8

# Η εξίσωση του Pell

## 8.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις λύσεις μιας συγκεκριμένης κλάσεως διοφαντικών εξισώσεων, των εξισώσεων του Pell. Αυτό γίνεται όχι μόνο για ιστορικούς λόγους, αλλά και λόγω της χρησιμότητας τους στα επόμενα.

Ας ξεκινήσουμε με δύο απλά παραδείγματα. Παρατηρούμε ότι $10 - 1 = 3^2$ και $\frac{10}{2} - 1 = 2^2$. Υπάρχουν άλλοι αριθμοί οι οποίοι να έχουν ανάλογη ιδιότητα;

Ο αμέσως επόμενος είναι ο 290. Πράγματι, $290 - 1 = 17^2$ και $\frac{290}{2} - 1 = 12^2$. Μπορούμε να τους βρούμε όλους; Είναι πεπερασμένου πλήθους ή άπειρου;

Αν $a$ είναι κάποιος τέτοιος ακέραιος, τότε θα πρέπει να υπάρχουν ακέραιοι $x, y$ τέτοιοι ώστε

$$a - 1 = x^2 \text{ και } \frac{a}{2} - 1 = y^2.$$

Συνεπώς τα $x, y$ θα πρέπει να αποτελούν λύση της διοφαντικής εξίσωσης

$$X^2 - 2Y^2 = 1.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το ακόλουθο πρόβλημα:

Να υπολογιστούν όλες οι θετικές και ακέραιες λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} 2uv - xy &= 16 \\ xv - uy &= 12 \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα ως προς $x$ και $u$ και έχουμε

$$x = \frac{24v + 16y}{2v^2 - y^2}, \quad u = \frac{16v + 12y}{2v^2 - y^2}.$$

Προφανώς το $2v^2 - y^2$ είναι θετικό, αφού $x > 0$, $u > 0$ και οι αριθμητές είναι επίσης θετικοί. Υπολογίζουμε το

$$2(xv - uy)^2 - (2uv - xy)^2 = (x^2 - 2u^2)(2v^2 - y^2).$$

Επομένως

$$(x^2 - 2u^2)(2v^2 - y^2) = 2 \cdot 12^2 - 16^2 = 32.$$

Συνεπώς το $(2v^2 - y^2) \mid 32$, οπότε έχουμε

$$2v^2 - y^2 = 2^s, \quad 0 \leq s \leq 5.$$

Αν τώρα $s$ περιττός, $s := 2k+1$, τότε από την εξίσωση

$$2v^2 - y^2 = 2^{2k+1}$$

εφαρμόζοντας διαδοχικά τη διαίρεση με 2, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$v = 2^k v_0, y = 2^{k+1} y_0 \text{ και } v_0^2 - 2y_0^2 = 1.$$

Αν ο $s$ είναι άρτιος, $s := 2k$, τότε ανάλογα προκύπτει ότι

$$y_0^2 - 2v_0^2 = -1.$$

## 8.2 Η εξίσωση του Pell

**Ορισμός 8.2.1.** Αν $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, η διοφαντική εξίσωση

$$X^2 - dY^2 = 1$$

λέγεται εξίσωση του Pell.

**Παρατήρηση 8.2.2.** Αργότερα θα μελετήσουμε τις κάπως γενικότερες εξισώσεις της μορφής

$$X^2 - dY^2 = N, \text{ όπου } N \in \mathbb{Z}.$$

Συχνά και αυτές εμφανίζονται στη βιβλιογραφία με το ίδιο όνομα. Ούτως ή άλλως ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα δούμε ότι παρουσιάζει η εξίσωση

$$X^2 - dY^2 = -1.$$

**Παρατήρηση 8.2.3.** Αν το $d = t^2$, $t > 0$ τότε η εξίσωση γράφεται

$$(X - tY)(X + tY) = 1$$

η οποία έχει λύσεις

$$(x, y) = (1, 0), (-1, 0). \tag{8.2.1}$$

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι ο $d$ είναι ελεύθερος τετραγώνου.

Οι λύσεις (8.2.1) θα λέγονται τετριμμένες λύσεις της εξίσωσης του Pell.

**Πρόταση 8.2.4.** *Αν η εξίσωση του Pell*

$$X^2 - dY^2 = 1,$$

*έχει μη-τετριμμένη λύση, έστω $(p, q)$, τότε ο $\frac{p}{q}$ είναι κάποιος κύριος συγκλίνων του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$.*

*Απόδειξη.* Από τη σχέση $p^2 - dq^2 = 1$ προκύπτει ότι $p > q\sqrt{d}$ και

$$(p - \sqrt{d}q)(p + \sqrt{d}q) = 1.$$

Επομένως

$$0 < \frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{1}{q(p + q\sqrt{d})} < \frac{1}{q(q\sqrt{d} + q\sqrt{d})} < \frac{\sqrt{d}}{q(q\sqrt{d} + q\sqrt{d})} = \frac{1}{2q^2}.$$

Το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 7.5.5 της σελίδας 267. □

**Παρατήρηση 8.2.5.** Δεν είναι όλοι οι συγκλίνοντες του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$, λύσεις της εξίσωσης του Pell

$$X^2 - dY^2 = 1.$$

Για παράδειγμα, ο ρητός $\frac{11}{3}$ είναι ένας συγκλίνων του συνεχούς κλάσματος του $\sqrt{13}$, αλλά δεν είναι λύση της εξίσωσης του Pell $X^2 - 13Y^2 = 1$, αφού $11^2 - 13 \cdot 3^2 = 4$. Ο συγκλίνων $\frac{649}{180}$ είναι λύση της εξίσωσης.

Εντελώς φυσιολογικά προκύπτει το ερώτημα. Για κάποιον συγκλίνοντα $\frac{p_n}{q_n}$ του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$, ποιο είναι το μέγεθος του αριθμού $(p_n - dq_n)$;

**Πρόταση 8.2.6.** *Αν $p/q$ συγκλίνων του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$, τότε το $(p, q)$ είναι λύση της εξίσωσης του Pell*

$$X^2 - dY^2 = N,$$

*όπου $|N| < 1 + 2\sqrt{d}$.*

*Απόδειξη.* Αφού $\frac{p}{q}$ συγκλίνων του $\sqrt{d}$, έπεται ότι

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{d}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Επομένως $|p - q\sqrt{d}| < \frac{1}{q}$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε

$$|p + q\sqrt{d}| = |(p - q\sqrt{d}) + 2q\sqrt{d}| \leq |p - q\sqrt{d}| + |2q\sqrt{d}| < \frac{1}{q} + 2q\sqrt{d} \leq (1 + 2\sqrt{d})q.$$

Τελικά προκύπτει ότι

$$|p^2 - dq^2| = |p - q\sqrt{d}||p + q\sqrt{d}| \leq \frac{1}{q}(1 + 2\sqrt{d})q = 1 + 2\sqrt{d},$$

δηλαδή ότι $p^2 - dq^2 = N$ με $|N| < 1 + 2\sqrt{d}$. □

*Παράδειγμα.* Το συνεχές κλάσμα του αριθμού $\sqrt{13}$ είναι το

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}].$$

Υπολογίζουμε τους συγκλίνοντες και την αντίστοιχη τιμή της $X^2 - 13Y^2$.

$$\begin{array}{lll}
p_0 = 3, & q_0 = 1, & 3^2 - 13 \cdot 1^2 = -4 \\
p_1 = 4, & q_1 = 1, & 4^2 - 13 \cdot 1 = 3 \\
p_2 = 7 & q_2 = 2, & 7^2 - 13 \cdot 2^2 = -3 \\
p_3 = 11 & q_3 = 3, & 11^2 - 13 \cdot 3^2 = 4 \\
p_4 = 18, & q_4 = 5, & 18^2 - 13 \cdot 5^2 = -1 \\
p_5 = 119, & q_5 = 33, & 119^2 - 13 \cdot 33^2 = 4 \\
p_6 = 137, & q_6 = 38, & 137^2 - 13 \cdot 38^2 = -3 \\
p_7 = 256, & q_7 = 71, & 256^2 - 13 \cdot 71^2 = 3 \\
p_8 = 393, & q_8 = 109, & 393^2 - 13 \cdot 109^2 = -4 \\
p_9 = 649, & q_9 = 180, & 649^2 - 13 \cdot 180^2 = 1.
\end{array}$$

Από την πρόταση 7.7.12 προκύπτει ότι το συνεχές κλάσμα της $\sqrt{d}$ είναι όχι μόνο απλά περιοδικό αλλά της μορφής

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 2a_0}].$$

Για $d < 100$ ο αριθμός $\sqrt{94}$ έχει το μέγιστο μήκος περιόδου που είναι 16. Θα εκμεταλευτούμε την περιοδικότητα του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$ για να συμπεράνουμε την ύπαρξη μιας και στη συνέχεια άπειρου πλήθους λύσεων της εξίσωσης του Pell.

**Πρόταση 8.2.7.** *Αν $\frac{p_k}{q_k}$ οι συγκλίνοντες του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$ και $n$ το μήκος της περιόδου αυτού τότε ισχύει:*

$$p_{kn-1}^2 - dq_{kn-1} = (-1)^{kn},$$

*για κάθε $k = 1, 2, 3, \ldots$*

*Απόδειξη.* Για κάθε $k \geq 1$, γράφουμε το συνεχές κλάσμα του αριθμού $\sqrt{d}$ στη μορφή

$$\sqrt{d} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{kn-1}, r_{kn}],$$

όπου

$$r_{kn} := [2a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{kn-1}, 2a_0}] = a_0 + \sqrt{d}.$$

Από το πόρισμα 7.1.8 έπεται ότι

$$\sqrt{d} = \frac{r_{kn}p_{kn-1} + p_{kn-2}}{r_{kn}q_{kn-1} + q_{kn-2}}.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του $r_{kn}$ και έχουμε

$$\sqrt{d}(a_0q_{kn-1} + q_{kn-2} - p_{kn-1}) = a_0p_{kn-1} + p_{kn-2} - dq_{kn-1}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
a_0q_{kn-1} + q_{kn-2} &= p_{kn-1} \\
a_0p_{kn-1} + p_{kn-2} &= dq_{kn-1}
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε τις δύο σχέσεις με $p_{kn-1}$ και $q_{kn-1}$ αντίστοιχα και προσθέτουμε

$$p_{kn-1}^2 - dq_{kn-1}^2 = p_{kn-1}q_{kn-2} - q_{kn-1}p_{kn-2}.$$

Άλλα, πρόταση 7.2.1,

$$p_{kn-1}q_{kn-2} - q_{kn-1}p_{kn-2} = (-1)^{kn-2} = (-1)^{kn},$$

δηλαδή προκείπτει ο ισχυρισμός της πρότασης. □

**Θεώρημα 8.2.8.** *Αν $\frac{p_k}{q_k}$ οι συγκλίνοντες του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$ και $n$ το μήκος της περιόδου αυτού, τότε ισχύουν:*

1. *Αν $n$ άρτιος, τότε όλες οι θετικές λύσεις της εξίσωσης του Pell*

$$X^2 - dY^2 = 1,$$

   *δίνονται από τις σχέσεις*

$$x = p_{kn-1}, y = q_{kn-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

2. *Αν $n$ περιττός, τότε όλες οι θετικές λύσεις τις εξίσωσης του Pell δίνονται από τις σχέσεις*

$$x = p_{2kn-1}, y = q_{2kn-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με την πρόταση 8.2.4, όλες οι λύσεις της εξίσωσης του Pell είναι κάποιοι από τους συγκλίνοντες του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$. Λόγω της πρότασης 8.2.7 έχουμε:

**1.** Αν ο $n$ είναι άρτιος, τότε όλες οι θετικές λύσεις της εξίσωσης του Pell δίνονται από τους τύπους:

$$x = p_{kn-1}, y = q_{kn-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

**2.** Αν ο $n$ είναι περιττός τότε οι λύσεις είναι οι:

$$x = p_{2kn-1}, y = q_{2kn-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

□

**Παρατήρηση 8.2.9.** Είναι φανερό ότι στη δεύτερη περίπτωση του θεωρήματος οι συγκλίνοντες της μορφής

$$x = p_{(2k+1)n-1} \text{ και } y = q_{(2k+1)n-1}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

είναι οι λύσεις της $X^2 - dY^2 = -1$. (Στην πρώτη περίπτωση η $X^2 - dY^2 = -1$ δεν έχει ακέραια λύση).

**Παρατήρηση 8.2.10.** Στο παράδειγμα με $d = \sqrt{13}$ η περίοδος του συνεχούς κλάσματος είναι $n = 5$. Επομένως όλες οι θετικές λύσεις της εξίσωσης του Pell

$$X^2 - dY^2 = 13$$

είναι

$$x = p_{10k-1}, y = q_{10k-1}, k = 1, 2, 3, \ldots$$

Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει, για $k = 1$ έχουμε τη λύση $x = p_9 = 649$, $y = q_9 = 180$.

**Παρατήρηση 8.2.11.** Αν $4 \mid d$ ή $p \mid d$ και $p \in \mathbb{P}$, $p \equiv 3 \bmod 4$, τότε η $X^2 - dY^2 = -1$ δεν έχει ακέραια λύση. Πράγματι, αν ήταν $(x, y)$ μια ακέραια λύση αυτής, τότε θα είχαμε $x^2 \equiv -1 \bmod 4$ ή $x^2 \equiv -1 \bmod p$ αντίστοιχα. Οι ισοτιμίες όμως αυτές δεν είναι επιλύσιμες. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος της περιόδου του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$ είναι κατ' ανάγκην άρτιο.

**Ορισμός 8.2.12.** Η μικρότερη θετική λύση $(x_1, y_1)$ της εξίσωσης του Pell $X^2 - dY^2 = 1$ θα λέγεται θεμελιώδης λύση αυτής. (Εδώ μικρότερη εννοούμε ότι $x_1 < x$ και $y_1 < y$ για κάθε άλλη λύση $(x, y)$ αυτής.)

**Παρατήρηση 8.2.13.** Αν ο $n$ είναι άρτιος, η θεμελιώδης λύση είναι $x_1 = p_{n-1}$, $y_1 = q_{n-1}$. Αν ο $n$ είναι περιττός, τότε αυτή είναι $x_1 = p_{2n-1}$, $y_1 = q_{2n-1}$. (Το $n$ είναι το μήκος της περιόδου του συνεχούς κλάσματος της $\sqrt{d}$.)

**Πρόταση 8.2.14.** *Αν $(x_1, y_1)$ είναι η θεμελιώσης λύση της $X^2 - dY^2 = 1$, τότε κάθε ζευγάρι $(x_n, y_n)$ το οποίο δίνεται από την ισότητα*

$$x_n + y_n \sqrt{d} = (x_1 + y_1 \sqrt{d})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

*είναι επίσης λύση αυτής.*

*Απόδειξη.* Είναι προφανές ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$x_n - y_n \sqrt{d} = (x_1 - y_1 \sqrt{d})^n.$$

Επίσης οι $x_n, y_n$ είναι θετικοί ακέραιοι, αφού οι $x_1, y_1$ είναι θετικοί ακέραιοι. Η $(x_1, y_1)$ είναι μια λύση της $X^2 - dY^2 = 1$. Επομένως,

$$\begin{aligned} x_n^2 - dy_n^2 &= (x_n + \sqrt{d} y_n)(x_n - \sqrt{d} y_n) = \\ &= (x_1 + y_1 \sqrt{d})^n (x_1 - y_1 \sqrt{d})^n = \\ &= (x_1^2 - dy_1^2)^n = 1^n = 1. \end{aligned}$$

□

*Παράδειγμα.* Το συνεχές κλάσμα της $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$. Το $n = 1$. Συνεπώς η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης του Pell $X^2 - 2Y^2 = 1$ είναι $x_1 = p_3 = 3$, $y_1 = q_3 = 2$. Άρα και η $(x_2, y_2)$ όπου $x_2 + y_2 \sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2$ είναι επίσης λύση. Ομοίως και η $(x_3, y_3)$ όπου $x_3 + y_3 \sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^3 = 99 + 70\sqrt{2}$.

Στην επόμενη πρόταση θα αποδείξουμε ότι οι λύσεις της πρότασης 8.2.14 είναι όλες οι λύσεις της εξίσωσης του Pell

$$X^2 - dY^2 = 1.$$

**Πρόταση 8.2.15.** *Έστω $(x_1, y_1)$ η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης του Pell $X^2 - dY^2 = 1$. Όλες οι λύσεις αυτής δίνονται από τη σχέση*

$$x_n + y_n \sqrt{d} = (x_1 + y_1 \sqrt{d})^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια λύση $(u, v)$ της εξίσωσης του Pell η οποία δεν προκύπτει από την παραπάνω σχέση και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Επειδή τα $x_1$ και $y_1$ είναι θετικοί, οι δυνάμεις $(x_1 + y_1 \sqrt{d})^n \to \infty$ για $n \to \infty$. Επομένως, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0$, τέτοιος ώστε

$$(x_1 + y_1 \sqrt{d})^{n_0} < u + v\sqrt{d} < (x_1 + y_1 \sqrt{d})^{n_0 + 1},$$

δηλαδή

$$x_{n_0} + y_{n_0} \sqrt{d} < u + v\sqrt{d} < (x_{n_0} + y_{n_0} \sqrt{d})(x_1 + y_1 \sqrt{d}).$$

Προφανώς ισχύουν $x_{n_0} - y_{n_0} \sqrt{d} > 0$ και $x_{n_0}^2 - dy_{n_0}^2 = 1$. Επομένως έχουμε

$$1 < (x_{n_0} - y_{n_0} \sqrt{d})(u + v\sqrt{d}) < x_1 + y_1 \sqrt{d}.$$

Όμως,

$$(x_{n_0} - y_{n_0}\sqrt{d})(u + v\sqrt{d}) = (x_{n_0}u - y_{n_0}vd) + (x_{n_0}v - y_{n_0}u)\sqrt{d}.$$

Αν $a := x_{n_0}u - y_{n_0}vd$ και $b := x_{n_0}v - y_{n_0}u$, τότε

$$a^2 - db^2 = (x_{n_0}^2 - dy_{n_0}^2)(u^2 - dv^2) = 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι το ζεύγος $(a, b)$ είναι λύση της εξίσωσης του Pell $X^2 - dY^2 = 1$. Όμως $1 < a + b\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$. Θα αποδείξουμε ότι οι $a, b$ είναι θετικοί ακέραιοι. Από τις σχέσεις $1 < a + b\sqrt{d}$ και

$$a^2 - b^2d = (a - b\sqrt{d})(a + b\sqrt{d}) = 1$$

έπεται ότι

$$0 < a - b\sqrt{b} < 1.$$

Επομένως,

$$2a = (a + b\sqrt{d}) + (a - b\sqrt{d}) > 1 + 0 > 0$$

και $2b\sqrt{d} = (a + b\sqrt{d}) - (a - b\sqrt{d}) > 1 - 1 = 0$. Τελικά αποδείξαμε ότι το $(a, b)$ είναι μια θετική ακέραια λύση με $a < x_1$ και $b < y_1$, άτοπο. Αυτό αποδεικνύει την αλήθεια της πρότασης. □

**Παρατήρηση 8.2.16.** Από το παραπάνω γίνεται φανερό ότι το σημαντικό είναι ο υπολογισμός μιας θεμελιώδους λύσης της εξίσωσης του Pell. Αυτό επιτυγχάνεται, όπως έχουμε ήδη δει, μέσω του υπολογισμού των συγκλινόντων του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$. Ισχύει και το εξής:

Αν $(x, y)$ θετική ακέραια λύση της εξίσωσης του Pell $X^2 - dY^2 = 1$ και $x > \frac{y^2}{2} - 1$, τότε η $(x, y)$ είναι θεμελιώδης. Παραδείγματος χάρη, για $d = 2$, η $(3, 2)$ είναι θεμελιώδης.

## 8.3 Η γενικευμένη εξίσωση του Pell

Ο $d$ είναι, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, θετικός ακέραιος όχι τέλειο τετράγωνο. Είναι προφανές ότι η εξίσωση

$$X^2 - 3Y^2 = -1,$$

δεν έχει ακέραια λύση αφού $\left(\frac{-1}{3}\right) = -1$. Ομοίως η $X^2 - 5Y^2 = 2$ επίσης δεν έχει ακέραια λύση, αφού $\left(\frac{2}{5}\right) = -1$.

**Παρατήρηση 8.3.1.** Αν η εξίσωση $X^2 - dY^2 = N$ έχει μια ακέραια λύση, έστω $(a, b)$, και $(x, y)$ είναι μια μη-τετριμμένη λύση της εξίσωσης του Pell $X^2 - dY^2 = 1$, τότε έχουμε

$$N = N \cdot 1 = (a^2 - b^2d)(x^2 - y^2d) = (xa - dyb)^2 - d(xb - ay)^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι $(r, s)$ όπου $r := xa - dyb$ και $s := xb - ay$ είναι επίσης λύση της $X^2 - dY^2 = N$. Επειδή δε η $X^2 - dY^2 = 1$, έχει άπειρες λύσεις και η αρχική έχει επίσης άπειρο πλήθος λύσεων.

**Πρόταση 8.3.2.** *Η εξίσωση $X^2 - dY^2 = N$ δεν έχει ακέραια λύση ή έχει άπειρες λύσεις.*

**Πρόταση 8.3.3.** *Αν $p_n/q_n$ οι συγκλίνουτες του συνεχούς κλάσματος της $\sqrt{d}$ και $N$ ακέραιος τέτοιος ώστε $|N| < \sqrt{d}$ τότε κάθε θετική λύση $(x, y)$ της $X^2 - dY^2 = N$ με $(x, y) = 1$ ικανοποιεί τη σχέση $x = p_n$ και $y = q_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι $N > 0$. Από τη σχέση

$$(x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = n$$

έπεται ότι $x - y\sqrt{d} > 0$, δηλαδή $x > y\sqrt{d}$. Επομένως $\frac{x}{y} - \sqrt{d} > 0$. Η υπόθεση ότι $0 < N < d$ μας δίνει

$$\frac{x}{y} - \sqrt{d} = \frac{(x - y\sqrt{d})}{y} = \frac{x^2 - dy^2}{y(x + y\sqrt{d})} < \frac{N}{y(2y\sqrt{d})} < \frac{d}{2y^2\sqrt{d}} = \frac{1}{2y^2}.$$

Επομένως,

$$0 < \frac{x}{y} - \sqrt{d} < \frac{1}{2y^2},$$

οπότε πρόταση 7.5.5 τα $x, y$ πρέπει να είναι συγκλίνοντες του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $N < 0$. Διαιρούμε τα μέλη της $x^2 - dy^2 = N$ με $-d$ και έχουμε

$$y^2 - \frac{1}{d}x^2 = \frac{-N}{d}.$$

Εργαζόμαστε ανάλογα με την περίπτωση που το $N$ ήταν θετικό και συμπεραίνουμε ότι τα $x, y$ είναι συγλίνοντες του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\frac{1}{\sqrt{d}}$. Όμως, αν το συνεχές κλάσμα του άρρητου αριθμού $a$ είναι το

$$a = [a_0; a_1, a_2, \ldots],$$

τότε το συνεχές κλάσμα του $\frac{1}{a}$ είναι το

$$\frac{1}{a} = [0; a_0, a_1, a_2, \ldots, ].$$

Αυτό σημαίνει ότι ο $n$-στός συγκλίνων του $1/a$ ταυτίζεται με τον αντίστροφο του $(n-1)$-στού συγκλίνοντα του $a$.

Τελικά, έχουμε ότι ο $\frac{x}{y} = \frac{1}{y/x}$ είναι συγκλίνων του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{d}}} = \sqrt{d}$. □

**Παρατήρηση 8.3.4.** Από την προηγούμενη πρόταση βλέπουμε ότι για σχετικά μικρά $N$ πιθανές λύσεις προσδιορίζονται από τους συγκλίνοντες του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$.

Επίσης έχουμε δει ότι αν $(a, b)$ λύση της $X^2 - Y^2 b = N$ και $(x, y)$ λύση της $X^2 - dY^2 = 13^2 = 1$, τότε η $u + v\sqrt{d} = (a + b\sqrt{d})(x + y\sqrt{d})$ είναι επίσης λύση της $X^2 - dY^2 = N$.

**Ορισμός 8.3.5.** Λύσεις της εξίσωσης

$$X^2 - dY^2 = N,$$

οι οποίες προκύπτουν από μία λύση αυτής $(a, b)$ με πολλαπλασιασμό με μια λύση της $X^2 - dY^2 = 1$ λέγονται συνεταιρικές ή συσχετιζόμενες μεταξύ τους.

Το σύνολο όλων αυτών των λύσεων δημιουργεί μια άπειρη κλάση λύσεων.

**Παρατήρηση 8.3.6.** Προφανώς δύο λύσεις $u_1 + v_1\sqrt{d}$ και $u_2 + v_2\sqrt{d}$ της

$$X^2 - dY^2 = N$$

ανήκουν στην ίδια κλάση ακριβώς όταν οι αριθμοί

$$\frac{u_1 u_2 - v_1 v_2 d}{N}, \frac{v_1 u_2 - u_1 v_2}{N},$$

είναι αμφότεροι ακέραιοι.

Χωρίς απόδειξη αναφέρουμε ότι

**Πρόταση 8.3.7.** *Αν $N$ θετικός ακέραιος, τότε το σύνολο των κλάσεων των λύσεων της εξίσωσης $X^2 - dY^2 = N$ είναι πεπερασμένο.*

Θα επανέλθουμε σε σχετικά θέματα στο μεθεπόμενο κεφάλαιο στο οποίο θα μελετήσουμε τετραγωνικά αλγεβρικά σώματα αριθμών.

**Παρατήρηση 8.3.8.** Για μικρά $d$ είναι δυνατόν η θεμελιώδης λύση να είναι αρκετά μεγάλη. Για παράδειγμα η εξίσωση του Pell

$$X^2 - 991Y^2 = 1$$

έχει θεμελιώδη λύση

$$x = 379516400906811930638014896080,$$

$$y = 12055735790331359497442538767$$

Μάλιστα της εξίσωσης

$$X^2 - 1000099Y^2 = 1$$

η θεμελιώδης λύση έχει 1118-ψηφία. Το μήκος της περιόδου είναι 2174.

**Παρατήρηση 8.3.9.** Ελαφρά μεταβολή του $d$ αλλάζει άρδην τα δεδομένα. Έτσι για παράδειγμα αν $d = 60$, η θεμελιώδης λύση είναι $x = 31, y = 4$. Αν $d = 61$ η θεμελιώδης λύση είναι $x = 1766319049$, $y = 226153980$. Αν $d = 62$ η θεμελιώδης λύση είναι $x = 63$, $y = 8$, ενώ για $d = 1621$ η συντεταγμένη $x$ της θεμελιώδους λύσης έχει 76-ψηφία.

Αφορμή από το συγκεκριμένο παράδειγμα πήραν οι M.J. Jacobson και H.C. Williams [8] οι οποίοι θεώρησαν τη θεμελιώδη λύση $(x_0, y_0)$ της εξίσωσης του Pell $X^2 - (d-1)Y^2 = 1$ και τη θεμελιώδη λύση $(x_1, y_1)$ της $X^2 - dY^2 = 1$, όρισαν

$$\rho(d) := \frac{\log(x_1)}{\log(x_0)}$$

και απέδειξαν ότι ο λόγος μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλος.

## 8.4 Ιστορικά στοιχεία

### 8.4.1 Το Βοεικό πρόβλημα του Αρχιμήδη

Το 1773 ο Γερμανός ποιητής G.E. Lessing ανακάλυψε ένα βυζαντινό χειρόγραφο του 14ου αιώνα με 4 άγνωστα ποιήματα της Παλατινής Ανθολογίας. Ένα από αυτά είχε τίτλο στον οποίο δήλωνε ότι επρόκειτο για αριθμητικό πρόβλημα το οποίο πρότεινε με επιστολή του ο Αρχιμήδης στον Ερατοσθένη.

«ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρών τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περί ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ προς Ἐρατοσθένη τον Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.»

Στο πρόβλημα αυτό ζητείται να υπολογισθεί το πλήθος των βοοειδών του Θεού Ήλιου και αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως «Βοεικό πρόβλημα του Αρχιμήδη».

Αναφέρεται στον υπολογισμό των ταύρων και αγελάδων που ζούσαν στο νησί του Θεού Ήλιου. Έχουν 4 χρώματα (λευκό, μαύρο, ξανθό και ποικιλόχρωμο).

Αν $W, X, Y, Z$ είναι το πλήθος των λευκών, μαύρων, ξανθών και ποικιλόχρωμων ταύρων αντίστοιχα και $w, x, y, z$ το χρώμα των αντίστοιχων αγελάδων. Τότε σύμφωνα με το επίγραμμα, οι παραπάνω μεταβλητές θα πρέπει να επαληθεύουν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων.

$$
\begin{aligned}
W &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)X + Z\\
X &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)Y + Z\\
Y &= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)W + Z\\
w &= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(X + x)\\
x &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(Y + z)\\
y &= \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(Z + z)\\
z &= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(W + w)\\
W + X &= \square\\
Y + Z &= \Delta
\end{aligned}
$$

**Σημείωση:** Οι τελευταίοι δύο συμβολισμοί σημαίνουν ότι ο αριθμός $W+X$ είναι τέλειο τετράγωνο και ότι ο $Y+Z$ είναι τρίγωνος αριθμός.

Η λύση του συστήματος αυτού ανάγεται στην επίλυση μιας εξίσωσης του Pell, της

$$T^2 - dU^2 = 1,$$

όπου $d = 410286423278424$. Φυσικά θα μπορούσαμε να λύσουμε την εξίσωση αυτή του Pell υπολογίζοντας τους συγκλίνοντες του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d}$, αλλά το μήκος της περιόδου είναι 203254 [5].

Ο A. Amthor [1] παρατήρησε ότι ο $d = (9314)^2 4729494$ και ανήγαγε την αρχική εξίσωση στη μορφή

$$T^2 - d_0 U^2 = 1,$$

όπου τώρα το $d_0 = 4729494$ και η περίοδος του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{d_0}$, είναι μόνο 92. Η θεμελιώδης λύση της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$t = 109931986732829734979866232821433543901088049$$

και

$$u = 50549485234315033074477819735540408986340.$$

Βέβαια, εμείς ενδιαφερόμαστε για τη θεμελιώδη λύση της αρχικής. Αν $(x_1, y_1)$ η θεμελιώδης λύση της αρχικής τότε ο A. Amthor απέδειξε ότι

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = (t + u\sqrt{d_0})^{2329}.$$

Του ήταν όμως αδύνατο να λύσει το βοεικό πρόβλημα του Αρχιμήδη επειδή η τιμή του $y_1$ είναι αρκετά μεγάλη, προσεγγιστικά περίπου

$$1,83 \times 10^{103265}.$$

Ο συνολικός αριθμός των ζώων υπολογίστηκε τελικά το 1965 από τους H.C. Williams, R.A. German και C. R. Zarnke προφανώς και με χρήση υπολογιστή [3].

Αργότερα, ο αριθμός δημοσιεύτηκε από τον H.L. Nelson [4] και καταλαμβάνει 12 τυπωμένες σελίδες.

Περισσότερα σχετικά στοιχεία μπορεί να βρει ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης στα άρθρα [6], [5].

Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει και το ιστορικό - φιλοσοφικό άρθρο του Μιχάλη Λάμπρου [10].

### 8.4.2 Σύντομη ιστορική αναδρομή

Φαίνεται ότι η πρώτη αναφορά στις εξισώσεις του Pell γίνεται στο έργο του Θέωνα του Σμυρναίου. Ακολούθησαν σχετικές παρατηρήσεις στο θέμα από τον Πρόκλο. Ουσιαστικά χρησιμοποιήθηκαν οι συγκλίνοντες του συνεχούς κλάσματος του αριθμού $\sqrt{2}$ για να τον προσεγγίσουν.

Στο έργο του «Κύκλου Μέτρησις» ο Αρχιμήδης προσεγγίζει, χωρίς επεξήγηση, τον αριθμό $\sqrt{3}$ ως εξής:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1350}{780}.$$

Ας σημειωθεί ότι οι $\frac{265}{153}$ και $\frac{1350}{780}$ είναι οι 8ος και 11ος συγκλίνοντες του αριθμού $\sqrt{3}$.

Το 628 ο Brahmagupta ήταν ο πρώτος που ανακάλυψε την ταυτότητα:

$$\text{Αν } X_1^2 - dY_1^2 = a \text{ και } X_2^2 - dY_2^2 = b$$

τότε ισχύει

$$(X_1X_2 + dY_1Y_2)^2 - d(X_1Y_2 + Y_1X_2)^2 = ab.$$

Κάνοντας χρήση της παραπάνω ταυτότητας, ανακάλυψε μια ad hoc μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης του Pell:

$$X^2 - 92Y^2 = 1.$$

Παρατήρησε ότι $10^2 - 92 = 8$ και συνθέτοντας αυτή τη λύση με τον εαυτό της, όπως στην ταυτότητα παραπάνω, βρήκε ότι

$$192^2 - 92 \cdot 20^2 = 64.$$

Επομένως $24^2 - 92 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 1$ και συνθέτοντας και πάλι με τον εαυτό της υπολόγισε ότι

$$1151^2 - 92 \cdot 120^2 = 1.$$

Η σημαντικότερη συμβολή των Ινδικών μαθηματικών όσον αφορά στην εξίσωση του Pell είναι η ανακάλυψη της κυκλικής μεθόδου κατά τον 12ο αιώνα [2], [7].

Ακολούθησε ένα μεγάλο χρονικό διάστημα και η Θεωρία Αριθμών ξαναγεννήθηκε για δεύτερη φορά - όπως ο Ιανός κατά τον A. Weil.

Ο P. de Fermat, το 1657 σε επιστολή του προς τον Frenicle, θέτει προς απόδειξη το ακόλουθο πρόβλημα:

«Δίδεται κάποιος (θετικός) ακέραιος $d$ ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Υπάρχει άπειρο πλήθος ακέραιων των οποίων αν στο τετράγωνο αυτού πολλαπλασιασμένο με το $d$ προσθέσουμε και μια μονάδα βρίσκουμε τέλειο τετράγωνο ακεραίου.»

Στη συνέχεια απαιτεί την εύρεση ενός γενικού κανόνα επίλυσης του προβλήματος και ερωτά για τις ειδικές περιπτώσεις $d = 109, 149, 433$.

Οι ειδικές αυτές περιπτώσεις έχουν επιλυθεί από τους Brounker και Wallis [2], [9].

Παρά ταύτα, ούτε ο Brouncker, ούτε ο Wallis, ούτε ο Frénicle κατάφεραν να αποδείξουν ότι η εξίσωση του Pell έχει πάντοτε μη-τετριμμένες λύσεις για κάθε θετικό ακέραιο ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Η μέθοδος του Brouncker τροποποίηθηκε και επεκτάθηκε από τον Euler, ο οποίος παρατήρησε ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί η θεωρία των συνεχών κλασμάτων και να μας δώσει έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο επίλυσης της εξίσωσης του Pell.

Σημαντική ήταν και η συνεισφορά του Lagrange.

Η εξίσωση φέρει το όνομα του Άγγλου μαθηματικού John Pell (1611-1685), ο οποίος όμως είχε ελάχιστη σχέση με το πρόβλημα. Το λάθος οφείλεται στον Euler. «Ηθικό δίδαγμα»! Μπορεί κανείς να περάσει στην Ιστορία ακόμα και αν δεν έχει κάνει κάτι σχετικό.

# Βιβλιογραφία


[1] A. Amthor: *Das Problema bovinum des Archimedes.* Zeitschrift für Math. u. Physik (Hist. Litt. Abtheilung), 25:153–171, 1880.

[2] A. Weil: *Number theory, an approach through history, from Hammurapi to Legendere.* Birkhäuser Boston, 1983.

[3] H. C. Williams, R. A. German, C. R. Zarnke: *Solution of the cattle Problem of Archimedes.* Math. Comp., 19:671–674, 1965.

[4] H. L. Nelson: *A solution to Archimedes cattle problem.* J. Recreational Math., 13:162–176, 1981.

[5] H. W. Lenstra: *Solving the Pell equation.* Notices of the AMS, 49:182–192, 2002.

[6] I. Vardi: *Archimedes' cattle problem.* Amer. Math. Monthly, 105:305–319, 1998.

[7] J. Jacobson, H.C. Williams: *Solving the Pell equation.* Springer New York, 2009.

[8] M. J. Jacobson, H. C. Williams: *The size of the fundamental solutions of consecutive Pell equations.* Experimental Mathematics, 9:631–640, 2000.

[9] S. Mahoney: *The Mathematical career of Pierre de Fermat.* Princeton University Press New York, 1994. 2nd edition.

[10] Λάμπρου, Μιχάλης: *το βοεικό πρόβλημα του Αρχιμήδη.* σελίδες 195–2, 1992. Κείμενα ιστορίας και φιλοσοφίας των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, Επιμ. Δ. Α. Αναπολιτάνος - Β. Καρασμάνης.