Κεφάλαιο 4

Υπολογισμός γραμμών επιρροής

Σύνοψη

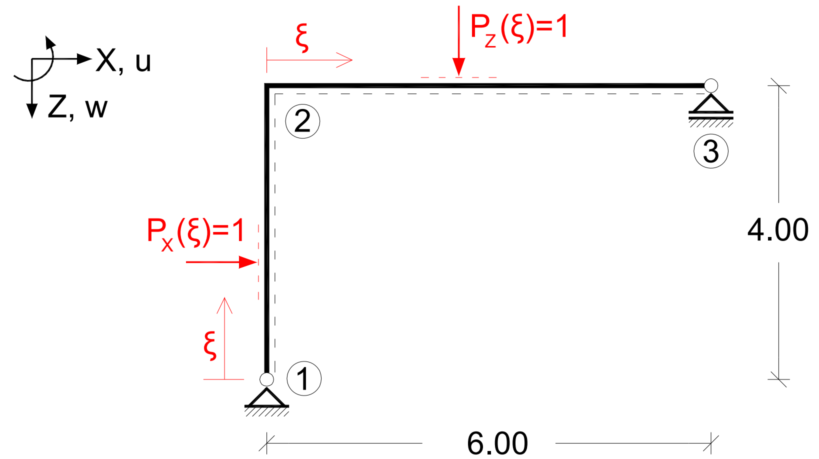
Οι ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού αφορούν τις μεθόδους υπολογισμού (α) γραμμών επιρροής μεγεθών έντασης, (Ομάδα Λ) και (β) γραμμών επιρροής μεγεθών παραμόρφωσης (Ομάδα Λ). Ως παραδείγματα χρησιμοποιούνται διάφοροι επίπεδοι και χωρικοί φορείς (δοκός, ημιπλαίσιο, πλαίσιο, δικτύωμα) με ακλόνητες ή ελαστικές στηρίξεις/πακτώσεις. Για τον υπολογισμό των γραμμών επιρροής εντασιακών μεγεθών χρησιμοποιείται η κινηματική μέθοδος, η οποία βασίζεται στην πρόταση αμοιβαιότητας των Krohn-Land ενώ για τον υπολογισμό γραμμών επιρροής παραμορφωσιακών μεγεθών εφαρμόζεται η πρόταση των Maxwell-Mohr..

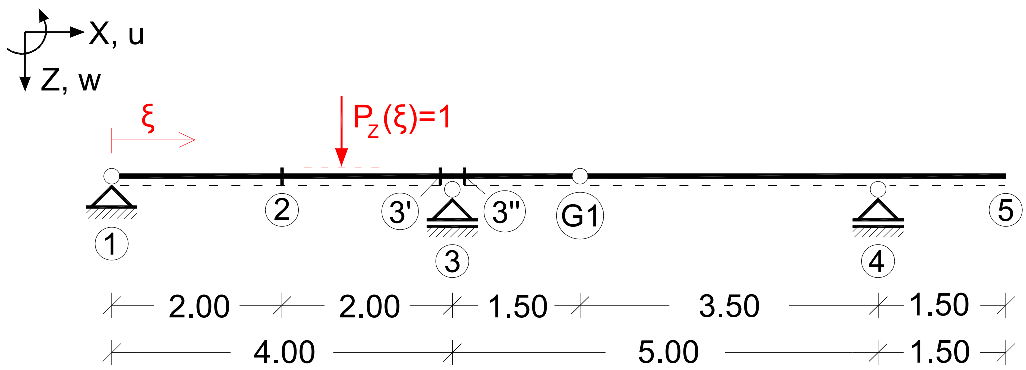
Προαπαιτούμενη γνώση

Απαραίτητη είναι η προηγούμενη μελέτη και κατανόηση της σχετικής με το παρόν κεφάλαιο θεωρίας, όπως αυτή παρουσιάζεται σε βιβλία Στατικής των Κατασκευών (βλ. π.χ. [1] και [2]). Οπωσδήποτε απαιτείται η κατανόηση των μεθόδων υπολογισμού μεγεθών έντασης και παραμόρφωσης, η εφαρμογή των οποίων παρουσιάστηκε στις ασκήσεις των προηγηθέντων κεφαλαίων.

4.1 Υπολογισμός γραμμών επιρροής εντασιακών μεγεθών (Ομάδα Λ)

Για τους παρακάτω ισοστατικούς φορείς να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν οι ζητούμενες γραμμές επιρροής εφαρμόζοντας την κινηματική μέθοδο (πρόταση Krohn-Land).

<table>
<tr><td>Λ1</td><td>
Για τον παρακάτω αμφιέρειστο φορέα (βλ. Άσκηση Η1/6) ζητούνται οι ΓΕ:
(α) $M_{2,\xi}$ για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)=1$ στο ζύγωμα 2-3 και
(β) $M_{2,\xi}$ για κίνηση του οριζόντιου μοναδιαίου φορτίου $P_X(\xi)=1$ στον στύλο 1-2.


</td></tr>
<tr><td>Λ2</td><td>
Για την παρακάτω αρθρωτή δοκό (βλ.Άσκηση Η4/1) ζητούνται οι ΓΕ:
(α) $M_{2,\xi}$,
(β) $M_{3,\xi}$,
(γ) $Q_{3'',\xi}$ και
(δ) $A_{Z3,\xi}$ για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)=1$ μεταξύ των σημείων 1 και 5. Επίσης,
(ε) να υπολογιστούν με αποτίμηση των κατάλληλων ΓΕ οι τιμές των μεγεθών M_2 , M_3 , $Q_{3''}$ και A_{Z3} λόγω των φορτίων της Άσκησης Η4/1.


</td></tr>
</table>

Λ3

Για το παρακάτω αμφιέρειστο πλαίσιο (βλ. Άσκηση Ζ2) ζητούνται οι ΓΕ:

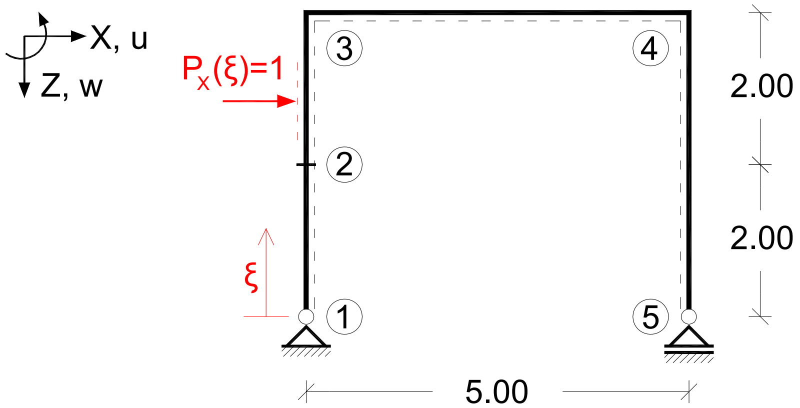
(α) $A_{Z5,\xi}$,

(β) $M_{2,\xi}$,

(γ) $Q_{2,\xi}$ και

(δ) $N_{2,\xi}$ για κίνηση του οριζόντιου μοναδιαίου φορτίου $P_X(\xi)=1$ στον στύλο 1-2-3. Επίσης,

(ε) να υπολογιστούν με αποτίμηση των παραπάνω ΓΕ οι τιμές των μεγεθών A_{Z5}, M_2 , Q_2 και N_2 λόγω του φορτίου q_X=10kN/m της Άσκησης Ζ2.

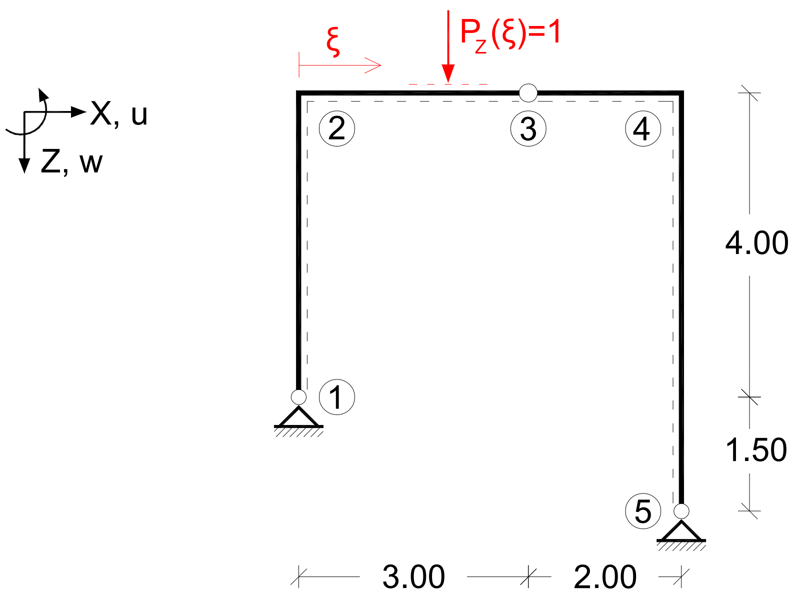


Λ4

Για το παρακάτω τριαρθρωτό πλαίσιο (βλ. Άσκηση Ζ3) ζητείται:

(α) η ΓΕ $M_{4,\xi}$ για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)=1$ στο ζύγωμα 2-3-4. Επίσης,

(β) να υπολογιστεί με αποτίμηση της παραπάνω ΓΕ η τιμή της M_4 λόγω του φορτίου q_Z=30kN/m της Άσκησης Ζ3.

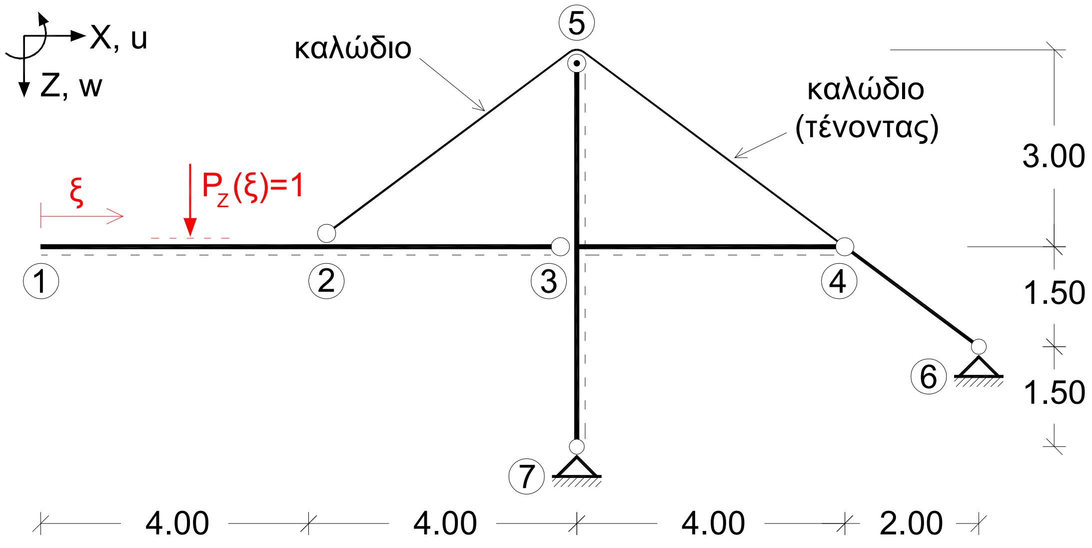


Λ5

Για τον παρακάτω ισοστατικό φορέα (βλ. Άσκηση Η9/5) ζητείται:

(α) η ΓΕ $N_{καλ,ξ}$ του καλωδίου 2-5-4 για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(ξ)=1$ επί του καταστρώματος 1-2-3-4. Επίσης,

(β) να υπολογιστεί με αποτίμηση της παραπάνω ΓΕ η τιμή της $N_{καλ}$ λόγω του φορτίου q_z=20kN/m της Άσκησης Η9/5.

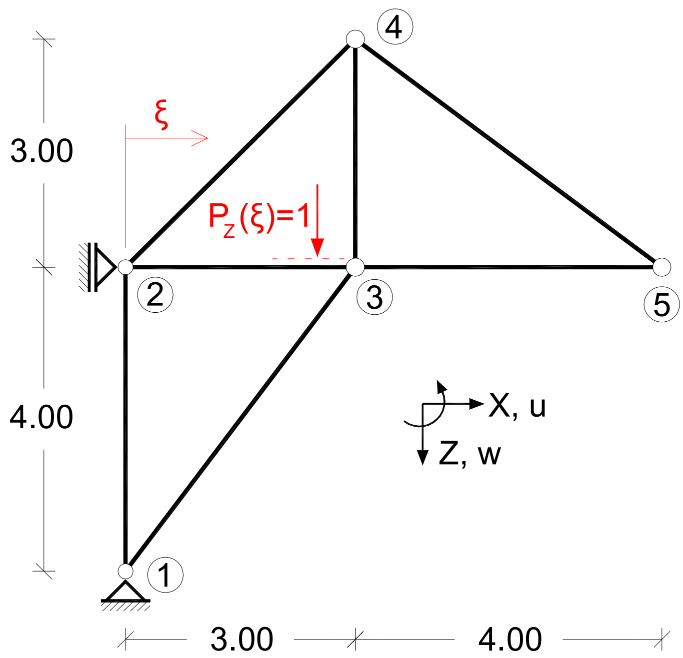


Λ6

Για τον παρακάτω δικτυωτό ισοστατικό φορέα (βλ. Άσκηση Ζ5) ζητείται:

(α) η ΓΕ $N_{12,ξ}$ της ράβδου 1-2 για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(ξ)=1$ επί των στοιχείων 2-3 και 3-5. Επίσης,

(β) να υπολογιστεί με αποτίμηση της παραπάνω ΓΕ η τιμή της N_{12} λόγω του συγκεντρωμένου φορτίου F_{Z5} =50kN της Άσκησης Ζ5.

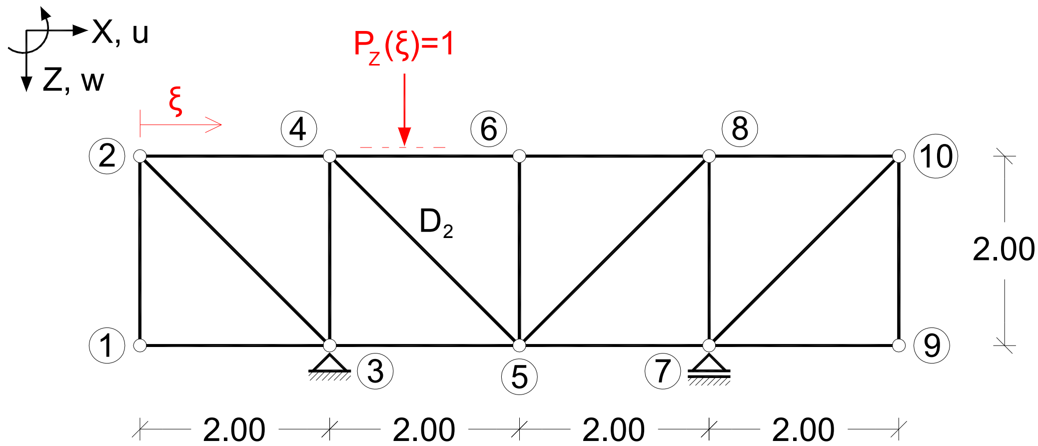


Λ7

Για τον παρακάτω δικτυωτό ισοστατικό φορέα (βλ. Άσκηση Η8/1) ζητείται:

(α) η ΓΕ $D_{2,\xi}$ της ράβδου D_2 για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)=1$ επί του άνω πέλματος 2-4-6-8-10. Επίσης,

(β) να υπολογιστεί με αποτίμηση της παραπάνω ΓΕ η τιμή της D_2 λόγω των πέντε συγκεντρωμένων φορτίων της Άσκησης Η8/1.



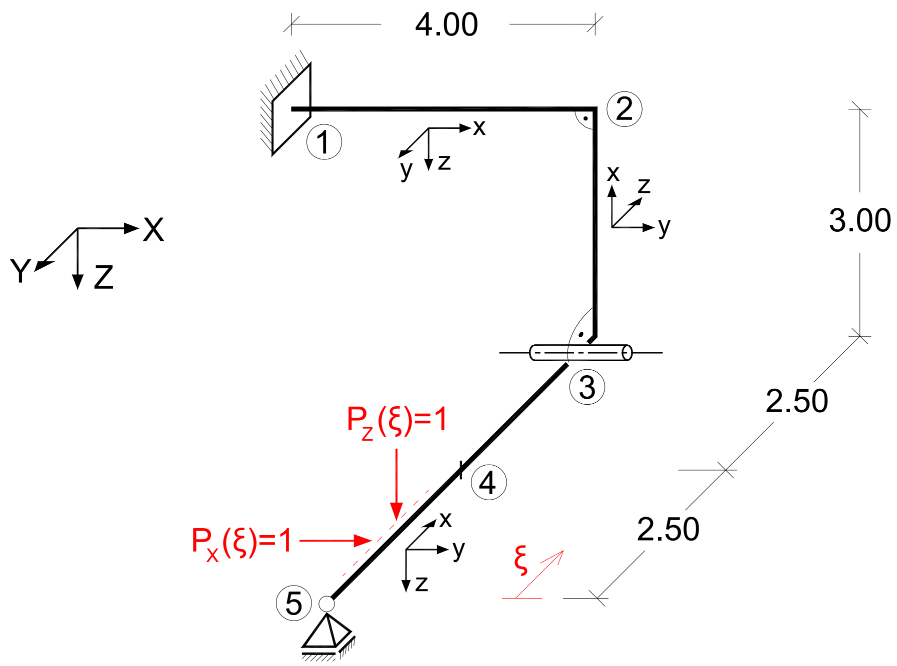
Λ8

Για τον παρακάτω χωρικό ισοστατικό φορέα (βλ. Άσκηση Ζ6) ζητείται

(α) η ΓΕ $M_{y1,\xi}$ για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)=1$ επί της δοκού 5-4-3 καθώς και

(β) η ΓΕ $M_{y1,\xi}$ για κίνηση του οριζόντιου μοναδιαίου φορτίου $P_X(\xi)=1$ επί της δοκού 5-4-3. Επίσης,

(γ) να υπολογιστεί με αποτίμηση των παραπάνω ΓΕ η τιμή της M_{y1} λόγω των συγκεντρωμένων φορτίων $F_{X4}=40kN$ και $F_{Z4}=80kN$ της Άσκησης Ζ6.



ΛΥΣΕΙΣ

Πριν την παρουσίαση των λύσεων, παρατίθενται χάριν διευκόλυνσης του σπουδαστή τα επί μέρους βήματα που περιλαμβάνει ο υπολογισμός γραμμών επιρροής (ΓΕ) εντασιακών μεγεθών με τη βοήθεια της κινηματικής μεθόδου, δηλαδή με τη βοήθεια της πρότασης Krohn-Land. Η περιγραφή των βημάτων συνοδεύεται από το παράδειγμα υπολογισμού της ΓΕ $M_{i,\xi}=M_{i,Pz(\xi)=1}$, μιας μονοπροέχουσας δοκού που παρουσιάζεται σε ξεχωριστό πίνακα με τα αντίστοιχα σχήματα.

Βήματα υπολογισμού ΓΕ εντασιακών μεγεθών με την κινηματική μέθοδο (βλ. [2], παράγρ. 10.4.2]:

(1) (i) Με μία νοητή τομή καταλύουμε/ τέμνουμε τη δεσμική ράβδο - σύνδεσμο στο σημείο a που μεταβιβάζει το εντασιακό μέγεθος E_a του οποίου τη ΓΕ $E_{a,P(\xi)=1}$ θέλουμε να υπολογίσουμε, δηλαδή εισάγουμε στο σημείο a μία εργικώς αντίστοιχη άρθρωση.

Π.χ., αν ζητούμενη είναι η ΓΕ $M_{i,P_z(\xi)}$ της ροπής M_i, εισάγουμε στο σημείο i μία καμπτική άρθρωση (βλ. παρακάτω πίνακα) και αν ζητούμενη είναι η ΓΕ $Q_{i,P_z(\xi)}$ της τέμνουσας Q_i, εισάγουμε στο σημείο i μία διατμητική άρθρωση.

(ii) Η κατάλυση μίας εσωτερικής ή εξωτερικής δεσμικής ράβδου μετατρέπει τον αρχικώς ισοστατικό φορέα σε μία χαλαρή μονοκινηματική αλυσίδα - μηχανισμό. Για να διατηρηθεί η αρχική ισορροπούσα εντασιακή κατάσταση που επικρατούσε στον δεδομένο ισοστατικό φορέα λόγω του φορτίου P(ξ)=1 στην τυχούσα θέση ξ, προσάγουμε στις δύο όχθες της καταλυθείσας δεσμικής ράβδου τα δύο σκέλη του εντασιακού ζεύγους που δρούσε σ' αυτήν πριν την κατάλυσή της, με την εξ ορισμού συμβατικά θετική τους φορά. Εφόσον καταλύεται εσωτερικός σύνδεσμος, το αντίστοιχο εργικά ανταποκρινόμενο φορτίο διατομής εισάγεται ως ζεύγος δυνάμεων ή ροπών στις δύο όχθες της τομής. Εφόσον καταλύεται εξωτερικός σύνδεσμος, αρκεί η προσαγωγή της αντίδρασης στήριξης στην όχθη που πρόσκειται στον φορέα. Στην άλλη όχθη της τομής δρα η δύναμη έδρασης, η οποία μπορεί να αγνοηθεί αφού δρα επί του αμετακίνητου εδάφους και δεν παράγει δυνατό έργο κατά τη δυνατή μετακίνηση του φορέα.

Π.χ., αν ζητούμενη είναι η ΓΕ $M_{i,P_z(\xi)}$, προσάγουμε στην εισαχθείσα στο σημείο i καμπτική άρθρωση τη ροπή $M_{i,P_z(\xi)}$ (βλ. παρακάτω πίνακα) και αν ζητούμενη είναι η ΓΕ $Q_{i,P_z(\xi)}$, προσάγουμε στην εισαχθείσα στο σημείο i διατμητική άρθρωση την τέμνουσα $Q_{i,P_z(\xi)}$.

(2) Παρά τη διατήρηση της προϋπάρχουσας ισορροπίας, η κατάλυση ενός συνδέσμου έχει μετατρέψει τον αρχικώς ισοστατικό φορέα σε *μονοκινηματική* αλυσίδα. Η *δυνατότητα* μετακίνησης του χαλαρού πλέον φορέα περιγράφεται με τη βοήθεια του διαγράμματος των πόλων στροφής (βλ. π.χ. [2], παράγρ. 5.3.3). Προκειμένου τώρα να εφαρμόσουμε την ΑΔΕ

(i) υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση τέτοια, ώστε στην εισαχθείσα άρθρωση να αναπτυχθεί μία *μοναδιαία αρνητική* διαφορά μετακινήσεων και

(ii) με τη βοήθεια του διαγράμματος των πόλων στροφής προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο με P(ξ)=1 πέλμα του φορέα.

Π.χ., αν ζητούμενη είναι η ΓΕ $M_{i,P_z(\xi)}$, επιβάλλουμε στην εισαχθείσα στο σημείο i καμπτική άρθρωση το μοναδιαίο αρνητικό γόνατο $\Delta\varphi_i^v$=- (βλ. παρακάτω πίνακα) και αν ζητούμενη είναι η ΓΕ $Q_{i,P_z(\xi)}$, επιβάλλουμε στην εισαχθείσα στο σημείο i διατμητική άρθρωση το μοναδιαίο αρνητικό άλμα $\Delta w_i^v=-1$.

(3) Κατά τη δυνατή μετακίνηση του μονοκινηματικού φορέα τα πραγματικά εντασιακά μεγέθη του φορέα παράγουν δυνατό έργο W^v. Εφόσον οι δυνατές παραμορφώσεις είναι μηδενικές, δυνατό έργο παράγεται μόνο από τα εξωτερικά εντασιακά μεγέθη ($W^v=W_e^v$), δηλαδή

(i) από το κινητό φορτίο P(ξ)=1, το οποίο παράγει δυνατό έργο επί των εργικώς ανταποκρινόμενων μετακινήσεων των σημείων εφαρμογής του, π.χ., αν το P(ξ) είναι μία δύναμη $P_z(\xi)$, παράγει έργο επί των βυθίσεων w(ξ), και αν το P(ξ) είναι μία ροπή $M_L(\xi)$, παράγει έργο επί των στροφών φ(ξ) του φορτιζόμενου πέλματος και

(ii) από το ζητούμενο εντασιακό μέγεθος $E_{a,P(\xi)=1}$, το οποίο παράγει δυνατό έργο επί της επιβληθείσας στην άρθρωση, στην οποία αυτό ενεργεί, μοναδιαίας αρνητικής διαφοράς μετακινήσεων, π.χ., επί του μοναδιαίου αρνητικού γονάτου $\Delta\varphi_i^v=-1$, αν $E_a=M_i$, ή επί του μοναδιαίου αρνητικού άλματος $\Delta w_i^v=-1$, αν $E_a=Q_i$.

Σύμφωνα με την ΑΔΕ, καταγράφουμε όλα τα παραχθέντα κατά την επιβληθείσα δυνατή μετακίνηση εξωτερικά δυνατά έργα, θέτουμε το άθροισμά τους ίσο με το μηδέν και επιλύουμε την προκύπτουσα εξίσωση ως προς το ζητούμενο εντασιακό μέγεθος.

Π.χ., αν ζητούμενη είναι η ΓΕ $M_{i,P_z(\xi)}$ όπως στο παράδειγμα του παρακάτω πίνακα, έχουμε:

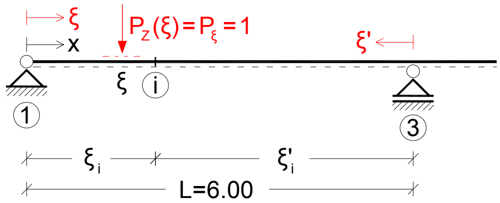
$$W_e^v = P_z(\xi) \cdot w^v(\xi) + M_{i,P_z(\xi)} \cdot \Delta\varphi_i^v = 0$$

και συνεπώς:

$$M_{i,P_z(\xi)} = -\left[w^v(\xi)/\Delta\varphi_i^v\right] \cdot P_z(\xi)$$

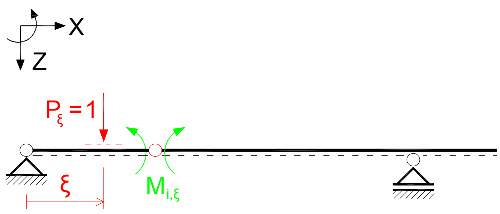
Πίνακας: *Υπολογισμός της ΓΕ της ροπής κάμψης μιας δοκού με την κινηματική μέθοδο (πρόταση Krohn-Land)*

Δεδομένος φορέας και φόρτιση



(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει τη ροπή κάμψης M_i, δηλαδή εισάγουμε στο σημείο i μία καμπτική άρθρωση.

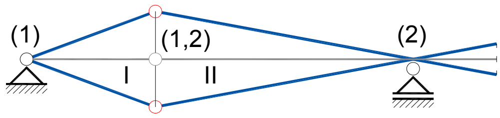
Προς διατήρηση της ισορροπίας προσάγουμε στην εισαχθείσα άρθρωση τα δύο σκέλη της ζητούμενης ΓΕ $M_{i,\xi}=M_{i,Pz(\xi)=1}$ με τη συμβατικά θετική τους φορά.

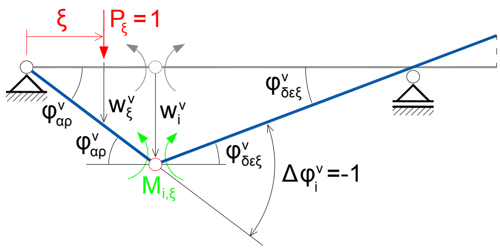


(2) Κατασκευάζουμε το διάγραμμα πόλων του μονοκινηματικού φορέα (*Σημ.:* Για τον ιδιαίτερα απλό φορέα του παραδείγματός μας το βήμα αυτό είναι πρακτικά περιττό) και, στη συνέχεια,

(i) τον υποβάλλουμε σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε στο σημείο i να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό γόνατο $\Delta\varphi_i^v$=-1 και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα.





$$\varphi_{\alpha\rho}^v = -\frac{w_i^v}{\xi_i}, \quad \varphi_{\delta\varepsilon\xi}^v = \frac{w_i^v}{\xi'_i}$$

$$\Delta\varphi_i^v = \varphi_{\alpha\rho}^v - \varphi_{\delta\varepsilon\xi}^v = w_i^v \cdot \left(-\frac{1}{\xi_i} - \frac{1}{\xi'_i}\right) = -w_i^v \cdot \left(\frac{L}{\xi_i \cdot \xi'_i}\right)$$

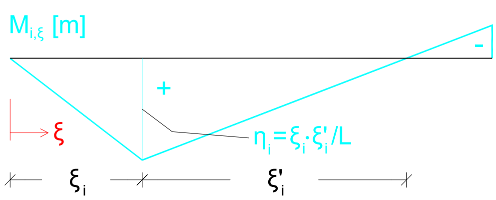
$$\Delta\varphi_i^v = -1 \Rightarrow w_i^v = \frac{\xi_i \cdot \xi'_i}{L}$$

(3) Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, η κατά την έννοια του κινητού φορτίου P_ξ γραμμή βυθίσεων

$$w^v(\xi)_{,\Delta\varphi i=-1} = w^v_{\xi,i} = w^v_\xi$$

του φορτιζόμενου πέλματος ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ:

$$M_{i,Pz(\xi)=1} = w^v_\xi = \eta_\xi.$$



Η παραπάνω σχέση αποτελεί έναν *γενικό τύπο* για την ΓΕ $M_{i,P_{z(\xi)}}$. Θέτοντας το κινητό φορτίο ίσο με την αδιάστατη μονάδα, δηλαδή $P_z(\xi)=1[-]$, και την επιβληθείσα νοητή μετακίνηση ίση με την *αρνητική* μονάδα, δηλαδή $\Delta\varphi_i^{v}=-1$, παίρνουμε για τη ζητούμενη ΓΕ:

$$M_{i,P_z(\xi)} = w^{v}(\xi),_{\Delta\varphi_i = -1} \qquad (*)$$

ή με συνοπτικότερο συμβολισμό των δεικτών:

$$M_{i,\xi} = w^{v}_{\xi,i} \quad [\mathrm{kNm/kN}] \qquad (**)$$

όπου $w^{v}_{\xi,i}$ η κατά την έννοια και διεύθυνση του κινητού φορτίου δυνατή, νοητή γραμμή βυθίσεων (ελαστική γραμμή) του φορέα, λόγω της επιβεβλημένης *αρνητικής* μοναδιαίας μετακίνησης $\Delta\varphi_i^{v}=-1$. Οι τεταγμένες της ΓΕ είναι:

$$\eta_\xi = \eta(\xi) = w^{v}(\xi),_{\Delta\varphi_i = -1}$$

όπου το πεδίο μεταβολής της τετμημένης ξ περιλαμβάνει όλο το μήκος του φορτιζόμενου πέλματος.

Με βάση όλα τα παραπάνω μπορούμε να πούμε συνοπτικά ότι οι ΓΕ εντασιακών μεγεθών είναι ελαστικές γραμμές, οι οποίες, για τους λόγους που προαναφέρθηκαν, αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα. Ακριβέστερο είναι, βέβαια, να λέμε ότι πρόκειται για *δυνατές, νοητές, ελαστικές γραμμές*, δηλαδή για ελαστικές γραμμές λόγω *δυνατών* αρνητικών μοναδιαίων μετακινήσεων, αφού η περιγραφείσα κινηματική μέθοδος υπολογισμού ΓΕ βασίζεται στην ΑΔΕ. Εντούτοις, η παράλειψη της θεωρητικά ορθότερης αυτής διατύπωσης δεν έχει καμία περαιτέρω συνέπεια όσον αφορά τον αριθμητικό υπολογισμό των ΓΕ. Εξάλλου, το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε, μπορεί να θεωρηθεί ότι απορρέει από την 3η πρόταση αμοιβαιότητας των Krohn-Land, όπου οι μετακινήσεις δεν είναι δυνατές, αλλά πραγματικές. Γι’ αυτό και κατά κανόνα παραλείπουμε τον άνω δείκτη v που συμβολίζει τον νοητό χαρακτήρα των σχετικών μεγεθών. Η πρόταση Krohn-Land ως θεωρητική βάση για τον υπολογισμό ΓΕ εντασιακών μεγεθών, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

> Η ΓΕ $E_{a,P(\xi)=1}$ ενός εντασιακού μεγέθους E_a λόγω ενός κινητού φορτίου $P(\xi)=1$ συμπίπτει/ ταυτίζεται με τη γραμμή μετακινήσεων - ελαστική γραμμή του φορτιζόμενου πέλματος, κατά την έννοια και διεύθυνση του φορτίου P, που προκύπτει, εάν στη θέση αναφοράς a καταλυθεί ο σύνδεσμος που μεταβιβάζει το μέγεθος E_a , δηλαδή εισαχθεί αντίστοιχη άρθρωση και επιβληθεί η εργικά ανταποκρινόμενη προς το μέγεθος E_a αρνητική μοναδιαία μετακίνηση $\delta_a=-1$.

Ακολούθως, παρουσιάζεται ένας πρακτικός τρόπος προσδιορισμού ΓΕ εντασιακών μεγεθών με την πρόταση Krohn-Land:

Χρησιμοποιώντας τους γενικότερους συμβολισμούς $K_{a,\xi}=M_{a,\xi}$ και $\delta_{\xi,a}=w_{\xi,a}$ (για *θετικά* μοναδιαία αίτια), η εξίσωση (**) της προηγούμενης παραγράφου γράφεται ως εξής: με *αρνητικό* πρόσημο λόγω του *αρνητικού* μοναδιαίου αιτίου:

$$K_{a,\xi} = -\delta_{\xi,a}$$

ή παραλείποντας το κόμμα:

$$K_{a\xi} = -\delta_{\xi a}$$

οπότε γίνεται και οπτικά σαφές ότι εκφράζει την 3η πρόταση αμοιβαιότητας $K_{mn}=-\delta_{nm}$ κατά Krohn-Land. Προσοχή στο αρνητικό πρόσημο!

Παρατηρώντας προσεκτικότερα την εξίσωση (*) διαπιστώνουμε ότι αυτή εκφράζει τον εξής «μετασχηματισμό» (παραλείπεται ο άνω δείκτης v):

$$M_{a,P_z(\xi)=1} = w(\xi),_{\Delta\varphi_a=-1}$$

Δηλαδή, ο δεύτερος δείκτης (δείκτης αιτίου) $P_z(\xi)=1$ «μετατρέπεται» με εργική αντιστοίχιση στο τελικώς ζητούμενο μέγεθος w(ξ): Στην κάθετη στον άξονα ξ δύναμη P_z αντιστοιχεί εργικά η κάθετη στον άξονα ξ μετατόπιση w. Παρομοίως, το αρχικώς ζητούμενο μέγεθος M_a «μετατρέπεται»με εργική αντιστοίχιση στο αίτιο $\Delta\varphi_a=-1$, που προκαλεί το τελικώς ζητούμενο μέγεθος w(ξ): Στη ροπή M_a αντιστοιχεί εργικά το γόνατο $\Delta\varphi_a$, το οποίο βέβαια εδώ θέτουμε ίσο με -1.

Ο «μετασχηματισμός» αυτός, ο οποίος εκφράζει με πρακτικό τρόπο την πρόταση Krohn-Land $K_{mn}=-\delta_{nm}$, εφαρμόζεται γενικά. Έτσι, π.χ. για τις ΓΕ της τέμνουσας και της αξονικής δύναμης στο σημείο a παίρνουμε αντίστοιχα:

$$Q_{a,P_z(\xi)=1} = w(\xi),_{\Delta w_a=-1}$$

$$N_{a,P_z(\xi)=1} = w(\xi),_{\Delta u_a=-1}$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτουν οι ΓΕ των αντιδράσεων στήριξης και των ροπών πάκτωσης. Εφόσον οι αντιδράσεις αυτές εισαχθούν - ως συνήθως - *αντίθετα* προς τη φορά των αξόνων αναφοράς x-z, οι εργικά ανταποκρινόμενες μετακινήσεις, των οποίων η συμβατικά θετική φορά συμπίπτει με τη φορά των αξόνων x-z, επιβάλλονται με *θετική* μοναδιαία τιμή. Έτσι, π.χ. για την κατακόρυφη αντίδραση σε μια στήριξη b και για τη ροπή πάκτωσης σε μια πάκτωση c παίρνουμε αντίστοιχα:

$$A_{Zb,P_z(\xi)=1} = w(\xi),_{w_b=1}$$

$$M_{\Pi c,P_z(\xi)=1} = w(\xi),_{\varphi_c=1}$$

Επίσης, είναι σαφές ότι αν ζητείται η ΓΕ ενός μεγέθους έντασης, π.χ. της ροπής M_a, λόγω μιας *κινητής μοναδιαίας ροπής* M_L (ξ)=1, ο δεύτερος αυτός δείκτης αιτίου «μετατρέπεται» με εργική αντιστοίχιση στο τελικώς ζητούμενο μέγεθος φ(ξ):

$$M_{a,M_L(\xi)=1} = \varphi(\xi),_{\Delta\varphi_a=-1}$$

Δηλαδή, ζητούμενη είναι τώρα όχι η γραμμή μετατοπίσεων κατά z (ελαστική γραμμή) w(ξ), αλλά το διάγραμμα των στροφών φ(ξ) του φορτιζόμενου πέλματος, δηλαδή η αρνητική πρώτη παράγωγος της ελαστικής γραμμής (φ=-w').

Για μια διεξοδικότερη παρουσίαση της κινηματικής των μεθόδων υπολογισμού γραμμών επιρροής εντασιακών μεγεθών, ο σπουδαστής θα πρέπει να ανατρέξει στη σχετική βιβλιογραφία (βλ. π.χ. [2], κεφ. 10).

Άσκηση Λ1

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1.

α) ΓΕ της ροπής M_2 λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$ στο ζύγωμα 2-3

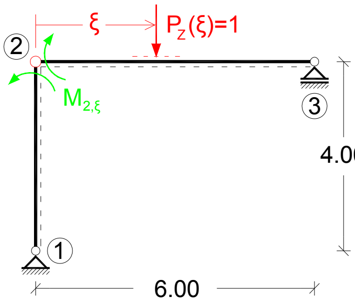
Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$M_{2,P_Z(\xi)=1} = w(\xi),_{\Delta\varphi_2=-1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή του ζυγώματος 2-3 λόγω του αρνητικού μοναδιαίου καταναγκασμού $\Delta\varphi_2$=-1 στο σημείο 2. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης v στις δυνατές μετακινήσεις):

(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει τη ροπή κάμψης M_2, δηλαδή εισάγουμε στο σημείο 2 μία καμπτική άρθρωση.

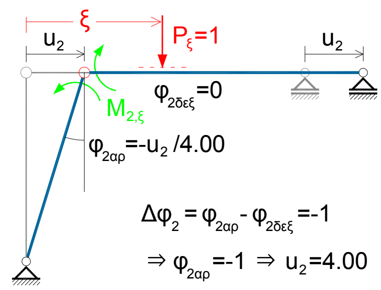
[Προς διατήρηση της ισορροπίας προσάγουμε στην εισαχθείσα άρθρωση τα δύο σκέλη της ζητούμενης ροπής $M_{2,\xi}=M_{2,Pz(\xi)=1}$ με τη συμβατικά θετική τους φορά]



(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε στο σημείο 2 να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό γόνατο $\Delta\varphi_2$=-1

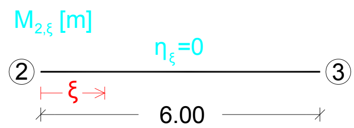
και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέχεται το φορτιζόμενο πέλμα, δηλαδή το *ζύγωμα* 2-3.



Το ζύγωμα μετατοπίζεται παράλληλα: $w_{\xi,2}$=0.

(3) Η κατά την έννοια του κινητού φορτίου P_ξ ελαστική γραμμή $w(\xi),_{\Delta\varphi2=-1}=w_{\xi,2}=w_\xi$ του φορτιζόμενου πέλματος 2-3, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ. Στην περίπτωσή μας έχουμε w_ξ=0 και, συνεπώς, η ΓΕ είναι μηδενική: $M_{2,Pz(\xi)=1}$=0.



Μηδενική ΓΕ $M_{2,Pz(\xi)=1}$ σημαίνει ότι κατακόρυφα φορτία P_Z επί του ζυγώματος 2-3 δεν προκαλούν ροπή κάμψης στο σημείο 2.

β) ΓΕ της ροπής M_2 λόγω οριζόντιου μοναδιαίου φορτίου $P_X(\xi)$ στον στύλο 1-2

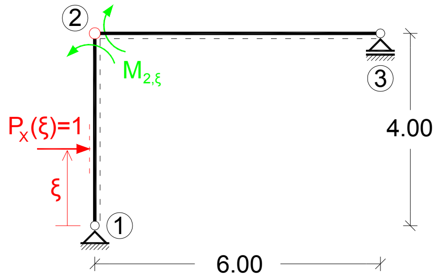
Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$M_{2,P_X(\xi)=1} = u(\xi),_{\Delta\varphi_2=-1}$$

δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή του στύλου 1-2, λόγω του αρνητικού μοναδιαίου καταναγκασμού $\Delta\varphi_2$=-1 στο σημείο 2. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (Τα βήματα 1 και 2 είναι ακριβώς ίδια όπως προηγουμένως για τη ΓΕ $M_{2,Pz(\xi)=1}$):

(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει τη ροπή κάμψης M_2, δηλαδή εισάγουμε στο σημείο 2 μία καμπτική άρθρωση.

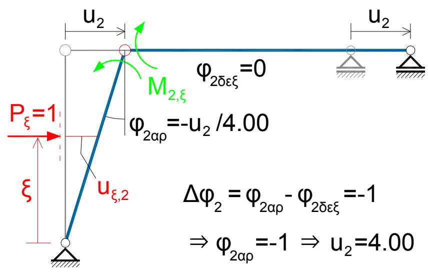
[Προς διατήρηση της ισορροπίας προσάγουμε στην εισαχθείσα άρθρωση τα δύο σκέλη της ζητούμενης ροπής $M_{2,\xi}$=$M_{2,Px(\xi)=1}$ με τη συμβατικά θετική τους φορά]



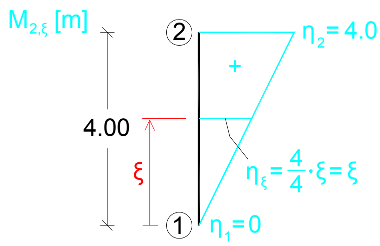
(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε στο σημείο 2 να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό γόνατο $\Delta\varphi_2$=-1

και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα, δηλαδή ο *στύλος* 1-2.



(3) Η κατά την έννοια του κινητού φορτίου P_ξ ελαστική γραμμή $u(\xi)_{,\Delta\varphi 2=-1}$=$u_{\xi,2}$=$u_\xi$ του φορτιζόμενου πέλματος 1-2 ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $M_{2,Pz(\xi)=1}$=u_ξ.



Άσκηση Λ2

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1.

α) ΓΕ της ροπής M_2 λόγω μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$

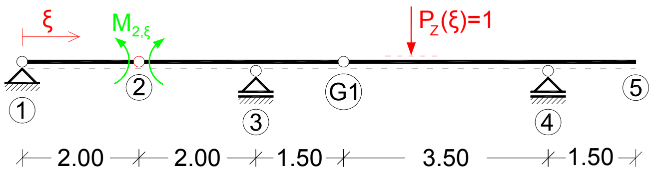
Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$M_{2,P_Z(\xi)=1} = w(\xi),_{\Delta\varphi_2=-1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή της αρθρωτής δοκού 1-5 λόγω του αρνητικού μοναδιαίου καταναγκασμού $\Delta\varphi_2$=-1 στο σημείο 2. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης v στις δυνατές μετακινήσεις):

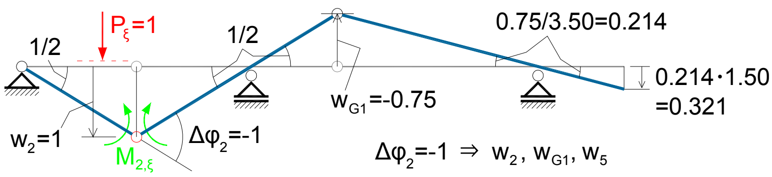
(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει τη ροπή κάμψης M_2, δηλαδή εισάγουμε στο σημείο 2 μία καμπτική άρθρωση.

[Προς διατήρηση της ισορροπίας προσάγουμε στην εισαχθείσα άρθρωση τα δύο σκέλη της ζητούμενης ροπής $M_{2,\xi}$=$M_{2,Pz(\xi)=1}$ με τη συμβατικά θετική τους φορά]

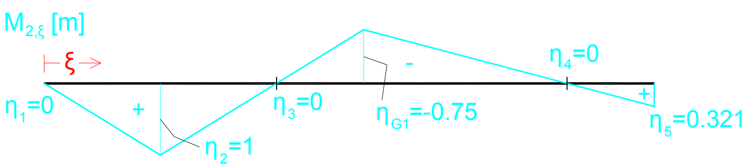


(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε στο σημείο 2 να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό γόνατο $\Delta\varphi_2$ = -1 και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 1-5.



(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 1-5 κατά τη διεύθυνση του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $w(\xi),_{\Delta\varphi 2=-1}$ = $w_{\xi,2}$ = w_ξ, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $M_{2,Pz(\xi)=1}$=w_ξ.



β) ΓΕ της ροπής M_3 λόγω μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$

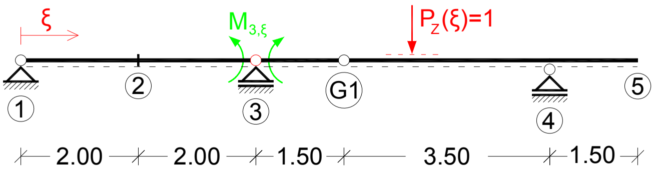
Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$M_{3,P_Z(\xi)=1} = w(\xi),_{\Delta\varphi_3=-1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή της αρθρωτής δοκού 1-5 λόγω του αρνητικού μοναδιαίου καταναγκασμού $\Delta\varphi_3$=-1 στο σημείο 3. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης v στις δυνατές μετακινήσεις):

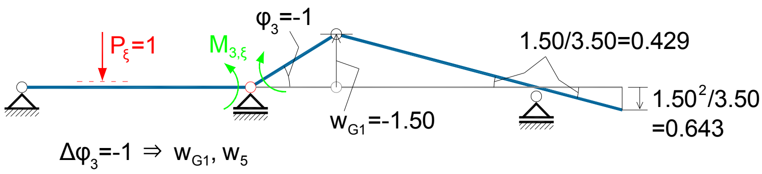
(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει τη ροπή κάμψης M_3, δηλαδή εισάγουμε στο σημείο 3 μία καμπτική άρθρωση.

[Προς διατήρηση της ισορροπίας προσάγουμε στην εισαχθείσα άρθρωση τα δύο σκέλη της ζητούμενης ροπής $M_{3,\xi}=M_{3,Pz(\xi)=1}$ με τη συμβατικά θετική τους φορά]

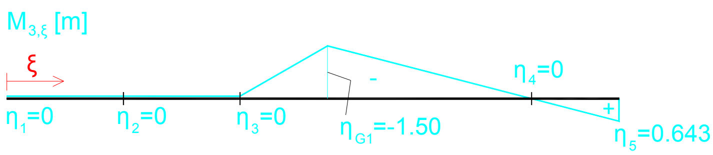


(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση έτσι ώστε στο σημείο 3 να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό γόνατο $\Delta\varphi_3=-1$ και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 1-5.



(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 1-5 κατά τη διεύθυνση του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $w(\xi),_{\Delta\varphi 3=-1}=w_{\xi,3}=w_\xi$, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $M_{3,Pz(\xi)=1}=w_\xi$.



γ) ΓΕ της τέμνουσας $Q_{3''}$ λόγω μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$

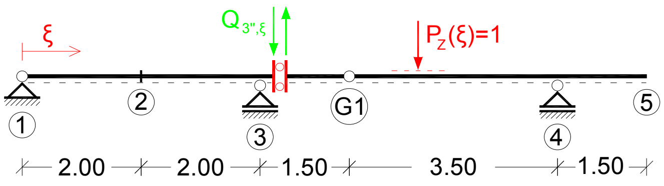
Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$Q_{3'',P_Z(\xi)=1} = w(\xi),_{\Delta w_{3''}=-1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή της αρθρωτής δοκού 1-5, λόγω του αρνητικού μοναδιαίου άλματος $\Delta w_{3''}=-1$ που επιβάλλεται στο αριστερό άκρο του τμήματος 3-G1, δηλαδή στο σημείο $3_{\delta\varepsilon\xi}$ ή 3" , σε απειροστή απόσταση δεξιά από τη στήριξη 3. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης v στις δυνατές μετακινήσεις):

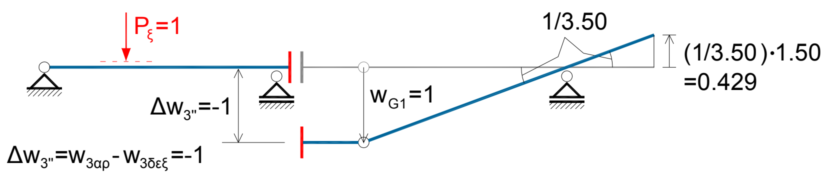
(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει την τέμνουσα $Q_{3''}$, δηλαδή εισάγουμε στο σημείο 3" μία διατμητική άρθρωση.

[Προς διατήρηση της ισορροπίας προσάγουμε στην εισαχθείσα άρθρωση τα δύο σκέλη της ζητούμενης τέμνουσας $Q_{3,\xi}=Q_{3,Pz(\xi)=1}$ με τη συμβατικά θετική τους φορά]

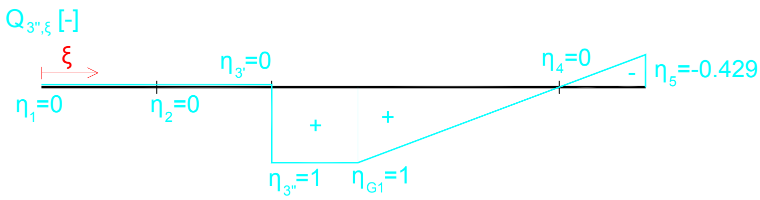


(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση έτσι ώστε στο σημείο 3" να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό άλμα $\Delta w_{3"} = -1$ και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 1-5.



(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 1-5 κατά τη διεύθυνση του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $w(\xi),_{\Delta w3"=-1} = w_{\xi,3"} = w_\xi$, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $Q_{3",Pz(\xi)=1} = w_\xi$.



δ) ΓΕ της αντίδρασης A_{Z3} της στήριξης 3 λόγω μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$

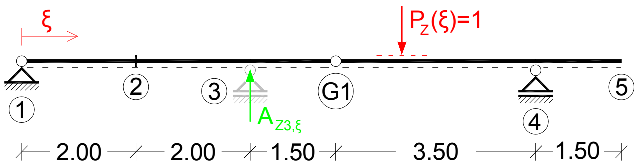
Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$A_{Z3,P_Z(\xi)=1} = w(\xi),_{w_3=1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή της αρθρωτής δοκού 1-5, λόγω της μοναδιαίας βύθισης $w_3=1$ που επιβάλλεται στη στήριξη 3. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης v στις δυνατές μετακινήσεις):

(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που αντιστοιχεί στην αντίδραση στήριξης A_{Z3}.

[Προς διατήρηση της ισορροπίας προσάγουμε στη θέση της καταλυθείσας δεσμικής ράβδου στήριξης τη ζητούμενη αντίδραση $A_{Z3,\xi} = A_{Z3,Pz(\xi)=1}$ με τη συμβατικά θετική της φορά, δηλαδή αντίθετα προς τον άξονα αναφοράς Z]

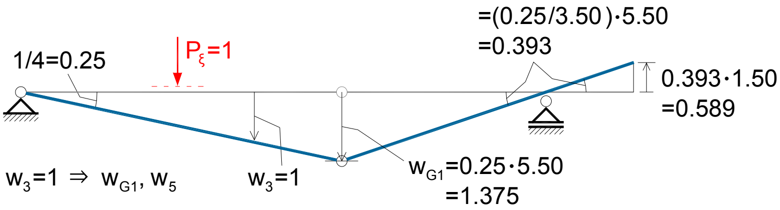


(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε στο σημείο 3 να εμφανιστεί μοναδιαία θετική βύθιση $w_3=1$

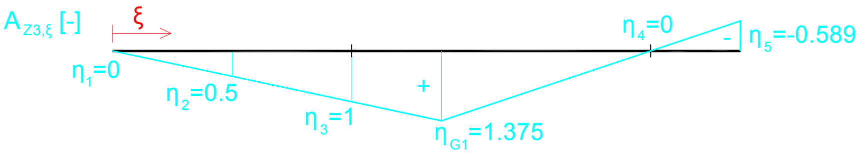
(*Υπενθύμιση*: Βύθιση και αντίδραση στήριξης ορίζονται με αντίθετο τρόπο ως συμβατικά θετικές)

και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 1-5.



(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 1-5 κατά τη διεύθυνση του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $w(\xi)_{,w3=1}$=$w_{\xi,3}$=w_ξ, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $A_{Z3,Pz(\xi)=1}$=w_ξ.



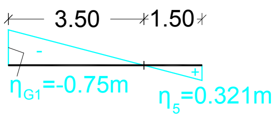
ε) Υπολογισμός των M_2, M_3, $Q_{3''}$ και A_{Z3} λόγω των φορτίων της Άσκησης Η4/1 με αποτίμηση των παραπάνω ΓΕ

Τα ζητούμενα εντασιακά μεγέθη δεν επηρεάζονται από τα αξονικά φορτία P_{X3} και P_{X5} (βλ. Άσκηση Η4/1). Οι τιμές τους, λόγω του συγκεντρωμένου εγκάρσιου φορτίου P_{Z2}=20kN και του ομοιόμορφα κατανεμημένου στο τμήμα G1-5 εγκάρσιου φορτίου q=5kN/m, προκύπτουν ως άθροισμα δύο γινομένων εφαρμόζοντας τους ακόλουθους τύπους (βλ. π.χ. [2], παράγρ. 10.7):

$$E_a = E_{a,P_{Z2}} + E_{a,q} = P_{Z2} \cdot \eta_2 + q \cdot \int_{(G1)}^{(5)} \eta(\xi) d\xi$$

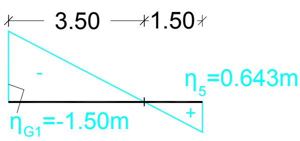
όπου η_2 η τεταγμένη της εκάστοτε ΓΕ στο σημείο 2 και η (ξ) η συνάρτηση που περιγράφει την εκάστοτε ΓΕ στο τμήμα G1-5 της αρθρωτής δοκού. Παίρνουμε έτσι:

$$M_2 = 20kN \cdot 1m + 5kN/m \cdot \int$$



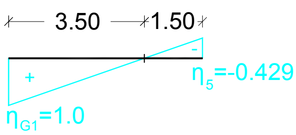
$$= 20 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-0.75 \cdot 3.50 + 0.321 \cdot 1.50) = 14.64kNm$$

$$M_3 = 20kN \cdot 0m + 5kN/m \cdot \int$$



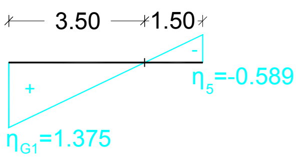
$$= 0 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1.50 \cdot 3.50 + 0.643 \cdot 1.50) = -10.71kNm$$

$$Q_{3''} = 20kN \cdot 0m + 5kN/m \cdot \int$$



$$= 0 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot [1 \cdot 3.50 + (-0.429) \cdot 1.50] = 7.14kN$$

$$A_{Z3} = 20kN \cdot 0.5m + 5kN/m \cdot \int$$



$$= 10 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot [1.375 \cdot 3.50 + (-0.581) \cdot 1.50] = 19.85kN$$

Οι τιμές αυτές πρακτικά συμπίπτουν με τις αντίστοιχες τιμές που υπολογίστηκαν στην Άσκηση Η4/1 (*Σημ.*: Οι παρατηρούμενες αποκλίσεις είναι αμελητέες και οφείλονται σε στρογγυλοποιήσεις κατά τις ενδιάμεσες αριθμητικές πράξεις).

Άσκηση Λ3

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1.

α) ΓΕ της αντίδρασης A_{Z5} της στήριξης 5 λόγω οριζόντιου μοναδιαίου φορτίου $P_X(\xi)$

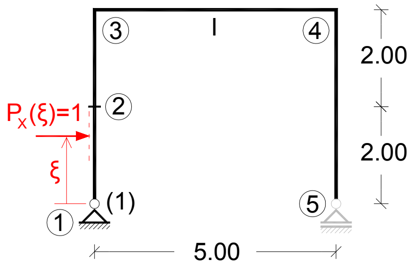
Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$A_{Z5,P_X(\xi)=1} = u(\xi),_{w_5=1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή του φορτιζόμενου πέλματος, δηλαδή του στύλου 1-2-3, λόγω της μοναδιαίας βύθισης w_5=1 που επιβάλλεται στη στήριξη 5. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης v στις δυνατές μετακινήσεις):

(1) Καταλύουμε την κατακόρυφη δεσμική ράβδο στο σημείο 5 που αντιστοιχεί στην αντίδραση στήριξης A_{Z5}.

(*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται στο σχήμα η αντίδραση $A_{Z5,\xi}=A_{Z5,Px(\xi)=1}$ στη θέση της καταλυθείσας δεσμικής ράβδου)

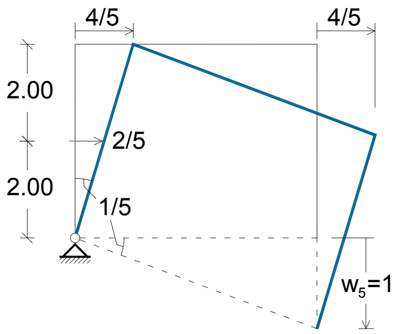


(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε στο σημείο 5 να εμφανιστεί μοναδιαία θετική βύθιση w_5=1.

(*Υπενθύμιση*: Βύθιση και αντίδραση στήριξης ορίζονται με αντίθετο τρόπο ως συμβατικά θετικές)

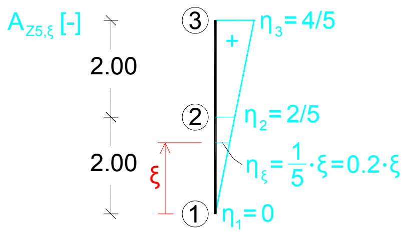
και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 1-2-3.



(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 1-2-3 κατά τη διεύθυνση του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $u(\xi),_{w5=1}=u_{\xi,5}=u_\xi$, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $A_{Z5,Px(\xi)=1}=u_\xi$.

(*Προσοχή*: Το u συμβολίζει εδώ τη μετατόπιση κατά την έννοια του *καθολικού* άξονα X)



β) ΓΕ της ροπής M_2 λόγω οριζόντιου μοναδιαίου φορτίου $P_X(\xi)$

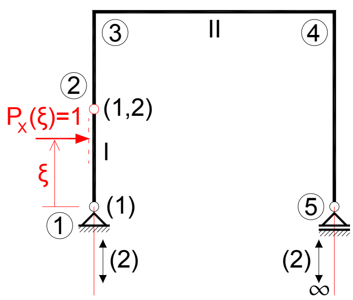
Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$M_{2,P_X(\xi)=1} = u(\xi),_{\Delta\varphi_2=-1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή του φορτιζόμενου πέλματος, δηλαδή του στύλου 1-2-3, λόγω του αρνητικού μοναδιαίου καταναγκασμού $\Delta\varphi_2$=-1 στο σημείο 2. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης v στις δυνατές μετακινήσεις):

(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει τη ροπή κάμψης M_2, δηλαδή εισάγουμε στο σημείο 2 μία καμπτική άρθρωση.

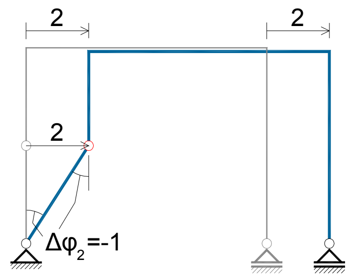
(*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται στο σχήμα η ροπή $M_{2,\xi} = M_{2,Px(\xi)=1}$ στη θέση της καταλυθείσας δεσμικής ράβδου)



(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε στο σημείο 2 να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό γόνατο $\Delta\varphi_2$=-1

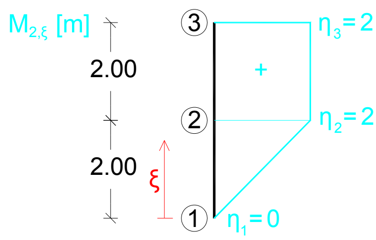
και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 1-2-3.



(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 1-2-3 κατά τη διεύθυνση του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $u(\xi),_{\Delta\varphi2=-1}=u_{\xi,2}=u_\xi$, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $M_{2,Px(\xi)=1}=u_\xi$.

(*Προσοχή*: Το u συμβολίζει εδώ τη μετατόπιση κατά την έννοια του *καθολικού* άξονα X)



γ) ΓΕ της τέμνουσας Q_2 λόγω οριζόντιου μοναδιαίου φορτίου $P_X(\xi)$

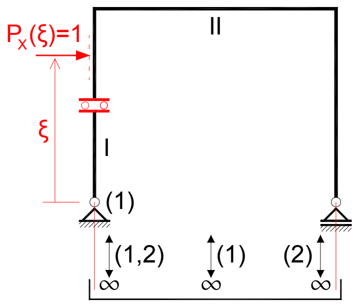
Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$Q_{2,P_X(\xi)=1} = u(\xi),_{\Delta w_2=-1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή του φορτιζόμενου πέλματος, δηλαδή του στύλου 1-2-3, λόγω του αρνητικού μοναδιαίου άλματος Δw_2=-1, κατά την έννοια του τοπικού άξονα αναφοράς z του στύλου, που επιβάλλεται στο σημείο 2. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης ν στις δυνατές μετακινήσεις):

(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει την τέμνουσα Q_2, δηλαδή εισάγουμε στο σημείο 2 μία διατμητική άρθρωση.

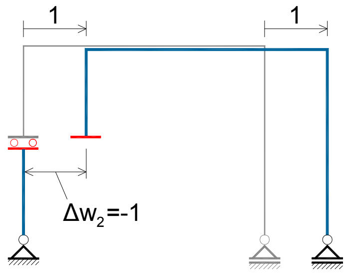
(*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται στο σχήμα η τέμνουσα $Q_{2,\xi}=Q_{2,Px(\xi)=1}$ στη θέση της καταλυθείσας δεσμικής ράβδου)



(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε στο σημείο 2 να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό άλμα Δw_2=-1 (Δw κατά την έννοια του τοπικού άξονα z του στύλου)

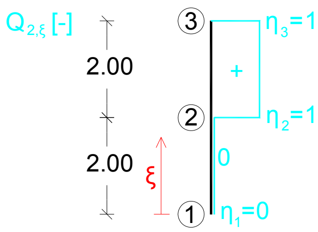
και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 1-2-3.



(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 1-2-3 κατά τη διεύθυνση του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $u(\xi),_{\Delta w2=-1}=u_{\xi,2}=u_\xi$, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $Q_{2,Px(\xi)=1}=u_\xi$.

(*Προσοχή*: Το u συμβολίζει εδώ τη μετατόπιση κατά την έννοια του *καθολικού* άξονα X)



δ) ΓΕ της αξονικής δύναμης N_2 λόγω οριζόντιου μοναδιαίου φορτίου $P_X(\xi)$

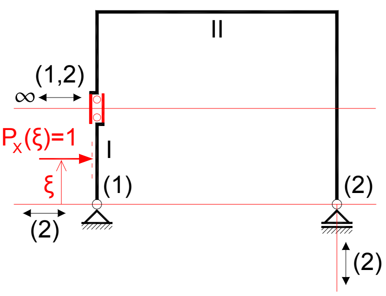
Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$N_{2,P_X(\xi)=1} = u(\xi),_{\Delta u_2=-1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή του φορτιζόμενου πέλματος, δηλαδή του στύλου 1-2-3, λόγω του αρνητικού μοναδιαίου χάσματος Δu_2=-1, κατά την έννοια του τοπικού άξονα αναφοράς x του στύλου, που επιβάλλεται στο σημείο 2. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης v στις δυνατές μετακινήσεις):

(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει την αξονική δύναμη N_2, δηλαδή εισάγουμε στο σημείο 2 μία αξονική άρθρωση.

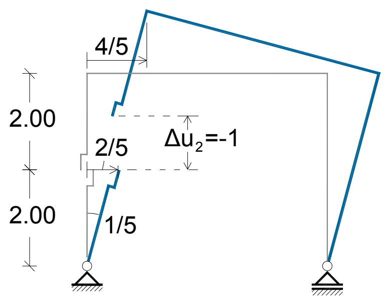
(*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπονται στο σχήμα τόσο το κινητό φορτίο $P_X(\xi)$=1 όσο και η αξονική δύναμη $N_{2,\xi}=N_{2,Px(\xi)=1}$ στη θέση της καταλυθείσας δεσμικής ράβδου)



(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε στο σημείο 2 να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό χάσμα Δu_2=-1 (Δu κατά την έννοια του τοπικού άξονα x του στύλου)

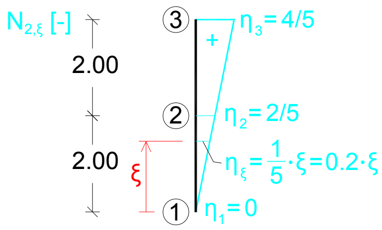
και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 1-2-3.



(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 1-2-3 κατά τη διεύθυνση του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $u(\xi),_{\Delta u2=-1}=u_{\xi,2}=u_\xi$, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $N_{2,Px(\xi)=1}=u_\xi$.

(*Προσοχή*: Το u συμβολίζει εδώ τη μετατόπιση κατά την έννοια του *καθολικού* άξονα X)

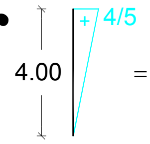


ε) Υπολογισμός των A_{Z5}, M_2, Q_2 και N_2 λόγω του φορτίου q_X=10kN/m της Ασκησης Ζ2 με αποτίμηση των παραπάνω ΓΕ

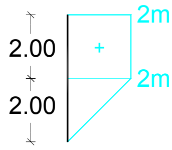
Τα ζητούμενα εντασιακά μεγέθη προκύπτουν με εφαρμογή του τύπου (βλ. π.χ. [2], παράγρ. 10.7):

$$E_a = q_X \cdot \int_{(1)}^{(3)} \eta(\xi) d\xi$$

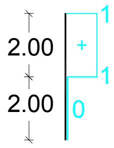
όπου η(ξ) η συνάρτηση που περιγράφει την εκάστοτε ΓΕ στο τμήμα 1-2-3 του φορέα. Παίρνουμε έτσι:

$$A_{Z5} = 10\text{kN/m} \cdot \int$$


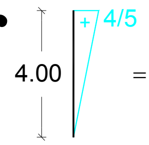
$$= 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 4.00 \right) = 16\text{kN}$$

$$M_2 = 10\text{kN/m} \cdot \int$$


$$= 10 \cdot \left(2 \cdot 2.00 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2.00 \right) = 60\text{kNm}$$

$$Q_2 = 10\text{kN/m} \cdot \int$$


$$= 10 \cdot (1 \cdot 2.00) = 20\text{kN}$$

$$N_2 = 10\text{kN/m} \cdot \int$$


$$= 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 4.00 \right) = 16\text{kN}$$

Άσκηση Λ4

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1.

α) ΓΕ της ροπής M_4 λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$

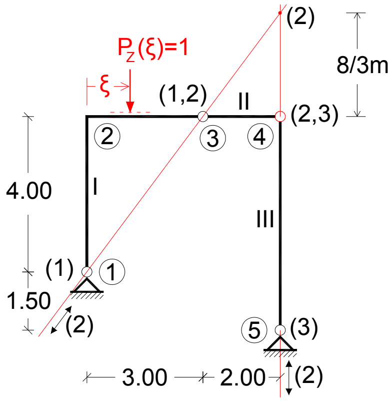
Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$M_{4,P_Z(\xi)=1} = w(\xi)_{,\Delta\varphi_4=-1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή του φορτιζόμενου πέλματος, δηλαδή του ζυγώματος 2-3-4, λόγω του αρνητικού μοναδιαίου καταναγκασμού $\Delta\varphi_4$=-1 στο σημείο 4. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης v στις δυνατές μετακινήσεις):

(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει τη ροπή κάμψης M_4, (βλ. Άσκηση Ζ11, Υπολογισμός της M_4), δηλαδή εισάγουμε στο σημείο 4 μία καμπτική άρθρωση.

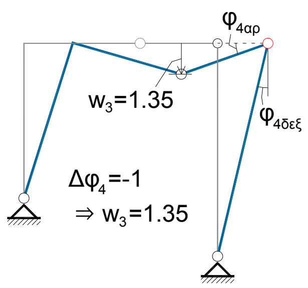
(*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται στο σχήμα η ροπή $M_{4,\xi}=M_{4,Pz(\xi)=1}$ στη θέση της καταλυθείσας δεσμικής ράβδου.)



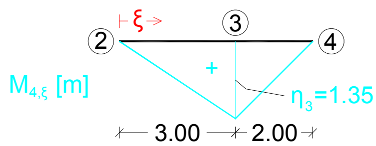
(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση έτσι ώστε στο σημείο 4 να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό γόνατο $\Delta\varphi_4$=-1

και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 2-3-4. Με τα γεωμετρικά στοιχεία που βρέθηκαν στην Άσκηση Ζ11 προκύπτει για $\Delta\varphi_4$=-1 η βύθιση w_3=1.35m.



(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 2-3-4 κατά τη διεύθυνση του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $w(\xi)_{,\Delta\varphi4=-1} = w_{\xi,4} = w_\xi$, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $M_{4,Pz(\xi)=1} = w_\xi$.

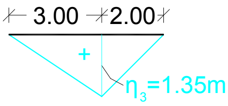


β) Υπολογισμός της M_4 λόγω του φορτίου q_Z=30kN/m της Άσκησης Ζ3 με αποτίμηση της παραπάνω ΓΕ

Το ζητούμενο εντασιακό μέγεθος προκύπτει με εφαρμογή του τύπου (βλ. π.χ. [2], παράγρ. 10.7):

$$E_a = q_Z \cdot \int_{(2)}^{(4)} \eta(\xi)d\xi$$

όπου η(ξ) η συνάρτηση που περιγράφει την εκάστοτε ΓΕ στο τμήμα 2-3-4 του φορέα. Παίρνουμε έτσι:

$M_4 = 30\text{kN/m} \cdot \int$ 

$= 30 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1.35 \cdot 5.00 \right) = 101.25\text{kNm}$

Η τιμή αυτή πρακτικά συμπίπτει με την τιμή που υπολογίστηκε στις Ασκήσεις Ζ3 και Ζ11 (*Σημ.*: Η παρατηρούμενη απόκλιση [(101,25-100.98)/101.25]=0.27% είναι αμελητέα και οφείλεται σε στρογγυλο-ποιήσεις κατά τις ενδιάμεσες αριθμητικές πράξεις).

Άσκηση Λ5

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1.

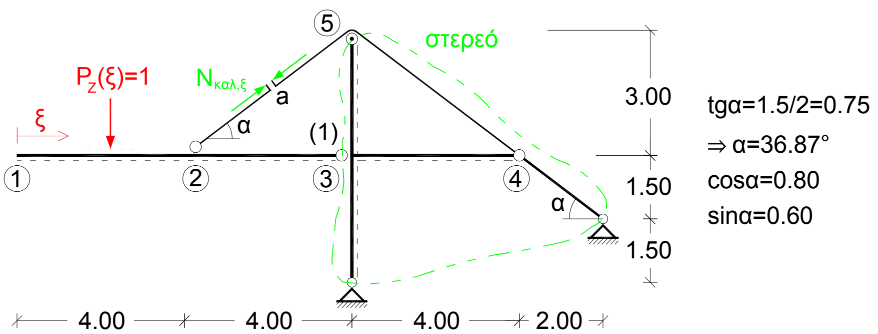
α) ΓΕ της αξονικής δύναμης $N_{καλ}$ του καλωδίου λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$ επί του καταστρώματος 1-2-3-4

Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$N_{a,P_Z(\xi)=1} = w(\xi),_{\Delta u_a=-1}$$

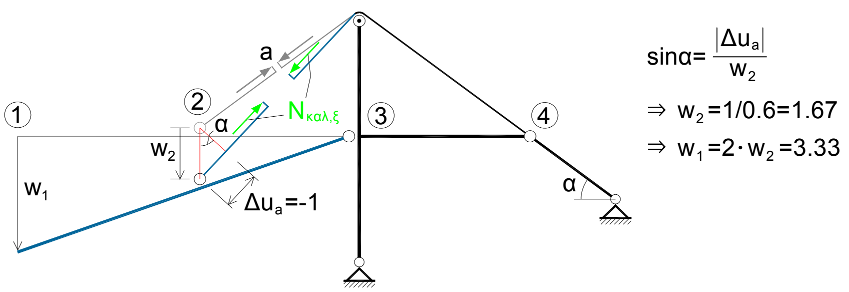
Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ της $N_{καλ}=N_a$ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή του φορτιζόμενου πέλματος 1-2-3-4 λόγω του αρνητικού μοναδιαίου χάσματος $\Delta u_a=-1$ που επιβάλλεται σε τυχαίο σημείο a του καλωδίου 2-5-4 κατά την έννοια του τοπικού άξονα αναφοράς x. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης v στις δυνατές μετακινήσεις):

(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει την αξονική δύναμη $N_{καλ}$, δηλαδή εισάγουμε σε τυχόν σημείο a του καλωδίου μία αξονική άρθρωση. Πρακτικά: καταλύουμε τη συνέχεια του καλωδίου.

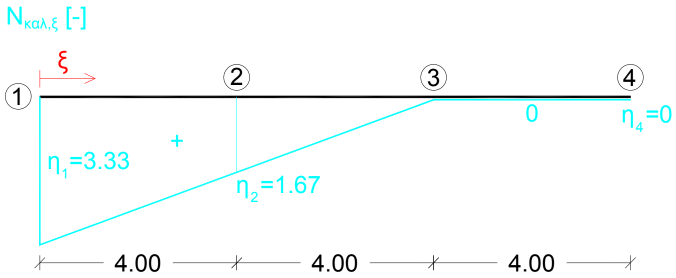


(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε στο σημείο a να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό χάσμα $\Delta u_a=-1$ (Δu κατά την έννοια του τοπικού άξονα x του καλωδίου) και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 1-2-3-4.



(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 1-2-3-4 κατά τη διεύθυνση του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $w(\xi),_{\Delta ua=-1}=w_{\xi,a}=w_\xi$, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $N_{καλ,Pz(\xi)=1}=w_\xi$.



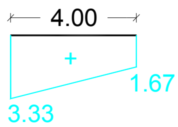
β) Υπολογισμός της $N_{καλ}$ λόγω του ομοιόμορφου φορτίου q_Z=20kN/m της Άσκησης Η9/5 με αποτίμηση της παραπάνω ΓΕ

Το ζητούμενο εντασιακό μεγέθος προκύπτει με εφαρμογή του τύπου (βλ. π.χ. [2], παράγρ. 10.7):

$$N_{καλ} = q_Z \cdot \int_{(1)}^{(2)} \eta(\xi) d\xi$$

όπου η(ξ) η συνάρτηση που περιγράφει την ΓΕ στο τμήμα 1-2-3-4 του φορέα. Παίρνουμε έτσι:

$$N_{καλ} = 20kN/m \cdot \int$$



$$= 20 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (1.67 + 3.33) \cdot 4.00 \right] = 200kN$$

Βιντεοπαρουσίαση της άσκησης αυτής στο YouTube:

https://youtu.be/Gott0bqNtpo

Άσκηση Λ6

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1.

α) ΓΕ της αξονικής δύναμης N_{12} λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$ επί των στοιχείων 2-3 και 3-5

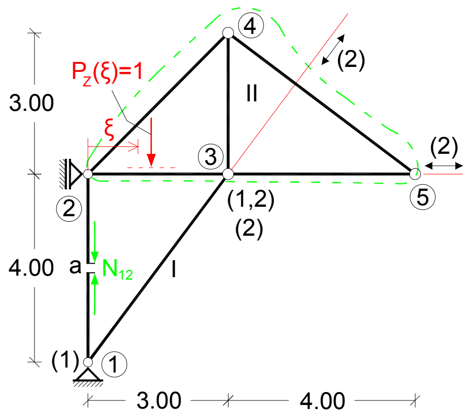
Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$N_{12,P_Z(\xi)=1} = w(\xi)_{,\Delta u_{12}=-1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή του φορτιζόμενου πέλματος 2-3-5, λόγω του αρνητικού μοναδιαίου χάσματος Δu_{12}=-1 που επιβάλλεται σε τυχαίο σημείο της ράβδου 1-2 κατά την έννοια του τοπικού της άξονα αναφοράς x. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης ν στις δυνατές μετακινήσεις):

βλ. Άσκηση Ζ13 (Υπολογισμός της N_{12})

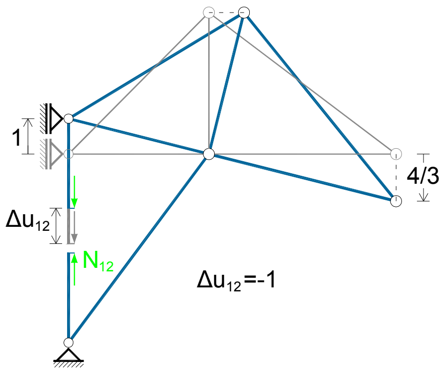
(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει την αξονική δύναμη N_{12}, δηλαδή εισάγουμε σε τυχόν σημείο a της ράβδου 1-2 μία αξονική άρθρωση (πρακτικά: καταλύουμε τη συνέχεια της ράβδου 1-2).



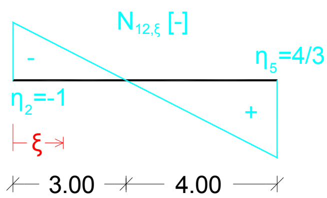
(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε μεταξύ των κόμβων 1 και 2 να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό χάσμα Δu_{12}=-1 (Δu κατά την έννοια του τοπικού άξονα x της ράβδου 1-2).

και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 2-3-5. Με τα γεωμετρικά στοιχεία που βρέθηκαν στην Άσκηση Ζ13 προκύπτει για Δu_{12}=-1 η βύθιση w_5=4/3.



(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 2-3-5 κατά τη διεύθυνση του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $w(\xi)_{,\Delta u12=-1}$= $w_{\xi,12}$=w_ξ, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $N_{12,Pz(\xi)=1}$ = w_ξ.



β) Υπολογισμός της N_{12} λόγω του συγκεντρωμένου φορτίου F_{Z5}=50kN της Άσκησης Ζ5 με αποτίμηση της παραπάνω ΓΕ

Το ζητούμενο εντασιακό μεγέθος προκύπτει με εφαρμογή του τύπου (βλ. π.χ. [2], παράγρ. 10.7):

$$N_{12} = F_{Z5} \cdot \eta_5$$

όπου η_5 η τεταγμένη της ΓΕ στο σημείο 5 του φορέα. Παίρνουμε έτσι:

$$N_{12} = 50\text{kN} \cdot \frac{4}{3} = 66.67\text{kN}$$

Η τιμή αυτή συμπίπτει με την τιμή που υπολογίστηκε στην Άσκηση Ζ13.

Άσκηση Λ7

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1.

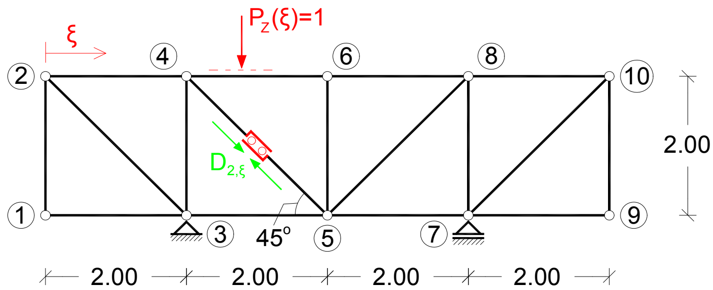
α) <u>ΓΕ της ράβδου D_2 λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$ επί του άνω πέλματος 2-4-6-8-10</u>

Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$N_{45,P_z(\xi)=1} = w(\xi)_{\Delta u_{45}=-1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ $D_{2,\xi}=N_{45,\xi}$ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή του φορτιζόμενου πέλματος 2-4-6-8-10, λόγω του αρνητικού μοναδιαίου χάσματος Δu_{45}=-1 που επιβάλλεται σε τυχαίο σημείο της ράβδου 4-5 κατά την έννοια του τοπικού της άξονα αναφοράς x. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης v στις δυνατές μετακινήσεις):

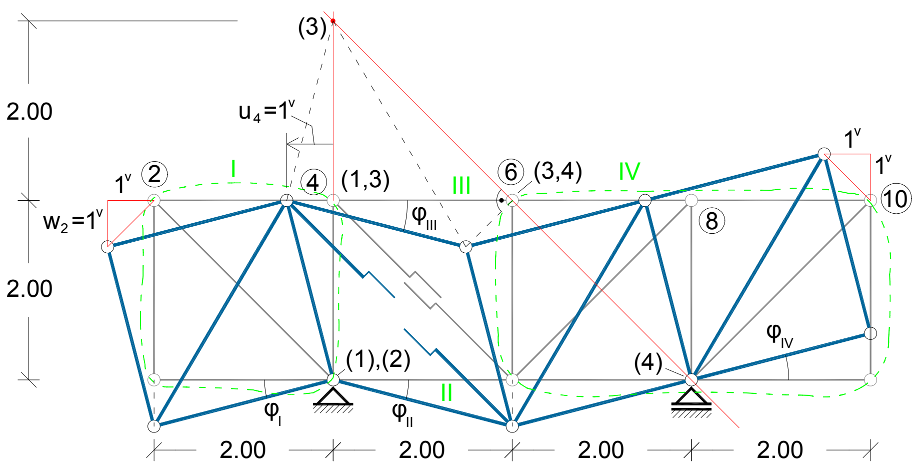
(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει την αξονική δύναμη D_2, δηλαδή εισάγουμε σε τυχόν σημείο a της ράβδου 4-5 μία αξονική άρθρωση. Πρακτικά: καταλύουμε τη συνέχεια της ράβδου 4-5. [Προς διατήρηση της ισορροπίας προσάγουμε στη θέση κατάλυσης της συνέχειας τα δύο σκέλη της ζητούμενης αξονικής δύναμης $D_{2,\xi}=D_{2,Pz(\xi)=1}$ με τη συμβατικά θετική τους φορά]



(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε μεταξύ των κόμβων 4 και 5 να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό χάσμα Δu_{45}=-1 , Δu κατά την έννοια του τοπικού άξονα x της ράβδου 4-5 και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 2-4-6-8-10 κάνοντας χρήση του διαγράμματος των πόλων στροφής κατά τα γνωστά από τη Σειρά Ασκήσεων Ε. Με τα γεωμετρικά στοιχεία που δίνονται στο ακόλουθο σχήμα προκύπτουν για Δu_4=-1 οι μετατοπίσεις:

$$w_1 = w_6 = 1/\sqrt{2},\; w_4 = w_8 = 0,\; \text{και}\; w_{10} = -1/\sqrt{2}.$$



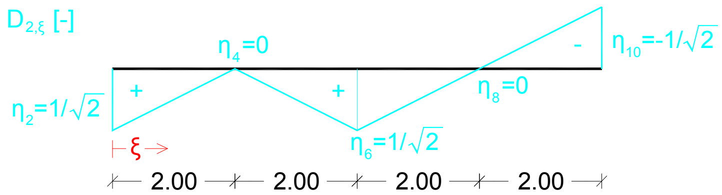
Επιβάλλοντας $u_4=1^v$ παίρνουμε: $w_2=1$, $w_4=0$, $w_6=1$, $w_8=0$, $w_{10}=-1$

$\varphi_I = 1/2.00 \Rightarrow \varphi_{III} = -\varphi_I$, $\varphi_{IV} = \varphi_I \Rightarrow \Delta u_{45} = -\sqrt{2}$

Συνεπώς, για να πάρουμε $\Delta u_{45}=-1$ πρέπει να επιβάλλουμε:

$u_4 = 1^v/\sqrt{2} \Rightarrow w_2 = 1^v/\sqrt{2} \Rightarrow w_6 = 1^v/\sqrt{2}$, $w_{10} = -1^v/\sqrt{2}$

(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 2-4-6-8-10 κατά τη διεύθυνση του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $w(\xi)_{,\Delta u45=-1} = w_{\xi,45} = w_\xi$, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $D_{2,Pz(\xi)=1} = w_\xi$.



β) <u>Υπολογισμός της D_2 λόγω των πέντε συγκεντρωμένων φορτίων της Άσκησης Η8/1 με αποτίμηση της παραπάνω ΓΕ</u>

Το ζητούμενο εντασιακό μεγέθος προκύπτει με εφαρμογή του τύπου (βλ. π.χ. [2], παράγρ. 10.7):

$$D_2 = \sum_i P_{Zi} \cdot \eta_{\xi i} = P_{Z2} \cdot \eta_2 + P_{Z4} \cdot \eta_4 + P_{Z6} \cdot \eta_6 + P_{Z8} \cdot \eta_8 + P_{Z10} \cdot \eta_{10}$$

όπου $\eta_{\xi i}$ η τεταγμένη της ΓΕ στο εκάστοτε σημείο i του φορέα. Παίρνουμε έτσι:

$$D_2 = 30 \cdot (\eta_2 + \eta_4 + \eta_6 + \eta_8 + \eta_{10}) = 30 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{30}{\sqrt{2}} = 21.21\text{kN}$$

Η τιμή αυτή συμπίπτει με την τιμή που υπολογίστηκε στην Άσκηση Η8/1.

Άσκηση Λ8

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1.

α) ΓΕ της ροπής M_{y1} λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$ επί της δοκού 5-4-3

Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$M_{y1,P_Z(\xi)=1} = w(\xi),_{\Delta\varphi_{y1}=-1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) του φορτιζόμενου πέλματος, δηλαδή της δοκού 5-4-3, κατά την έννοια το καθολικού άξονα Z λόγω του αρνητικού μοναδιαίου καταναγκασμού $\Delta\varphi_{y1}$=-1 στο σημείο 1. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης v στις δυνατές μετακινήσεις):

(1) Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που μεταβιβάζει τη ροπή κάμψης M_{y1}, δηλαδή εισάγουμε στο σημείο 1 μία καμπτική άρθρωση, κυλινδρική άρθρωση με άξονα παράλληλο προς τον τοπικό άξονα y, ο οποίος συμπίπτει εδώ με τον καθολικό άξονα Y.

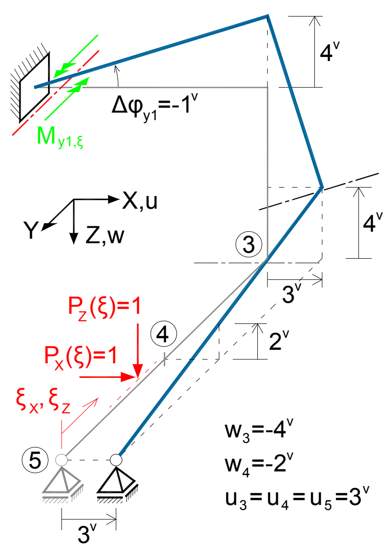
(2) (i) Υποβάλλουμε τον μονοκινηματικό φορέα σε μία δυνατή μετακίνηση, έτσι ώστε στο σημείο 1 να εμφανιστεί μοναδιαίο αρνητικό γόνατο $\Delta\varphi_{y1}$ = -1

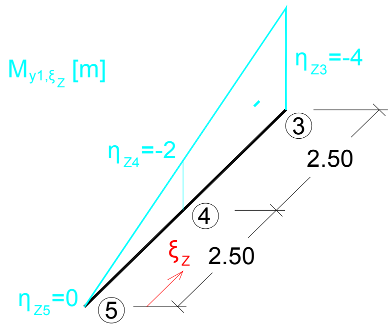
και

(ii) προσδιορίζουμε τη μετατοπισμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το φορτιζόμενο πέλμα 5-4-3 (βλ. Άσκηση Ζ14). Με τα γεωμετρικά στοιχεία του παραπλεύρως σχήματος προκύπτουν για $\Delta\varphi_{y1}$ = -1 οι βυθίσεις w_3 = -4m και w_4 = -2m.

(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 5-4-3 κατά τη διεύθυνση Z του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $w(\xi),_{\Delta\varphi y1=-1} = w_{\xi,1} = w_\xi$, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $M_{y1,Pz(\xi)=1} = w_\xi$.

βλ. Άσκηση Ζ14 (Υπολογισμός της M_{y1})





β) ΓΕ της ροπής M_{y1} λόγω οριζόντιου μοναδιαίου φορτίου $P_X(\xi)$ επί της δοκού 5-4-3

Σύμφωνα με την πρόταση Krohn-Land, ισχύει ο μετασχηματισμός:

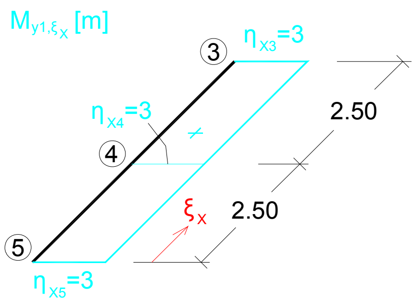
$$M_{y1,P_X(\xi)=1} = u(\xi),_{\Delta\varphi_{y1}=-1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή u(ξ) του φορτιζόμενου πέλματος, δηλαδή της δοκού 5-4-3, κατά την έννοια το καθολικού άξονα X, λόγω του αρνητικού μοναδιαίου καταναγκασμού $\Delta\varphi_{y1}$=-1 στο σημείο 1. Η ελαστική αυτή γραμμή υπολογίζεται ακολουθώντας τα τρία βήματα που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.1 (*Σημ.*: Χάριν απλούστευσης παραλείπεται ο άνω δείκτης ν στις δυνατές μετακινήσεις):

(1) Όπως για την ΓΕ M_{y1} λόγω $P_Z(\xi)$.

(2) Όπως για την ΓΕ M_{y1} λόγω $P_Z(\xi)$. Με τα γεωμετρικά στοιχεία του παραπάνω σχήματος προκύπτουν για $\Delta\varphi_{y1}$=-1 οι οριζόντιες κατά X μετατοπίσεις $u_3 = u_4 = u_5$=3m.

(3) Η μετατόπιση του φορτιζόμενου πέλματος 5-4-3 κατά τη διεύθυνση X του κινητού φορτίου, δηλαδή η ελαστική γραμμή $u(\xi)_{,\Delta\varphi y1=-1} = u_{\xi,1} = u_\xi$, ταυτίζεται με τη ζητούμενη ΓΕ: $M_{y1,Px(\xi)=1} = w_\xi$.



γ) Υπολογισμός της M_{y1} λόγω των συγκεντρωμένων φορτίων F_{X4}=40kN και F_{Z4}=80kN της Άσκησης Ζ6 με αποτίμηση των παραπάνω ΓΕ

Το ζητούμενο εντασιακό μέγεθος προκύπτει με εφαρμογή του τύπου (βλ. π.χ. [2], παράγρ. 10.7):

$$M_{y1} = F_{Z4} \cdot \eta_{Z4} + F_{X4} \cdot \eta_{X4}$$

όπου η_{Z4} και η_{X4} οι τεταγμένες των ΓΕ $M_{y1,Pz(\xi)=1}$ και $M_{y1,Px(\xi)=1}$, αντιστοίχως. Παίρνουμε έτσι:

$$M_{y1} = 80\text{kN} \cdot (-2\text{m}) + 40\text{kN} \cdot 3\text{m} = -40\text{kNm}$$

Η τιμή αυτή συμπίπτει με την τιμή που υπολογίστηκε στις Ασκήσεις Ζ6 και Ζ14.

4.2 Υπολογισμός γραμμών επιρροής παραμορφωσιακών μεγεθών (Ομάδα Μ)

Για τους παρακάτω ισοστατικούς φορείς να υπολογιστούν οι ζητούμενες γραμμές επιρροής εφαρμόζοντας την πρόταση Maxwell-Mohr.

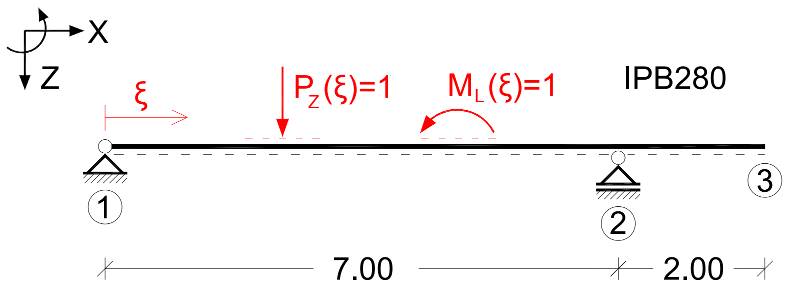
<table>
<tr>
<td>M1</td>
<td>
Για την παρακάτω μονοπροέχουσα δοκό ζητούνται οι ΓΕ

(α) $w_{3,P_Z(\xi)=1}$ και

(β) $\varphi_{3,P_Z(\xi)=1}$ για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)=1$ σε όλο το μήκος της δοκού, καθώς επίσης και οι ΓΕ

(γ) $w_{3,M_L(\xi)=1}$ και

(δ) $\varphi_{3,M_L(\xi)=1}$ για κίνηση της μοναδιαίας ροπής $M_L(\xi)=1$ επίσης σε όλο το μήκος της δοκού.

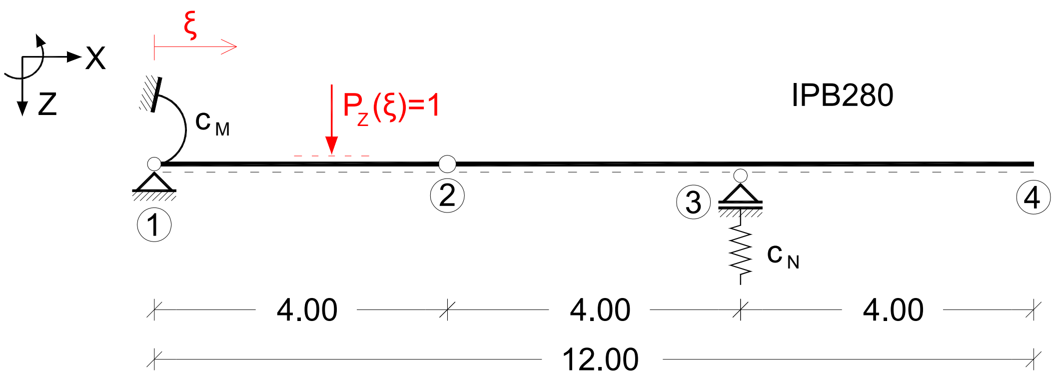


$EI=$ σταθ.
$GA_S \to \infty$
$EA \to \infty$
</td>
</tr>
<tr>
<td>M2</td>
<td>
Για την παρακάτω αρθρωτή δοκό ζητούνται οι ΓΕ

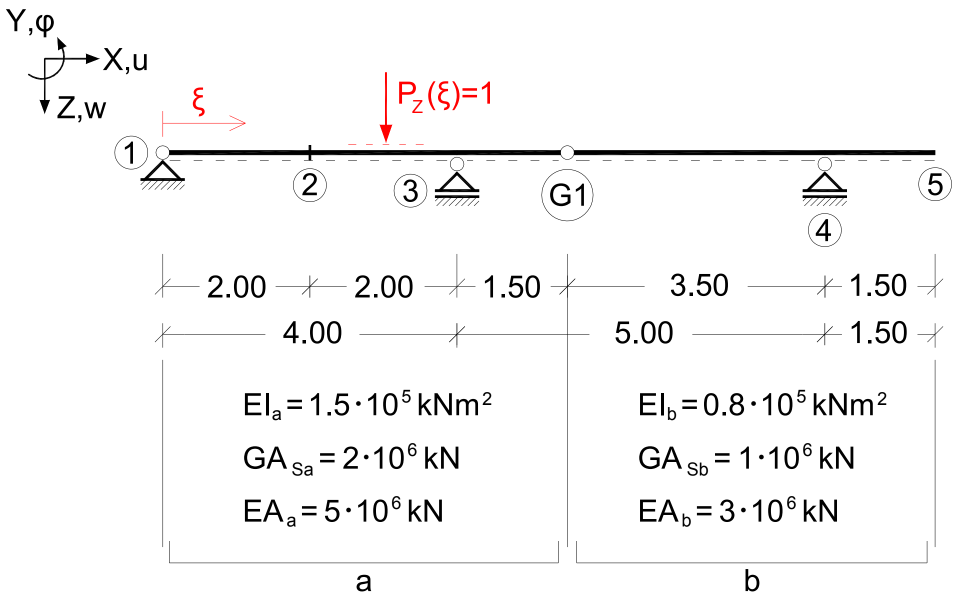
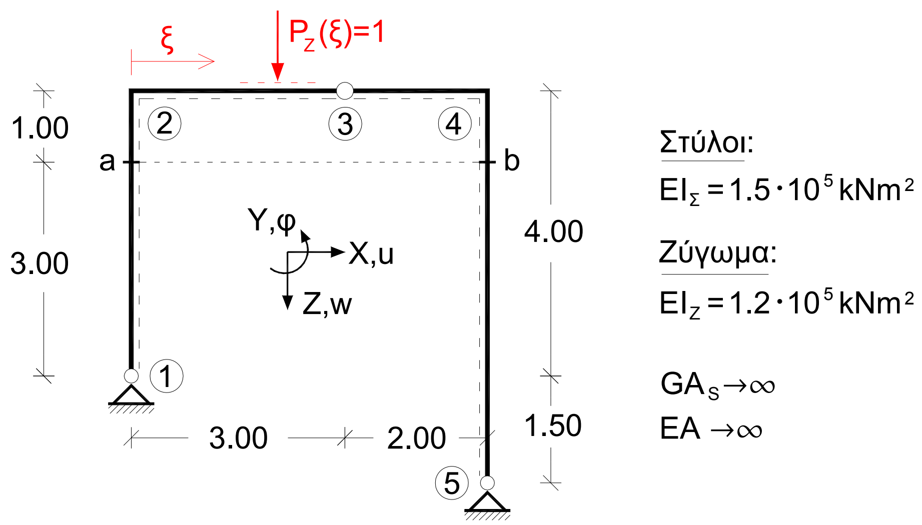
(α) $w_{4,P_Z(\xi)=1}$ και

(β) $\varphi_{4,P_Z(\xi)=1}$,

δηλαδή οι ΓΕ της βύθισης και της στροφής στο σημείο 4 για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)=1$ σε όλο το μήκος της δοκού.



$EI=$ σταθ. $c_N=10^4$ kN/m
$GA_S \to \infty$ $c_M=10^4$ kNm/rad
$EA \to \infty$
</td>
</tr>
</table>

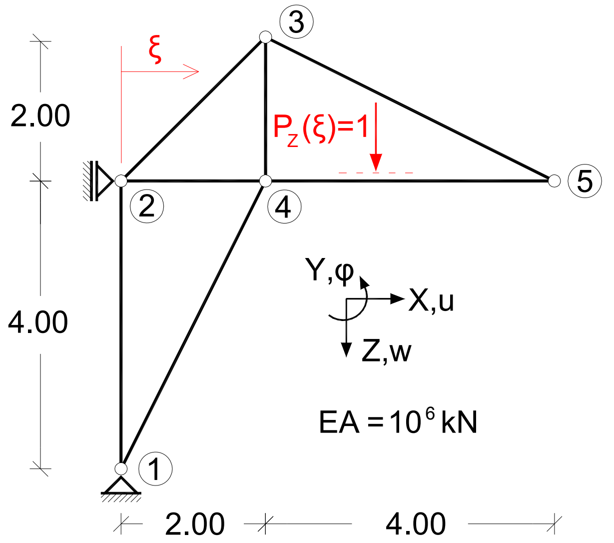
M3	Για την παρακάτω αρθρωτή δοκό ζητούνται οι ΓΕ (α) $w_{G1,P_Z(\xi)=1}$ της βύθισης και (β) $\Delta\varphi_{G1,P_Z(\xi)=1}$ του γόνατου (=διαφοράς στροφών) στην άρθρωση G1 για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)=1$ σε όλο το μήκος της δοκού. 
M4	Για το παρακάτω τριαρθρωτό πλαίσιο ζητείται η ΓΕ $\Delta u_{ab,P_Z(\xi)=1}$, της μεταβολής της οριζόντιας απόστασης των σημείων a και b για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)=1$ στο ζύγωμα 2-3-4. 

M5

Για τον παρακάτω ισοστατικό δικτυωτό φορέα ζητούνται οι ΓΕ

(α) $w_{5,P_Z(\xi)=1}$ της βύθισης στον κόμβο 5 και

(β) $\psi_{45,P_Z(\xi)=1}$ της στροφής χορδής της ράβδου 4-5 για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)=1$ μεταξύ των κόμβων 2-4-5.



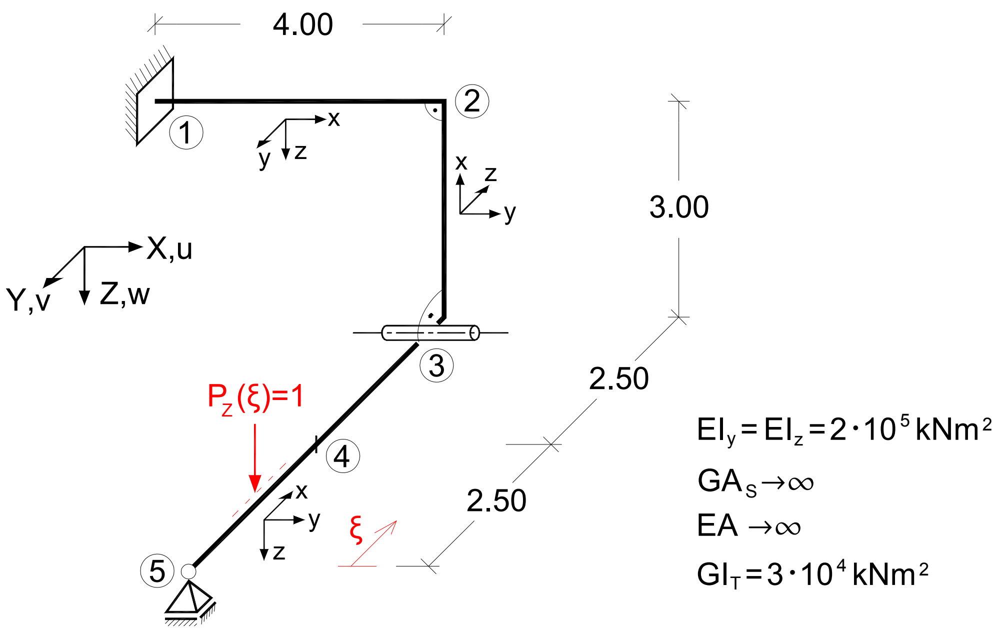
M6

Για τον παρακάτω ισοστατικό χωρικό φορέα ζητούνται οι ΓΕ

(α) $w_{2,P_Z(\xi)=1}$ της βύθισης του κόμβου 2,

(β) $\varphi_{X2,P_Z(\xi)=1}$ της στροφής περί τον καθολικό άξονα X του κόμβου 2 και

(γ) $\psi_{X23,P_Z(\xi)=1}$ της στροφής χορδής της ράβδου 2-3 ως προς τον καθολικό άξονα X για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)=1$ μεταξύ των κόμβων 5-4-3.



ΛΥΣΕΙΣ

Πριν την παρουσίαση των λύσεων, παρατίθενται χάριν διευκόλυνσης του σπουδαστή τα επί μέρους βήματα που περιλαμβάνει ο υπολογισμός γραμμών επιρροής (ΓΕ) παραμορφωσιακών μεγεθών με τη βοήθεια της πρότασης Maxwell-Mohr. Η περιγραφή των βημάτων συνοδεύεται από το παράδειγμα υπολογισμού της ΓΕ $\varphi_{a,\xi}=\varphi_{a,Pz(\xi)=1}$ της στροφής στο αριστερό άκρο a μιας αμφιέρειστης δοκού.

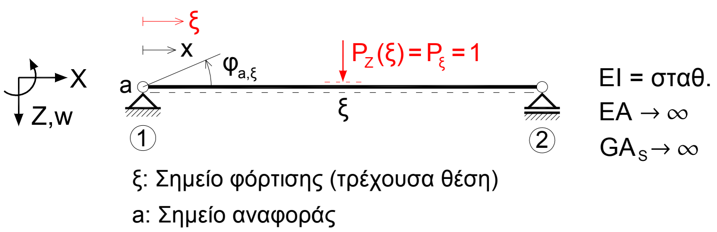
Βήματα υπολογισμού ΓΕ παραμορφωσιακών μεγεθών με την πρόταση Maxwell-Mohr:

Η πρόταση Maxwell-Mohr διατυπώνεται για τους σκοπούς μας ως εξής:

> Η ΓΕ $E_{a,P(\xi)=1}$ ενός παραμορφωσιακού μεγέθους E_a στη θέση a λόγω ενός κινητού φορτίου P(ξ)=1 συμπίπτει/ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή του φορτιζόμενου πέλματος, κατά τη διεύθυνση του φορτίου P, η οποία προκύπτει, εάν στη θέση αναφοράς a επιβληθεί το εργικά ανταποκρινόμενο προς το μέγεθος E_a μοναδιαίο φορτίο F_a=1.

Υπενθυμίζεται ότι η πρόταση Maxwell-Mohr προκύπτει από το θεώρημα του Betti που εκφράζει τις συμμετρικές ιδιότητες του *πραγματικού* έργου παραμόρφωσης ενός φορέα. Η πρόταση, όμως, αυτή μπορεί να αποδειχθεί και με τη βοήθεια της αρχής των δυνατών συμπληρωματικών έργων (ΑΣΔΕ), η οποία αναφέρεται όχι στο πραγματικό έργο παραμόρφωσης, αλλά στο συμπληρωματικό *δυνατό* έργο που παράγεται από δυνατά φορτία επί των πραγματικών μετακινήσεων ενός φορέα.

Έστω, λοιπόν, ότι ζητούμενη είναι η ΓΕ $\varphi_{a,\xi}=\varphi_{a,PZ(\xi)}$ της στροφής φ_a στον κόμβο 1 (σημείο a, θέση ξ=0) μιας αμφιέρειστης δοκού, λόγω ενός κατακόρυφου μοναδιαίου κινητού φορτίου $P_\xi=P_Z(\xi)=1$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

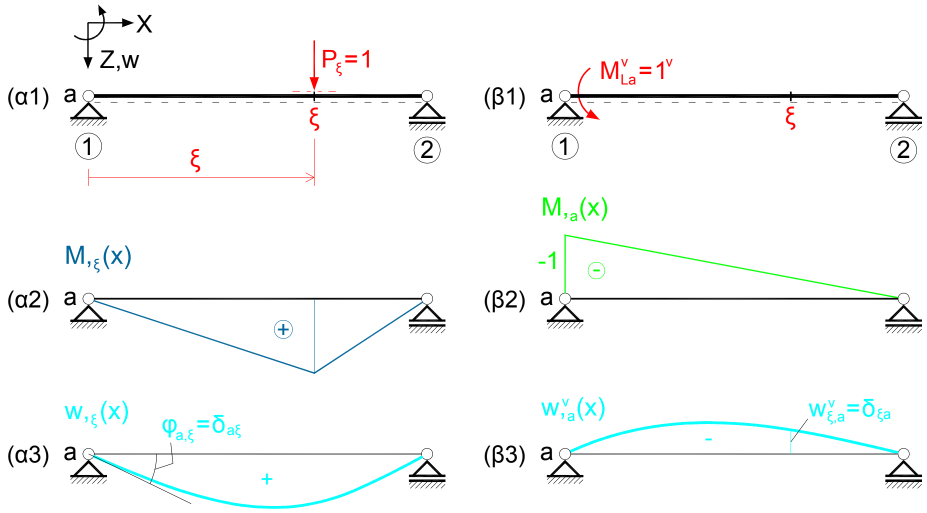


Παράδειγμα υπολογισμού ΓΕ της στροφής στον κόμβο 1

Για τον υπολογισμό της ζητούμενης ΓΕ με την πρόταση Maxwell-Mohr θεωρούμε δύο καταστάσεις:

(α) την πραγματική κατάσταση έντασης και παραμόρφωσης, που οφείλεται στο πραγματικό, μοναδιαίο κινητό φορτίο P_ξ=1 στην τρέχουσα θέση ξ, και

(β) τη νοητή, δυνατή κατάσταση έντασης και παραμόρφωσης, που οφείλεται στο εργικώς ανταποκρινόμενο προς το ζητούμενο μέγεθος $\varphi_{a,\xi}$ δυνατό φορτίο $M_{La}^{v}=1^{v}$.



Υπολογισμός της ΓΕ της στροφής στον κόμβο 1 με την πρόταση Maxwell-Mohr

Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζονται οι πραγματικές ροπές κάμψης $M(x)_{,\xi}$ και η πραγματική ελαστική γραμμή $w(x)_{,\xi}$ λόγω του κινητού φορτίου $P_\xi=1$ στην τυχούσα θέση ξ. Στο δεξιό τμήμα του σχήματος απεικονίζονται οι νοητές ροπές κάμψης $M^v_{,a}(x)$ και η νοητή ελαστική γραμμή $w^v_{,a}(x)$ λόγω του δυνατού φορτίου $M^v_{La}=1^v$ στη σταθερή θέση αναφοράς a (σχήματα (β1), (β2), (β3)). Οι πραγματικές και νοητές ροπές κάμψης της δοκού (σχήματα (α2) και (β2) αντίστοιχα) υπολογίστηκαν με τις γνωστές μεθόδους υπολογισμού ισοστατικών φορέων ενώ οι αντίστοιχες ελαστικές γραμμές υπολογίστηκαν με τη βοήθεια των συναρτήσεων ω (βλ. ασκήσεις ομάδας K στην παράγραφο 3.2).

Η γωνία στροφής $\varphi_{a,\xi}$ στο σημείο a της πραγματικής ελαστικής γραμμής που φαίνεται στο σχήμα (α3) είναι εξ ορισμού η τεταγμένη η_ξ της ζητούμενης ΓΕ στο σημείο ξ του φορτιζόμενου πέλματος. Για τον υπολογισμό της γωνίας αυτής χρησιμοποιούμε την ΑΣΔΕ: Ο φορέας φορτίζεται με τη νοητή μοναδιαία ροπή $M^v_{La}=1^v$ και τα συμπληρωματικά δυνατά έργα που παράγει η προκαλούμενη νοητή εντασιακή κατάσταση επί της πραγματικής παραμορφωσιακής κατάστασης καταγράφονται και τίθενται ίσα με το μηδέν:

$$W_e^{*v}=M^v_{La}\bullet\varphi_{a,\xi}\;,\;\; W_i^{*v}=-\int M,^v_a(x)\bullet\frac{M,_\xi(x)}{EI}dx$$

$$W^{*v}=W_e^{*v}+W_i^{*v}=0\;\Rightarrow\; M^v_{La}\bullet\varphi_{a,\xi}=\int M,^v_a(x)\bullet\frac{M,_\xi(x)}{EI}dx \qquad (*)$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τη βύθιση $w^v_{\xi,a}$ στο σημείο ξ της νοητής ελαστικής γραμμής (Σχ.11.3-2(β3)). Σύμφωνα με την ΑΣΔΕ ο φορέας θα πρέπει, τώρα, να φορτιστεί με μία νοητή μοναδιαία δύναμη $P_\xi=1^v$ στο σημείο ξ. Η νοητή αυτή φόρτιση συμπίπτει, όμως, αριθμητικά με την πραγματική μας φόρτιση $P_\xi=1$, η οποία, κατά συνέπεια, μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντ' αυτής. Καταγράφοντας τα συμπληρωματικά δυνατά έργα, που παράγει η πραγματική εντασιακή κατάσταση λόγω $P_\xi=1$ επί της νοητής παραμορφωσιακής κατάστασης λόγω $M^v_{La}=1^v$ και θέτοντάς τα ίσα με το μηδέν ($W^{*v}=W_e^{*v}+W_i^{*v}=0$), παίρνουμε:

$$W_e^{*v}=P_\xi\bullet w^v_{\xi,a}\;,\;\; W_i^{*v}=-\int M,_\xi(x)\bullet\frac{M,^v_a(x)}{EI}dx$$

$$W^{*v}=W_e^{*v}+W_i^{*v}=0\;\Rightarrow\; P_\xi\bullet w^v_{\xi,a}=\int M,_\xi(x)\bullet\frac{M,^v_a(x)}{EI}dx \qquad (**)$$

Συγκρίνοντας τις δεξιές πλευρές των εξισώσεων (*) και (**) διαπιστώνουμε ότι είναι ίσες. Συνεπώς, ίσες είναι και οι αριστερές τους πλευρές, οπότε ισχύει:

$$M^v_{La}\bullet\varphi_{a,\xi}=P_\xi\bullet w^v_{\xi,a}$$

και για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:

$$\varphi_{a,\xi}=\left(P_\xi\bullet w^v_{\xi,a}\right)/M^v_{La}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί έναν γενικό τύπο για τη ζητούμενη ΓΕ $\varphi_{a,\xi}$. Θέτοντας το κινητό φορτίο P_ξ ίσο με την αδιάστατη μονάδα, δηλαδή $P_\xi=1[-]$, και τη νοητή ροπή, επίσης, ίση με μονάδα, δηλαδή $M^v_{La}=1^v$, παίρνουμε για τη ΓΕ:

$$\varphi_{a,\xi}=w^v_{\xi,a} \qquad (***)$$

ή με αναλυτικότερο συμβολισμό των δεικτών:

$$\varphi_{a,P_Z(\xi)=1}=w^v(\xi),_{M_{La}=1}\;[rad/kN] \qquad (****)$$

όπου η $w^v_{\xi,a}=w^v(\xi)_{,MLa=1}$ η δυνατή, νοητή, ελαστική γραμμή του φορτιζόμενου πέλματος, η οποία αναπτύσσεται στον ισοστατικό φορέα λόγω της επιβεβλημένης μοναδιαίας ροπής $M^v_{La}=1^v$. Οι τεταγμένες της ΓΕ είναι:

$$\eta_\xi=w^v(\xi)_{,M_{La}=-1}$$

όπου το πεδίο μεταβολής της τετμημένης ξ περιλαμβάνει όλο το μήκος του φορτιζόμενου πέλματος.

Με βάση όλα τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε συνοπτικά ότι οι ΓΕ παραμορφωσιακών μεγεθών είναι ελαστικές γραμμές, οι οποίες γενικώς είναι καμπυλόγραμμες.

Ακριβέστερο είναι, βέβαια, να λέμε ότι πρόκειται για *δυνατές, νοητές, ελαστικές γραμμές*, δηλαδή για ελαστικές γραμμές λόγω *δυνατών* μοναδιαίων φορτίων, αφού η περιγραφείσα μέθοδος υπολογισμού ΓΕ βασίζεται στην ΑΣΔΕ. Εντούτοις, η παράλειψη της θεωρητικά ορθότερης αυτής διατύπωσης δεν έχει καμία περαιτέρω συνέπεια όσον αφορά τον αριθμητικό υπολογισμό των ΓΕ. Εξάλλου, το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε μπορεί να θεωρηθεί ότι απορρέει από την 1η πρόταση αμοιβαιότητας των Maxwell-Mohr, όπου οι μετακινήσεις δεν είναι δυνατές, αλλά πραγματικές. Γι' αυτό και κατά κανόνα παραλείπουμε τον άνω δείκτη v που συμβολίζει τον νοητό χαρακτήρα των σχετικών μεγεθών.

Ακολούθως, παρουσιάζεται ένας πρακτικός τρόπος προσδιορισμού ΓΕ παραμορφωσιακών μεγεθών με την πρόταση Maxwell-Mohr:
Χρησιμοποιώντας τους γενικότερους συμβολισμούς $\delta_{a,\xi}=\varphi_{a,\xi}$ και $\delta_{\xi,a}=w_{\xi,a}$ και παραλείποντας χάριν απλούστευσης τους άνω δείκτες v, η εξ. (***) γράφεται υπό τη μορφή

$$\delta_{a,\xi} = \delta_{\xi,a}$$

ή παραλείποντας το κόμμα

$$\delta_{a\xi} = \delta_{\xi a}$$

οπότε γίνεται και οπτικά σαφές ότι εκφράζει τη γνωστή πρώτη πρόταση αμοιβαιότητας $\delta_{mn}=\delta_{nm}$ των Maxwell-Mohr.

Παρατηρώντας προσεκτικότερα την εξίσωση (****) διαπιστώνουμε ότι αυτή εκφράζει τον εξής «μετασχηματισμό» (παραλείπεται ο άνω δείκτης v):

$$\varphi_{a,P_Z(\xi)=1} = w(\xi)_{,M_{La}=1}$$

Δηλαδή, ο δεύτερος δείκτης, ο δείκτης αιτίου, $P_Z(\xi)=1$ «μετατρέπεται» με εργική αντιστοίχιση στο τελικώς ζητούμενο μέγεθος $w(\xi)$: Στην κάθετη επί τον άξονα ξ δύναμη P_Z αντιστοιχεί εργικά η κάθετη προς τον άξονα ξ μετατόπιση w. Παρομοίως, το αρχικώς ζητούμενο μέγεθος φ_a «μετατρέπεται» με εργική αντιστοίχιση στο αίτιο $M_{La}=1$ που προκαλεί το τελικώς ζητούμενο μέγεθος $w(\xi)$: Στη στροφή φ_a αντιστοιχεί εργικά η ροπή M_{La}, την οποία βέβαια εδώ θέτουμε ίση με 1.

Ο «μετασχηματισμός» αυτός, που τον συναντήσαμε και κατά τον υπολογισμό ΓΕ εντασιακών μεγεθών με την πρόταση Krohn-Land (βλ. παράγρ. 4.1), εκφράζει με πρακτικό τρόπο την πρόταση Maxwell-Mohr ($\delta_{mn}=\delta_{nm}$) και εφαρμόζεται γενικά. Έτσι, π.χ. για τις ΓΕ των μετατοπίσεων w_a και u_a σε ένα οποιοδήποτε σημείο a λόγω ενός κινητού φορτίου $P_Z(\xi)=1$, παίρνουμε αντίστοιχα:

$$w_{a,P_Z(\xi)=1} = w(\xi)_{,P_{Za}=1} \quad \text{και} \quad u_{a,P_Z(\xi)=1} = w(\xi)_{,P_{Xa}=1}$$

Για μια διεξοδικότερη παρουσίαση των μεθόδων υπολογισμού γραμμών επιρροής παραμορφωσιακών μεγεθών ο σπουδαστής θα πρέπει να ανατρέξει στη σχετική βιβλιογραφία (βλ. π.χ. [2], κεφ. 11).

Άσκηση Μ1

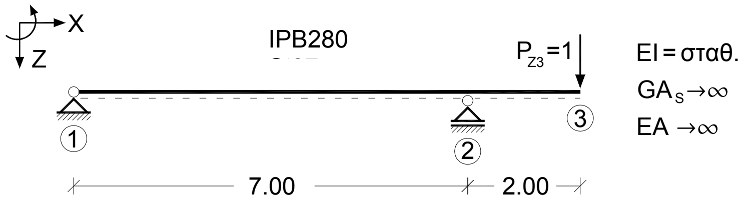
Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.2.

α) ΓΕ της βύθισης w_3 λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$

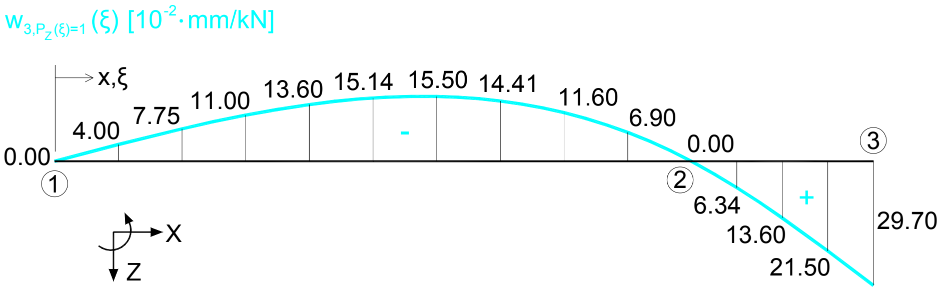
Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$w_{3,P_Z(\xi)=1} = w(\xi)_{,P_{Z3}=1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού λόγω ενός κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου P_{Z3}=1 στο σημείο 3:



Η ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού για φόρτιση P_{Z3}=100kN έχει υπολογιστεί στην Άσκηση Κ5. Συνεπώς, η εδώ ζητούμενη ΓΕ προκύπτει με διαίρεση της εκεί υπολογισθείσας ελαστικής γραμμής διά 100kN:

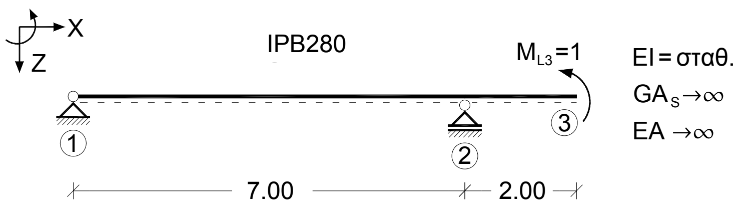


β) ΓΕ της στροφής φ_3 λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$

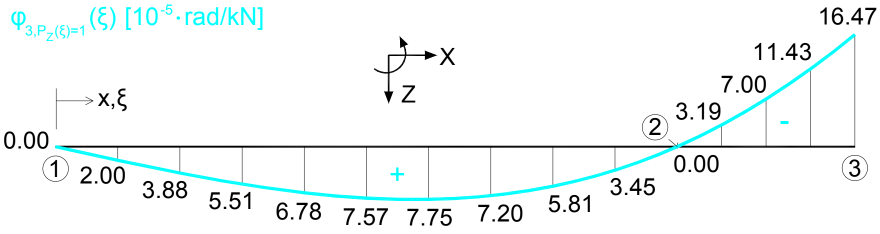
Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$\varphi_{3,P_Z(\xi)=1} = w(\xi)_{,M_{L3}=1}$$

Δηλαδή, η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού λόγω μιας μοναδιαίας εξωτερικής ροπής M_{L3}=1 στο σημείο 3:



Η ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού για την παραπάνω φόρτιση υπολογίζεται κατά τα γνωστά (βλ. Ασκήσεις Ομάδας Κ). Για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:

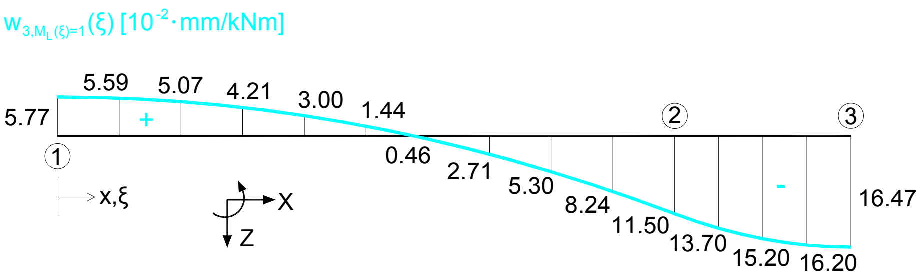


γ) ΓΕ της βύθισης w_3 λόγω μοναδιαίας ροπής $M_L(\xi)$

Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$w_{3,M_L(\xi)=1} = \varphi(\xi)_{,P_{Z3}=1}$$

Δηλαδή, η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή φ(ξ) των στροφών της δοκού λόγω ενός κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_{Z3}=1$ στο σημείο 3 (βλ. παραπάνω υποπαράγραφο α). Η ελαστική αυτή γραμμή αποτελεί την αρνητική πρώτη παράγωγο της αντίστοιχης ελαστικής γραμμής w(ξ) λόγω $P_{Z3}=1$, η οποία υπολογίστηκε προηγουμένως (*Υπενθύμιση*: φ(x)=-w'(x)). Η $\varphi(\xi)_{,PZ3=1}$ μπορεί όμως να υπολογιστεί και ανεξάρτητα βάσει του Πίνακα 3α του Παραρτήματος, στον οποίο περιέχονται όχι μόνο οι συναρτήσεις ω, αλλά και οι συναρτήσεις ω'. Για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:

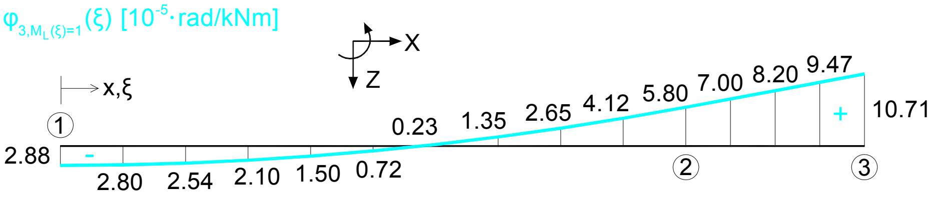


δ) ΓΕ της στροφής φ_3 λόγω μοναδιαίας ροπής $M_L(\xi)$

Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$\varphi_{3,M_L(\xi)=1} = \varphi(\xi)_{,M_{L3}=1}$$

Δηλαδή, η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή φ(ξ) των στροφών της δοκού λόγω μιας μοναδιαίας εξωτερικής ροπής $M_{L3}=1$ στο σημείο 3 (βλ. παραπάνω υποπαράγραφο β). Η ελαστική αυτή γραμμή αποτελεί την αρνητική πρώτη παράγωγο της αντίστοιχης ελαστικής γραμμής w(ξ) λόγω $M_{L3}=1$, η οποία υπολογίστηκε προηγουμένως (*Υπενθύμιση*: φ(x)=-w'(x)). Η $\varphi(\xi)_{,ML3=1}$ μπορεί, όμως, να υπολογιστεί και ανεξάρτητα βάσει του Πίνακα 3α του Παραρτήματος, στον οποίο περιέχονται όχι μόνο οι συναρτήσεις ω, αλλά και οι συναρτήσεις ω'. Για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:



Βιντεοπαρουσίαση της άσκησης αυτής στο YouTube: https://youtu.be/Ym13k5TsOv8

Άσκηση Μ2

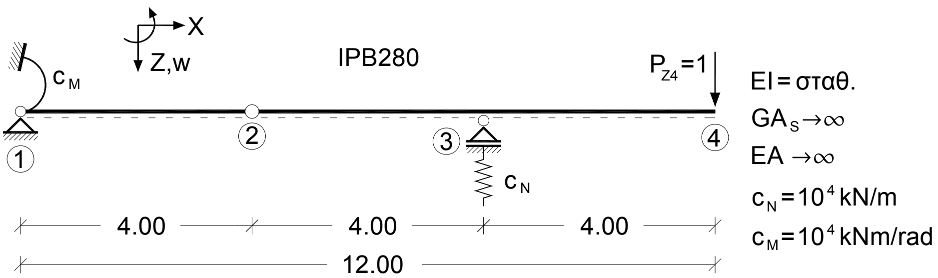
Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.2.

α) ΓΕ της βύθισης w_4 λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$

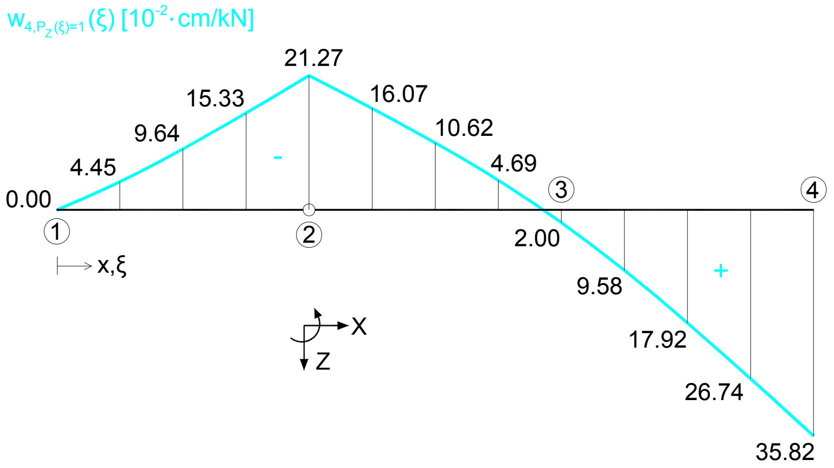
Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$w_{4,P_Z(\xi)=1} = w(\xi)_{,P_{Z4}=1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού λόγω ενός κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου P_{Z4}=1 στο σημείο 4:



Η ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού για φόρτιση P_{Z4}=100kN έχει υπολογιστεί στην Άσκηση Κ6. Συνεπώς, η εδώ ζητούμενη ΓΕ προκύπτει με διαίρεση της εκεί υπολογισθείσας ελαστικής γραμμής διά 100kN:

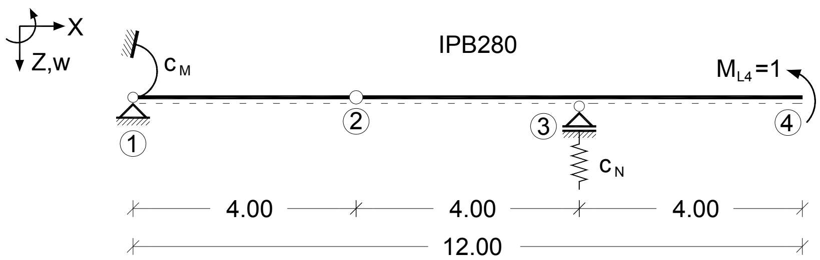


β) ΓΕ της στροφής φ_4 λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$

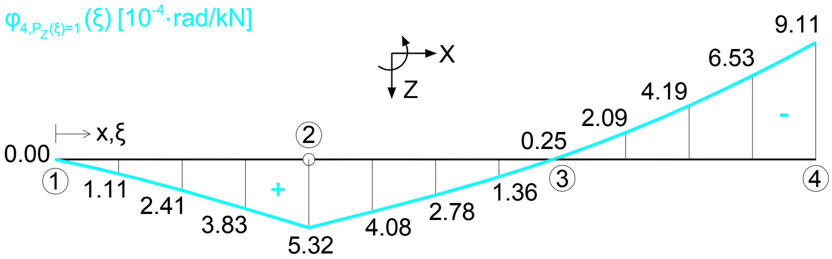
Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$\varphi_{4,P_Z(\xi)=1} = w(\xi)_{,M_{L4}=1}$$

Δηλαδή, η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού λόγω μιας μοναδιαίας εξωτερικής ροπής M_{L4}=1 στο σημείο 4:



Η ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού για την παραπάνω φόρτιση υπολογίζεται κατά τα γνωστά (βλ. Ασκήσεις Ομάδας Κ). Για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:



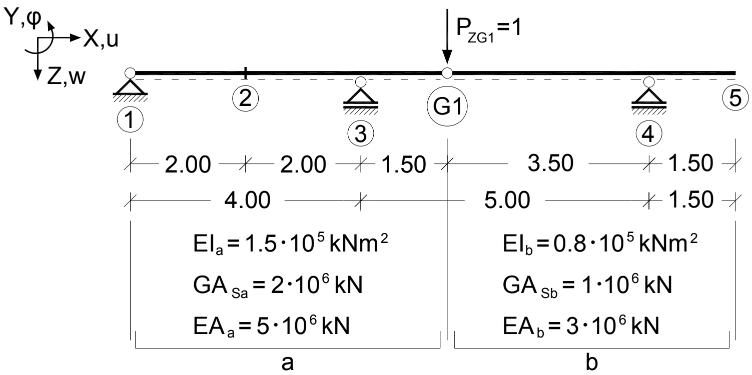
Άσκηση Μ3

α) ΓΕ της βύθισης w_{G1} λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$

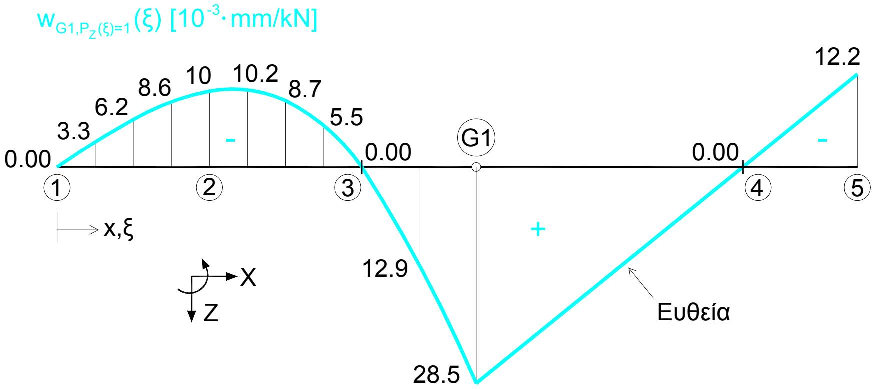
Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$w_{G1,P_Z(\xi)=1} = w(\xi)_{,P_{ZG1}=1}$$

Δηλαδή, η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού λόγω ενός κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου P_{ZG1}=1 στο σημείο G1:



Η ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού για την παραπάνω φόρτιση υπολογίζεται, κατά τα γνωστά (βλ. Ασκήσεις Ομάδας Κ). Για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:



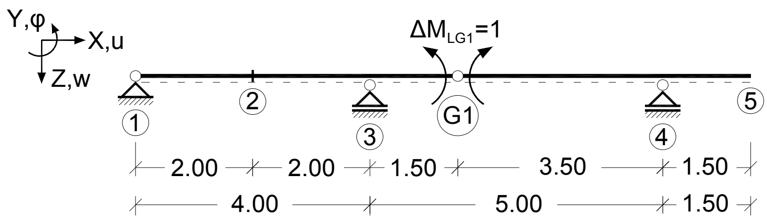
Μικρή άσκηση κρίσης: Χωρίς υπολογισμούς να τεκμηριωθεί το γεγονός ότι η ΓΕ στο τμήμα G1-4-5 είναι ευθεία γραμμή.

β) ΓΕ της διαφοράς στροφών $\Delta\varphi_{G1}$ λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$

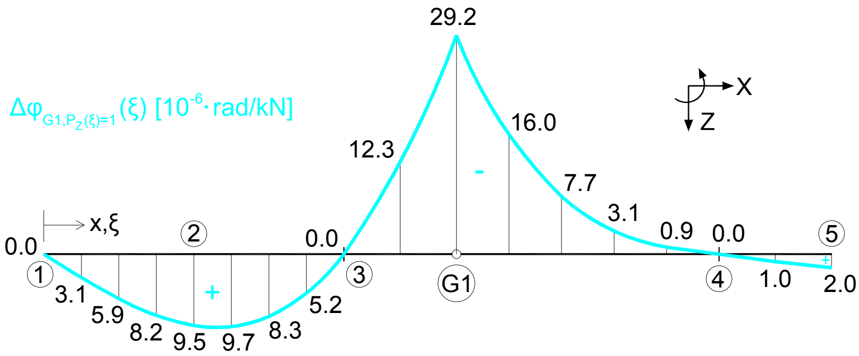
Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$\Delta\varphi_{G1,P_Z(\xi)=1} = w(\xi)_{,\Delta M_{LG1}=1}$$

δηλαδή, η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού λόγω ενός ζεύγους εξωτερικών ροπών ΔM_{LG1}=1 στην άρθρωση G1, δηλαδή, $M_{LG1αριστ}$=1 και $M_{LG1δεξ}$=-1:



Η ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού για την παραπάνω φόρτιση υπολογίζεται κατά τα γνωστά (βλ. Ασκήσεις Ομάδας Κ). Για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:



Άσκηση Μ4

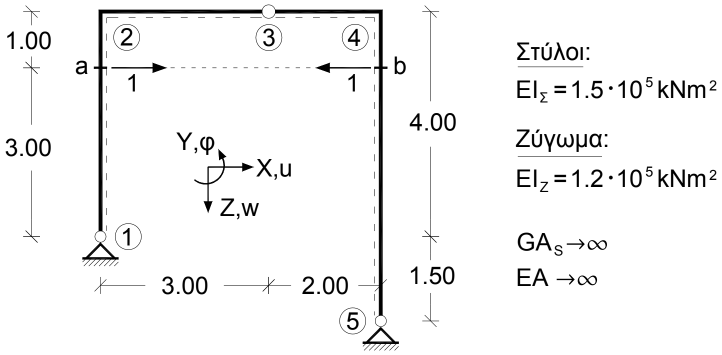
Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.2.

ΓΕ της μεταβολής Δu_{ab} της οριζόντιας απόστασης των σημείων a και b λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$

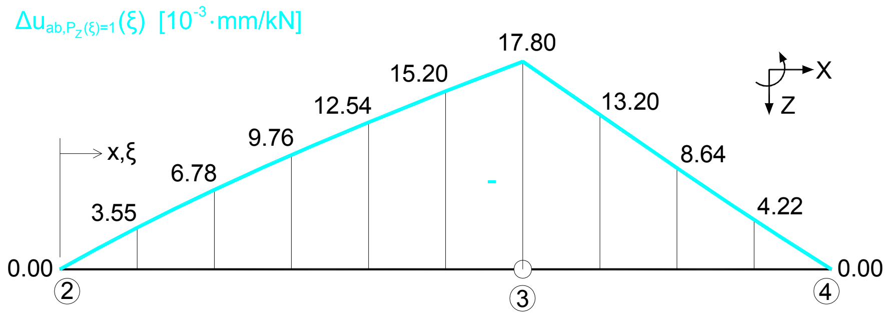
Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$\Delta u_{ab,P_Z(\xi)=1} = w(\xi)_{,P_{Xa}=1\ \&\ P_{Xb}=-1}$$

Δηλαδή, η ζητούμενη ΓΕ της $\Delta u_{ab}=u_a-u_b$ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού λόγω ταυτόχρονης δράσης των δύο οριζόντιων φορτίων $P_{Xa}=1$ και $P_{Xb}=-1$ στα σημεία a και b αντίστοιχα:



Η ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού για την παραπάνω φόρτιση υπολογίζεται κατά τα γνωστά (βλ. Ασκήσεις Ομάδας Κ). Για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:



Άσκηση Μ5

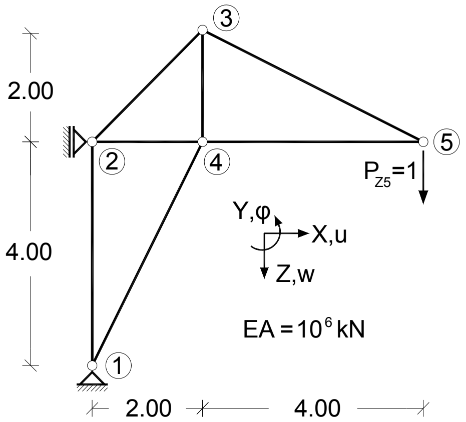
Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.2.

α) ΓΕ της βύθισης w_5 λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$ μεταξύ των σημείων 2 και 5

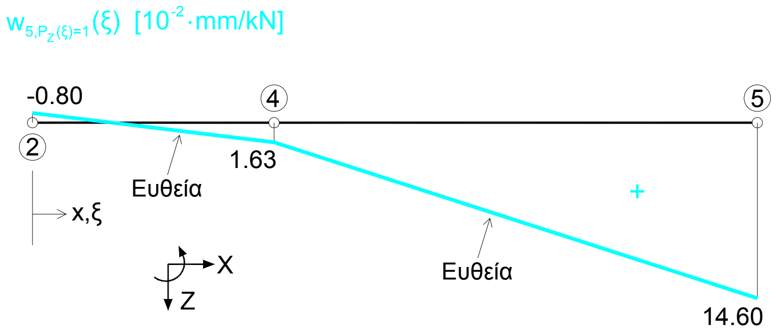
Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$w_{5,P_Z(\xi)=1} = w(\xi),_{P_{Z5}=1}$$

Δηλαδή η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) του φορτιζόμενου πέλματος 2-4-5 λόγω ενός κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου P_{Z5}=1 στο σημείο 5:



Η ελαστική γραμμή w(ξ) του τμήματος 2-4-5 για την παραπάνω φόρτιση υπολογίζεται κατά τα γνωστά (βλ. Ασκήσεις Ομάδας Κ). Για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:



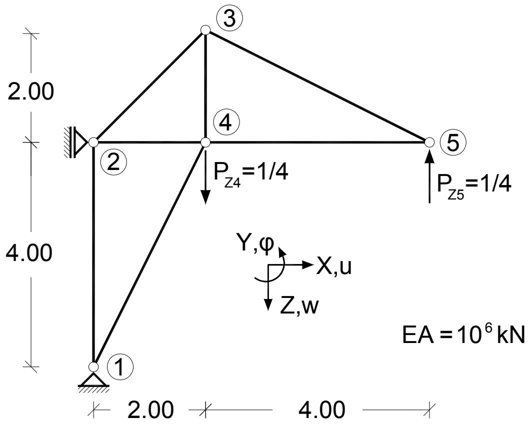
Μικρή άσκηση κρίσης: Χωρίς υπολογισμούς να τεκμηριωθεί το γεγονός ότι η ζητούμενη ΓΕ αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα.

β) ΓΕ της μεταβολής ψ_{45} της στροφής της χορδής της ράβδου 4-5 λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$ μεταξύ των σημείων 2 και 5

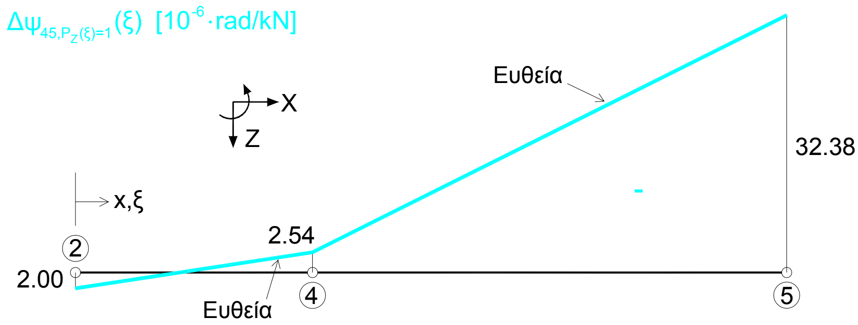
Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$\Delta\psi_{45,P_Z(\xi)=1} = w(\xi),_{P_{Z4}=1/4\ \&\ P_{Z5}=-1/4}$$

Δηλαδή, η ζητούμενη ΓΕ της $\psi_{45}=(w_4-w_5)/L_{45}=(w_4-w_5)/4$ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) του φορτιζόμενου πέλματος 2-4-5 λόγω ταυτόχρονης δράσης των δύο κατακόρυφων φορτίων στα σημεία 4 και 5, P_{Z4}=1/4 και P_{Z5}=-1/4 αντίστοιχα:



Η ελαστική γραμμή w(ξ) του τμήματος 2-4-5 για την παραπάνω φόρτιση υπολογίζεται κατά τα γνωστά (βλ. Ασκήσεις Ομάδας Κ). Για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:



Μικρή άσκηση κρίσης: Χωρίς υπολογισμούς να τεκμηριωθεί το γεγονός ότι η ζητούμενη ΓΕ αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα.

Άσκηση Μ6

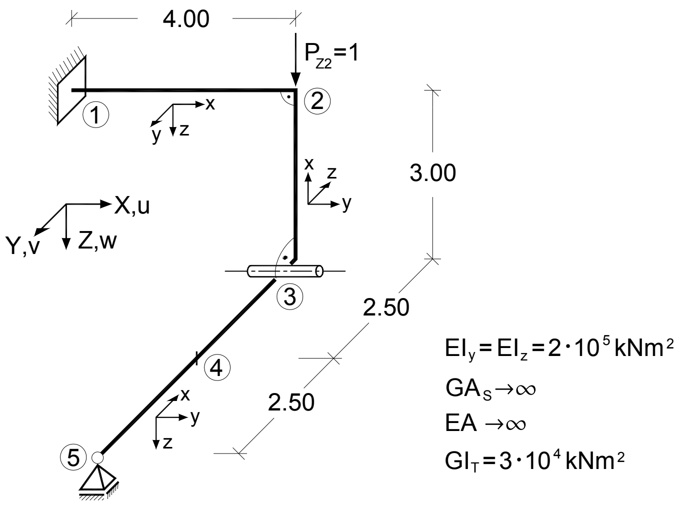
Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 4.2.

α) ΓΕ της βύθισης w_2 του κόμβου 2 λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$ στη δοκό 5-4-3

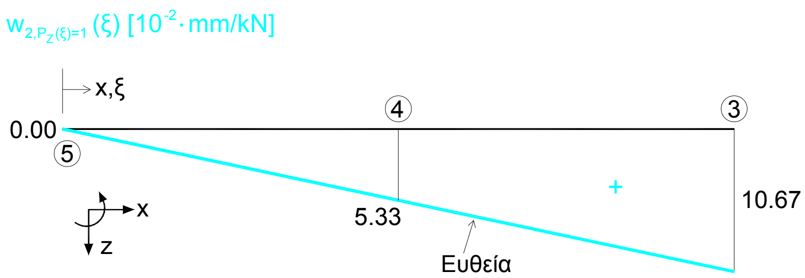
Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$w_{2,P_Z(\xi)=1} = w(\xi),_{P_{Z2}=1}$$

Δηλαδή, η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού 5-4-3 λόγω ενός κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου P_{Z2}=1 στο σημείο 2:



Η ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού για την παραπάνω φόρτιση υπολογίζεται κατά τα γνωστά (βλ. Ασκήσεις Ομάδας Κ). Για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:



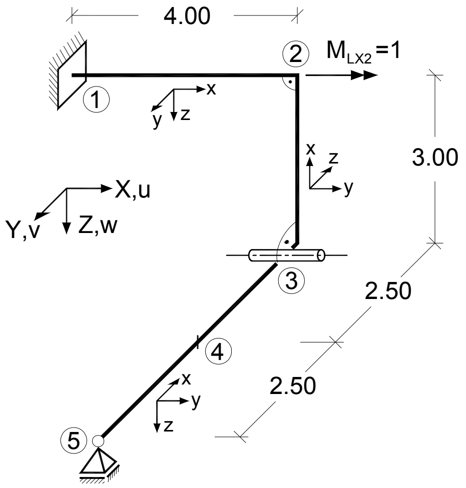
Μικρή άσκηση κρίσης: Χωρίς υπολογισμούς να τεκμηριωθεί το γεγονός ότι η ζητούμενη ΓΕ είναι ευθεία γραμμή.

β) ΓΕ της στροφής φ_{X2} του κόμβου 2 ως προς τον καθολικό άξονα X λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$ στη δοκό 5-4-3

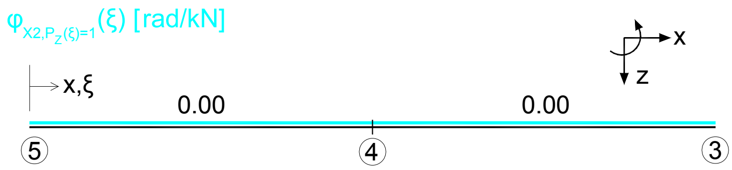
Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$\varphi_{X2,P_Z(\xi)=1} = w(\xi),_{M_{LX2}=1}$$

Δηλαδή, η ζητούμενη ΓΕ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού 5-4-3 λόγω μιας μοναδιαίας εξωτερικής ροπής M_{LX2}=1 στο σημείο 2:



Η ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού για την παραπάνω φόρτιση υπολογίζεται κατά τα γνωστά (βλ. Ασκήσεις Ομάδας Κ). Για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:



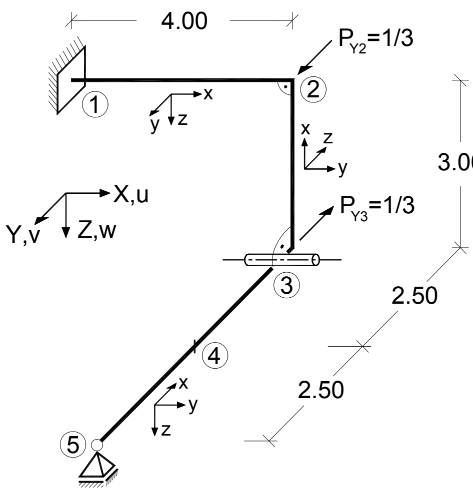
Μικρή άσκηση κρίσης: Η ΓΕ έχει μηδενικές τεταγμένες. Γιατί;

γ) ΓΕ της στροφής χορδής ψ_{X23}, της δοκού 2-3 ως προς τον καθολικό άξονα X λόγω κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου $P_Z(\xi)$ στη δοκό 5-4-3

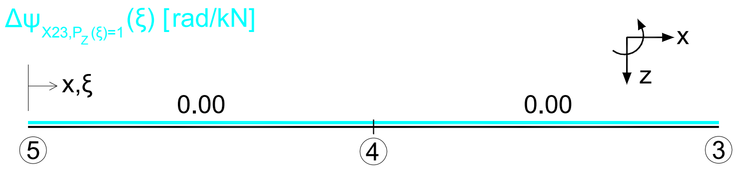
Σύμφωνα με την πρόταση Maxwell-Mohr, ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$\psi_{X23,P_Z(\xi)=1} = w(\xi),_{P_{Y2}=1/3 \ \& \ P_{Y3}=-1/3}$$

Δηλαδή, η ζητούμενη ΓΕ της $\psi_{X23}=(v_2-v_3)/L_{23}=(v_2-v_3)/3$ ταυτίζεται με την ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού 5-4-3 λόγω ταυτόχρονης δράσης των δύο οριζόντιων φορτίων $P_{Y2}=1/3$ και $P_{Y3}=-1/3$ στα σημεία 2 και 3 αντίστοιχα:



Η ελαστική γραμμή w(ξ) της δοκού για την παραπάνω φόρτιση υπολογίζεται κατά τα γνωστά (βλ. Ασκήσεις Ομάδας Κ). Για τη ζητούμενη ΓΕ παίρνουμε:



Μικρή άσκηση κρίσης: Η ΓΕ έχει μηδενικές τεταγμένες. Γιατί;

Βιβλιογραφία κεφαλαίου 4

[1] Αβραμίδης, Ι.Ε. και Μορφίδης, Κ.Ε. (2008). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ια: Ισοστατικοί φορείς - Σύνοψη Θεωρίας και Ασκήσεις*. Θεσσαλονίκη: Σοφία.

[2] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ι: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

Προτεινόμενα συγγράμματα για περαιτέρω μελέτη: βλ. **Βιβλιογραφία** στις αρχικές σελίδες του βιβλίου.