3.000	8.000
3	800	2.000	2.800	6.000
4	600	2.000	2.600	4.000
5	400	2.000	2.400	2.000
6	200	2.000	2.200	0

ΣΥΝΟΛΟ	4.200	12.000	16.200	

Πίνακας 6.4 *Συνολική απόσβεση δανείου.*

6.4. Δάνεια εξοφλητέα με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου

Εφόσον το χρεολύσιο είναι σταθερό κατά τη διάρκεια του δανείου, όπως επίσης και ο τόκος έχουμε σταθερό τοκοχρεολύσιο.

Ο τόκος υπολογίζεται με βάση το αρχικό ποσό του δανείου με τον τύπο:

$$K \cdot i$$

Το χρεολύσιο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K \cdot P_{\overline{n|}\,i} = K \cdot \frac{1}{S_{\overline{n|}\,i}} = K \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί ο πίνακας απόσβεσης με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου, δανείου €15.000 για 5 χρόνια με επιτόκιο 9%.

Λύση

Ο τόκος θα είναι

$$K \cdot i = 15.000 \cdot 0,09 = 1.350$$

Ενώ το χρεολύσιο

$$K \cdot P_{\overline{5|}\,0,09} = 15.000 \cdot 0,1670925 = 2.506,3875$$

Το τοκοχρεολύσιο θα είναι:

$$K \cdot i + K \cdot P_{\overline{5|}\,0,09} = 1.350 + 2.506,39 = 3.856,39$$

Το πληρωμένο ποσό φαίνεται στον παρακάτω πίνακα 6.5:

	Πληρωμένο ποσό
1^{ο} έτος	2.506,39
2^{ο} έτος	2.506,39*1,09+2.506,39=5.238,36
3^{ο} έτος	5.238,36*1,09+2.506,39=8.216,20
4^{ο} έτος	8.216,20*1,09+2.506,39=11.462,05
5^{ο} έτος	11.462,05*1,09+2.506,39=15.000

Πίνακας 6.5 *Πληρωμένο ποσό.*

Συνολικά η απόσβεση του δανείου είναι (πίνακας 6.6):

Έτος	**Τόκος**	**Χρεολύσιο**	**Τοκοχρεολύσιο**	**Πληρωμένο ποσό**	**Υπόλοιπο**
1	1.350	2.506,39	3.856,39	2.506,39	12.493,61
2	1.350	2.506,39	3.856,39	5.238,36	9.761,64
3	1.350	2.506,39	3.856,39	8.216,20	6.783,80
4	1.350	2.506,39	3.856,39	11.462,05	3.537,95
5	1.350	2.506,39	3.856,39	15.000	0

Πίνακας 6.6 *Απόσβεση δανείου.*

6.5. Δάνεια εξοφλητέα με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου (γαλλική μέθοδος)

Η μέθοδος αυτή είναι η πιο ευρέως γνωστή και χρησιμοποιούμενη. Εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στη Γαλλία γιαυτό και πήρε το όνομα αυτό. Στη μέθοδο αυτή το τοκοχρεολύσιο είναι σταθερό ενώ ο τόκος υπολογίζεται από το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό, άρα συνεχώς μειώνεται. Συνεπώς, αφού το τοκοχρεολύσιο είναι σταθερό, το χρεολύσιο θα αυξάνεται συνεχώς. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο το τοκοχρεολύσιο είναι:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}$$

Έτσι λοιπόν στο τέλος της πρώτης περιόδου θα έχουμε δώσει για την εξόφληση του δανείου ποσό:

$$P_1 = K \cdot P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}$$

Συνεπώς το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό θα είναι:

$$K - K \cdot P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}$$

Ο τόκος της δεύτερης περιόδου θα υπολογιστεί με βάση το ανεξόφλητο ποσό του δανείου στο τέλος της πρώτης περιόδου συνεπώς θα είναι:

$$\left(K - K \cdot P_{\overline{n|}\,i}\right) \cdot i$$

Αντίστοιχα το χρεολύσιο θα είναι "τοκοχρεολύσιο – τόκος" άρα:

$$\left(K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}\right) - \left(K - K \cdot P_{\overline{n|}\,i}\right) \cdot i = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}} - K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}} \cdot i =$$
$$= K \cdot P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}} \cdot (1+i) = P_1 \cdot (1+i) = P_2$$

Το ανεξόφλητο ποσό στο τέλος της 2ης περιόδου θα είναι:

$$K - \left(P_1 + P_2\right)$$

Ο τόκος της τρίτης περιόδου θα είναι:

$$\left[K - \left(P_1 + P_2\right)\right] \cdot i$$

και το χρεολύσιο:

$$\left(K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}\right) - \left(K - K \cdot \left(P_1 + P_2\right)\right) \cdot i = K \cdot i + P_1 - K \cdot i + P_1 \cdot i + P_2 \cdot i =$$
$$= P_1 \cdot (1+i) + P_2 \cdot i = P_2 + P_2 \cdot i =$$
$$= P_2 \cdot (1+i) = P_1 \cdot (1+i) \cdot (1+i) = P_1 \cdot (1+i)^2 = P_3$$

Το ανεξόφλητο ποσό στο τέλος της 2ης περιόδου θα είναι:

$$K - \left(P_1 + P_2 + P_3\right)$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα απόσβεσης του δανείου για m περιόδους.

Οι τύποι που μας δίνουν τα στοιχεία του δανείου για τη n-οστή περίοδο είναι:

Χρεολύσιο:

$$P_m = P_1 \cdot (1+i)^{n-1} = K \cdot P_{\overline{n|}\,i} \cdot (1+i)^{m-1}$$

Εξοφλημένο ποσό δανείου:

$$E_m = P_1 + P_2 + \cdots + P_m = P_1 + P_1 \cdot (1+i) + P_1 \cdot (1+i)^2 + \cdots + P_1 \cdot (1+i)^{m-1} =$$
$$= P_1 \cdot S_{\overline{m|}\,i} = K \cdot P_{\overline{n|}\,i} \cdot S_{\overline{m|}\,i}$$

Υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό:

$$Y_m = K - K \cdot P_{\overline{n|}\,i} \cdot S_{\overline{m|}\,i} = K \cdot \left(1 - P_{\overline{n|}\,i} \cdot S_{\overline{m|}\,i}\right)$$

Τόκος

$$I_m = Y_{m-1} \cdot i = \left(K - K \cdot P_{\overline{n|}\,i} \cdot S_{\overline{m-1|}\,i}\right) \cdot i$$

Παράδειγμα 5

Δάνειο €80.000..πρέπει να εξοφληθεί σε 6 χρόνια με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου και επιτόκιο 7%. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

Λύση

Από τους οικονομικούς πίνακες βρίσκουμε ότι:

$$P_{\overline{6|}\,0.07} = 0.1397958$$

Το τοκοχρεολύσιο θα είναι:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}} = 80.000 \cdot \left(0,07 + 0,1397958\right) = 16.783,664$$

1ο έτος

Ο τόκος για το 1ο έτος θα είναι:

$$I = K \cdot i = 80.000 \cdot 0,07 = 5.600$$

Το χρεολύσιο θα είναι:

$$P = R - I = 16.783,66 - 5.600 = 11.183,66$$

Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του δανείου είναι:

$$Y = K - P = 80.000 - 11.183,66 = 68.816,34$$

2ο έτος

Ο τόκος για το 2ο έτος θα είναι:

$$I = 68.816,34 \cdot 0,07 = 4.817,14$$

Το χρεολύσιο θα είναι:

16.783,66-4.817,14= 11.966,52

Το πληρωμένο ποσό του δανείου θα είναι:

11.183,66 + 11.966,52 = 23.150,18

Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του δανείου είναι:

68.816,34-11.966,52= 56.849,82

3ο έτος

Ο τόκος για το 3ο έτος θα είναι:

$$I = 56.849,82 \cdot 0,07 = 3.979,49$$

Το χρεολύσιο θα είναι:

16.783,66-3.979,49= 12.804,17

Το πληρωμένο ποσό του δανείου θα είναι:

23.150,18 + 12.804,17 = 35.954,35

Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του δανείου είναι:

56.849,82-12.804,17= 44.045,65

Όμοια βρίσκουμε τα ποσά για τα υπόλοιπα έτη (πίνακας 6.7).

Έτος	Τοκοχρεολύσιο	Τόκος	Χρεολύσιο	Πληρωμένο	Ανεξόφλητο
1	16.783,66	5.600	11.183,66	11.183,66	68.816,34
2	16.783,66	4.817,14	11.966,52	23.150,18	56.849,82
3	16.783,66	3.979,48	12.804,18	35.954,36	44.045,64
4	16.783,66	3.083,19	13.700,47	49.654,83	30.345,17
5	16.783,66	2.124,16	14.659,50	64.314,33	15.685,67
6	16.783,66	1.097,99	15.685,67	80.000	0

Πίνακας 6.7 *Απόσβεσης δανείου.*

6.6. Δάνεια εξοφλητέα με τη μέθοδο των δύο επιτοκίων

Στην περίπτωση αυτή ο οφειλέτης καταθέτει ένα ποσό με επιτόκιο διαφορετικό από αυτό του δανείου με σκοπό να δημιουργήσει ένα κεφάλαιο ίσο με αυτό που χρωστάει. Το επιτόκιο με το οποίο γίνεται η κατάθεση συνήθως είναι μικρότερο από το επιτόκιο δανεισμού και ονομάζεται επιτόκιο ανασύστασης.

6.6.1. Απόσβεση δανείου όταν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου

Εφόσον ο οφειλέτης πληρώνει τους τόκους στο τέλος κάθε περιόδου, θα πρέπει να συγκεντρώσει το ποσό του δανείου από τις καταθέσεις που θα κάνει σε κάθε περίοδο. Έχουμε λοιπόν μια ληξιπρόθεσμη ράντα που η τελική αξία της πρέπει να είναι ίση με το ποσό του δανείου (K). Δηλαδή αν ονομάσουμε R_1 το ποσό της δόσης και t το επιτόκιο ανασύστασης θα πρέπει να ισχύει: $K = R_1 \cdot S_{\overline{n|}t}$. Για να βρούμε λοιπόν το ποσό της δόσης που πρέπει να καταθέτουμε στο τέλος κάθε περιόδου έχουμε:

$$R_1 = K \cdot \frac{1}{S_{\overline{n|}t}} = K \cdot P_{\overline{n|}t}$$

Συνεπώς το συνολικό ποσό της δόσης που πρέπει να πληρώνουμε θα είναι:

$$R = I + R_1 = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}t}$$

Σημειώνεται ότι στον παραπάνω τύπο χρησιμοποιούνται και τα δύο επιτόκια δανεισμού και ανασύστασης ($i,\ t$).

6.6.2. Απόσβεση δανείου όταν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου (Αμερικάνικο Σύστημα)

Όταν δεν καταβάλλονται οι τόκοι στο τέλος κάθε περιόδου θα πρέπει προφανώς μόνο με τις δόσεις να καλύψουμε την τελική αξία του δανείου. Δηλαδή: $K\cdot(1+i)^n = R_1\cdot S_{\overline{n}|\,t}$. Άρα η δόση θα πρέπει να είναι:

$$R_1 = K\cdot(1+i)^n\cdot\frac{1}{S_{\overline{n}|\,t}} = K\cdot(1+i)^n\cdot P_{\overline{n}|\,t}$$

Παράδειγμα 6

Δάνειο €50.000 πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια με επιτόκιο 6% με τη μέθοδο των δύο επιτοκίων. Αν το επιτόκιο ανασύστασης είναι 5% να βρεθεί η δόση του δανείου (α) Αν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου (β) Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται.

Λύση

Από τους οικονομικούς πίνακες βρίσκουμε ότι:

$$P_{\overline{10}|\,0,05} = 0,0795046$$

$$1,06^{10} = 1,7908477$$

(α) Όσον αφορά το εξοφλητικό απόθεμα έχουμε:

$$R_1 = K\cdot P_{\overline{10}|\,0,05} = 50.000\cdot 0,0795046 = 3.975,23$$

Το ποσό των τόκων για κάθε περίοδο θα είναι:

$$R_2 = K\cdot i = 50.000\cdot 0,06 = 3.000$$

Συνεπώς το συνολικό ποσό της κάθε δόσης θα είναι:

$$R = R_1 + R_2 = 3.975,23 + 3.000 = 6.975,23$$

(β) Για την περίπτωση που δεν καταβάλλονται οι τόκοι έχουμε:

$$R_1 = K\cdot(1+i)^n\cdot P_{\overline{n}|\,t} = 50.000(1+0,06)^{10}\cdot P_{\overline{10}|\,0.05}$$

$$R_1 = 50.000\cdot 1,7908477\cdot 0,0795046 = 7.119,03$$

6.7. Ασκήσεις

6.7.1. Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Δανείζεται κάποιος €150.000 για 25 χρόνια με ετήσιο επιτόκιο 5%. Για την απόσβεση του θα δοθούν ίσες ετήσιες δόσεις με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. Να βρεθούν (α) Η δόση του δανείου, (β) Το χρεολύσιο της 2ης περιόδου, (γ) Το χρεολύσιο της 22ης περιόδου, (δ) Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό της 18ης περιόδου, (ε) Το συνολικό ποσό των τόκων, (στ) Το μέρος των τόκων της δόσης της 3ης περιόδου, (ζ) Το μέρος των τόκων της δόσης της 23ης περιόδου.

Λύση

(α) Για να βρούμε την δόση του δανείου χρησιμοποιούμε τη σχέση: $R = K\cdot i + K\cdot P_{\overline{n}|\,i}$ και έχουμε

$$R = K\cdot i + K\cdot P_{\overline{25}|\,0,05} = 150.000\cdot 0,05 + 150.000\cdot 0,020952 = 10.642,8$$

(β) Για τον υπολογισμό του χρεολυσίου χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$P_m = P_1\cdot(1+i)^{m-1} = K\cdot P_{\overline{n}|\,i}\cdot(1+i)^{m-1}$$

και κάνοντας αντικατάσταση έχουμε

$$P_2 = K\cdot P_{\overline{25}|\,0,05}\cdot(1+0,05)^{2-1} = 150.000\cdot 0,020952\cdot 1,05 = 3.299,94$$

(γ) Όμοια έχουμε:

$$P_{22} = K \cdot P_{\overline{25|}\,0,05} \cdot (1+0,05)^{22-1} = 150.000 \cdot 0,020952 \cdot 2,786 = 8.755,84$$

(δ) Για το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του δανείου της 18ης περιόδου έχουμε:

$$Y_{18} = K \cdot \left(1 - P_{\overline{25|}\,0,05} \cdot S_{\overline{18|}\,0,05}\right) = 150.000 \cdot (1 - 0,020952 \cdot 28,132385) = 61.585,54$$

(ε) Οι συνολικοί τόκοι με τους οποίους επιβαρύνθηκε το δάνειο θα βρεθούν από το συνολικό ποσό που θα δώσουμε για την εξόφληση του δανείου μείον το αρχικό ποσό που πήραμε δηλαδή:

$$I = R \cdot n - K = 10.642,8 \cdot 25 - 150.000 = 116.070\,.$$

(στ) Για το μέρος των τόκων της 3ης περιόδου έχουμε:

$$I_3 = \left(K - K \cdot P_{\overline{25|}\,0,05} \cdot S_{\overline{3-1|}\,0,05}\right) \cdot 0,05 = 150.000(1 - 0,020952 \cdot 2,05) \cdot 0,05 = 7.177,86$$

(ζ) Για το μέρος των τόκων της δόσης της 23ης περιόδου έχουμε:

$$I_{23} = \left(K - K \cdot P_{\overline{25|}\,0,05} \cdot S_{\overline{23-1|}\,0,05}\right) \cdot 0,05 = 150.000(1 - 0,020952 \cdot 38,5052) \cdot 0,05 = 1.449,29$$

Άσκηση 2

Αν μπορούμε να πληρώνουμε ετήσια δόση δανείου €6.000 για 25 χρόνια τι ποσό μπορούμε να δανειστούμε με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 4%; Τι ποσό θα πληρώσουμε συνολικά σε τόκους;

Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι, η σχέση που μας δίνει τη δόση του δανείου είναι:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{25|}\,0,04} \Rightarrow 6.000 = K \cdot \left(0,04 + P_{\overline{25|}\,0,04}\right) \Rightarrow 6.000 = 0,064 \cdot K \Rightarrow K = 93.750$$

Συνεπώς το ποσό που μπορούμε να δανειστούμε συνολικά είναι €93.750

(β) Το συνολικό ποσό των τόκων είναι:

$$I = R \cdot n - K = 6.000 \cdot 25 - 93.750 = 56.250$$

Άσκηση 3

Κάποιος δανείστηκε €100.000 με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου, για 20 χρόνια και πληρώνει ετήσια δόση €7.812,5. Να βρεθεί το επιτόκιο δανεισμού.

Λύση

Από τον τύπο του προοδευτικού χρεολυσίου έχουμε:

$$R = K \cdot \left(i + P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}\right) \Rightarrow K = \frac{R}{i + P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}} = R \cdot \frac{1}{i + P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}} \Rightarrow K = R \cdot a_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}$$

Οπότε:

$$a_{\overline{n|}\,\mathrm{i}} = \frac{K}{R} \Rightarrow a_{\overline{20|}\,\mathrm{i}} = \frac{100.000}{7.812,5} \Rightarrow a_{\overline{20|}\,\mathrm{i}} = 12,8$$

Από τους οικονομικούς πίνακες βρίσκουμε:

$$a_{\overline{20|}\,0,045} = 13,00794 \text{ και } a_{\overline{20|}\,0,05} = 12,46221$$

Συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της παρεμβολής.

Για διαφορά στο επιτόκιο 0,005 έχουμε διαφορά στην τιμή 0,54573

Για ποια διαφορά στο επιτόκιο θα έχουμε διαφορά στην τιμή 0,33779 (12,8-12,46221);.

$$\begin{array}{|ll} 0,005 & 0,54573 \\ X; & 0,33779 \\ \hline \end{array}$$

$$X = 0,005 \cdot \frac{0,33779}{0,54573} \simeq 0,0031$$

Οπότε το επιτόκιο δανεισμού είναι: 0,05-0,0031=0,0469, δηλαδή 4,69%.

Άσκηση 4

Κάποιος δανείστηκε με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου €120.000 με ετήσιο επιτόκιο 4% και ετήσια δόση €8.000. Να βρεθεί ο αριθμός των δόσεων που απαιτούνται για την εξόφληση του δανείου.

Λύση

Για να βρούμε τον αριθμό των δόσεων για την εξόφληση του δανείου έχουμε:

$$R = K \cdot \left(i + P_{\overline{n|}\,i}\right) \Rightarrow 8.000 = 120.000 \cdot \left(0,04 + P_{\overline{n|}\,0,04}\right) \Rightarrow 0,04 + P_{\overline{n|}\,0,04} = \frac{8.000}{120.000} \Rightarrow$$

$$0,04 + P_{\overline{n|}\,0,04} = \frac{7.500}{120.000} \Rightarrow 0,04 + P_{\overline{n|}\,0,04} = 0,0625 \Rightarrow P_{\overline{n|}\,0,04} = 0,0225.$$

Από τους οικονομικούς πίνακες βρίσκουμε ότι:

$$P_{\overline{26|}\,0,04} \simeq 0,0225.$$

Συνεπώς η εξόφληση του δανείου θα πραγματοποιηθεί σε 26 ετήσιες δόσεις.

Άσκηση 5

Δανείστηκε κάποιος με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου, με ετήσιο επιτόκιο 5% για 6 χρόνια. Αν το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό της $4^{ης}$ περιόδου είναι €29.314,4, να βρεθεί το ποσό του δανεισμού και να συμπληρωθεί ο πίνακας απόσβεσης.

Λύση

Από τους οικονομικούς πίνακες βρίσκουμε ότι: $P_{\overline{6|}\,0,05} \simeq 0,147$ και $S_{\overline{4|}\,0,05} \simeq 4,31$.

Επειδή το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό της $4^{ης}$ περιόδου είναι €29.314,4 έχουμε:

$$Y_4 = K \cdot \left(1 - P_{\overline{6|}\,0,05} \cdot S_{\overline{4|}\,0,05}\right) \Rightarrow 29.314,4 = K \cdot \left(1 - 0,147 \cdot 4,31\right) \Rightarrow$$

$$29.314,4 = K \cdot \left(1 - 0,147 \cdot 4,31\right) \Rightarrow K = \frac{29.314,4}{0,36643} = 80.000$$

Για τον πίνακα απόσβεσης του δανείου έχουμε:

Το τοκοχρεολύσιο θα είναι: $R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,i}$ οπότε κάνοντας αντικατάσταση έχουμε:

$$R = K \cdot \left(i + P_{\overline{6|}\,0,05}\right) = 80.000 \cdot \left(0,05 + 0,14701747\right) = 15.761,4$$

Ο τόκος της $1^{ης}$ περιόδου θα είναι $I = K \cdot i = 80.000 \cdot 0,05 = 4.000$.

Όμοια βρίσκουμε τα στοιχεία του δανείου για να συμπληρώσουμε τον ακόλουθο πίνακα 6.8:

Έτος	Τοκοχρεολύσιο	Τόκος	Χρεολύσιο	Πληρωμένο	Ανεξόφλητο
1	15.761,4	4.000	11.761,4	11.761,4	68.238,6
2	15.761,4	3.411,93	12.349,47	24.110,87	55.889,13
3	15.761,4	2.794,46	12.966,94	37.077,81	42.922,19
4	15.761,4	2.146,11	13.615,29	50.693,1	29.306,9
5	15.761,4	1.465,35	14.296,05	64.989,15	15.010,85
6	15.761,4	750,54	15.010,86	80.000	0

Πίνακας 6.8 *Απόσβεσης δανείου*

Η απόκλιση στο ανεξόφλητο ποσό της $4^{ης}$ περιόδου οφείλεται στις στρογγυλοποιήσεις των πράξεων.

Άσκηση 6

Δάνειο € 48.000 εξοφλείται με ίσα μέρη κεφαλαίου σε 6 χρόνια. Αν οι τόκοι του $3^{ου}$ έτους είναι €1.280 να βρεθεί το επιτόκιο δανεισμού και να συμπληρωθεί ο πίνακας απόσβεσης

Λύση

Επειδή οι τόκοι του $3^{ου}$ έτους είναι €1.280 έχουμε:

$$\left(K - \frac{2K}{6}\right) \cdot i = I \Rightarrow \left(48.000 - \frac{2 \cdot 48.000}{6}\right) \cdot i = 1.280 \Rightarrow 32.000 \cdot i = 1.280 \Rightarrow i = 0,04$$

Για την εξόφληση του κεφαλαίου λοιπόν κάθε χρόνο θα δίνουμε ποσό $\frac{48.000}{6}=8.000$ ενώ οι τόκοι της πρώτης περιόδου θα είναι $K\cdot i=48.000\cdot 0,04=1.920$.

Όμοια εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιόδους και βρίσκουμε τον πίνακα 6.9 απόσβεσης του δανείου.

Έτος	Τοκοχρεολύσιο	Τόκος	Χρεολύσιο	Πληρωμένο	Ανεξόφλητο
1	9.920	1.920	8.000	8.000	40.000
2	9.600	1.600	8.000	16.000	32.000
3	9.280	1.280	8.000	24.000	24.000
4	8.960	960	8.000	32.000	16.000
5	8.640	640	8.000	40.000	8.000
6	8.320	320	8.000	48.000	0

Πίνακας 6.9 *Απόσβεσης δανείου*

Άσκηση 7

Δάνειο €60.000 πρέπει να εξοφληθεί σε 5 χρόνια με τη μέθοδο των δύο επιτοκίων. Αν το επιτόκιο ανασύστασης είναι 5% και η ετήσια δόση του δανείου είναι €15.058,5 να βρεθεί το επιτόκιο δανεισμού (α) Αν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου (β) Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου.

Λύση

(α) Αν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου το συνολικό ποσό της δόσης είναι

$$R=I+R_1=K\cdot\left(i+P_{\overline{n|}t}\right)$$

οπότε κάνοντας αντικατάσταση έχουμε:

$$R=K\cdot\left(i+P_{\overline{5|}0,05}\right)\Rightarrow 15.058,5=60.000\cdot\left(i+0,180975\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15.058,5=60.000\cdot i+10.858,5\Rightarrow i=\frac{4.200}{60.000}\Rightarrow i=0.07.$$

(β) Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου τότε έχουμε

$$R_1=K\cdot\left(1+i\right)^n\cdot P_{\overline{n|}t}\Rightarrow 15.058,5=60.000\cdot\left(1+i\right)^5\cdot P_{\overline{5|}0.05}\Rightarrow\left(1+i\right)^5=\frac{15.058,5}{60.000\cdot 0,180975}\Rightarrow$$

$$\left(1+i\right)^5=\frac{15.058,5}{60.000\cdot 0,180975}\Rightarrow\left(1+i\right)^5=1,386793756\Rightarrow 1+i=1,067584$$

Συνεπώς το επιτόκιο δανεισμού είναι 6,7584%.

Άσκηση 8

Δάνειο €50.000 πρέπει να εξοφληθεί σε 5 χρόνια με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου. Αν το χρεολύσιο κάθε δόσης είναι €8.354,62 , να βρεθεί το επιτόκιο δανεισμού και να γίνει ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

Λύση

Επειδή το χρεολύσιο είναι ίσο με €8.354,62 έχουμε:

$$K\cdot P_{\overline{n|}i}=8.354,62\Rightarrow 50.000\cdot P_{\overline{5|}i}=8.354,62\Rightarrow P_{\overline{5|}i}=0,1670924$$

Από τους οικονομικούς πίνακες βρίσκουμε ότι: $P_{\overline{5|}0,09}=0,1670925$.

Συνεπώς το επιτόκιο δανεισμού είναι 9%.

Στη συνέχεια βρίσκουμε τον παρακάτω πίνακα 6.10 απόσβεσης.

Έτος	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Πληρωμένο ποσό	Υπόλοιπο
1	4.500	8.354,62	12.854,62	8.354,62	41.645,38
2	4.500	8.354,62	12.854,62	17.461,16	32.538,84
3	4.500	8.354,62	12.854,62	27.387,28	22.612,72
4	4.500	8.354,62	12.854,62	38.206,76	11.793,24
5	4.500	8.354,62	12.854,62	50.000	0

Πίνακας 6.10 *Απόσβεσης δανείου.*

6.7.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Δάνειο €35.000 εξοφλητέο εφάπαξ, πρέπει να εξοφληθεί σε 8 χρόνια με επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η δόση του δανείου και ο πίνακας απόσβεσης (α) Αν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου (β) Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται.
2. Δάνειο €15.000 εξοφλείται με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου. Αν η διάρκεια του είναι 8 χρόνια και το επιτόκιο 7%, να συμπληρωθεί ο πίνακας απόσβεσης.
3. Δάνειο €100.000 πρέπει να εξοφληθεί σε 6 χρόνια με επιτόκιο 5% και τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.
4. Δάνειο €40.000 πρέπει να εξοφληθεί σε 7 χρόνια με επιτόκιο 6% με τη μέθοδο των δύο επιτοκίων. Αν το επιτόκιο ανασύστασης είναι 5% να βρεθεί η δόση του δανείου (α) Αν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου (β) Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου.
5. Δάνειο €75.000 πρέπει να εξοφληθεί σε 5 χρόνια με ετήσιο επιτόκιο 8%. Αν το δάνειο εξοφλείται με ίσα μέρη κεφαλαίου να γίνει ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

Βιβλιογραφία

Αλεξανδρής, Ν. (1989). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Αποστολόπουλος, Θ. (1996). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Αποστολόπουλος, Θ. (2002). *Οικονομικά μαθηματικά και στοιχεία τραπεζικών εργασιών*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Βασιλάκης, Κ. (2005). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Βόσκογλου, Μ. (1996). *Μαθηματικά για τον τομέα διοίκησης και οικονομίας*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Καραπιστόλης, Δ. (1994). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Κιόχος, Π. & Κιόχος, Α. (1999). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Κούγιας, Γ. & Γεωργίου, Δ. (2004). *Χρηματοοικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Οικονομόπουλος, Γ. (2002). *Οικονομικά Μαθηματικά*. Εκδόσεις Οικονομόπουλος Γ.

Σφακιανός, Κ. & Σφακιανός, Π. (2010). *Οικονομικά Μαθηματικά με Οικονομικά Προγράμματα Υπολογιστών*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Τσεβάς, Αναστάσιος (2003). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Φράγκος, Χ. (2007). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Χουβαρδάς, Β. (1998). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Zima, P. & Brown, R. (1997). *Outline of Mathematics of Finance, Schaums 2nd edition*. Εκδόσεις McGraw-Hill.