

Κεφάλαιο 3

Υπολογισμός παραμορφωσιακών μεγεθών

Σύνοψη

Οι ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού αφορούν τις μεθόδους υπολογισμού (α) μεμονωμένων μεγεθών παραμόρφωσης (Ομάδα I), δηλαδή μετατοπίσεων και στροφών σε συγκεκριμένα σημεία του εκάστοτε φορέα και (β) ελαστικών γραμμών (Ομάδα K), δηλαδή της παραμορφωμένης κατάστασης ολόκληρου του φορέα. Ως παραδείγματα χρησιμοποιούνται διάφοροι επίπεδοι και χωρικοί φορείς (δοκός, ημιπλαίσιο, πλαίσιο, δικτύωμα) με ακλόνητες ή ελαστικές στηρίξεις/πακτώσεις και με φορτίσεις που περιλαμβάνουν τόσο εξωτερικά φορτία (συγκεντρωμένες ή/και κατανομημένες δυνάμεις) όσο και καταναγκασμούς (ομοιόμορφη/ανομοιόμορφη θερμοκρασιακή φόρτιση και καταναγκασμένες βυθίσεις). Για τον υπολογισμό μεμονωμένων παραμορφωσιακών μεγεθών εφαρμόζεται η μέθοδος των βοηθητικών μοναδιαίων δυνάμεων, δηλαδή η αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων (ΑΣΔΕ), ενώ για τον υπολογισμό των ελαστικών γραμμών εφαρμόζεται η μέθοδος των συναρτήσεων ω σε συνδυασμό με την ΑΣΔΕ.

Προαπαιτούμενη γνώση

Απαραίτητη είναι η προηγούμενη μελέτη και κατανόηση της σχετικής με το παρόν κεφάλαιο θεωρίας, όπως αυτή παρουσιάζεται σε βιβλία Στατικής των Κατασκευών (βλ. π.χ. [1] και [2]). Οπωσδήποτε απαιτείται η κατανόηση των μεθόδων υπολογισμού μεγεθών έντασης, η εφαρμογή των οποίων παρουσιάστηκε στις ασκήσεις των προηγούμενων κεφαλαίων.

3.1 Υπολογισμός μεμονωμένων παραμορφωσιακών μεγεθών (Ομάδα Ι)

Για τους παρακάτω ισοστατικούς φορείς να υπολογιστούν τα ζητούμενα παραμορφωσιακά μεγέθη εφαρμόζοντας τη μέθοδο των συμπληρωματικών δυνατών έργων.

I1

Για το απεικονιζόμενο αμφιέριστο ημιπλαίσιο ζητούνται οι μετακινήσεις u_2 , w_2 και φ_2 του κόμβου 2 για τις εξής περιπτώσεις:

A. Για τη γενική περίπτωση ($EI = \text{πεπερ.}$, $GA_S = \text{πεπερ.}$, $EA = \text{πεπερ.}$):

→ Λόγω q και n .

B. Υπό τις παραδοχές της ατμησίας ($GA_S \rightarrow \infty$) και της ατένειας ($EA \rightarrow \infty$):

→ B1) Λόγω q και n (Να γίνει σύγκριση με τη γενική περίπτωση).

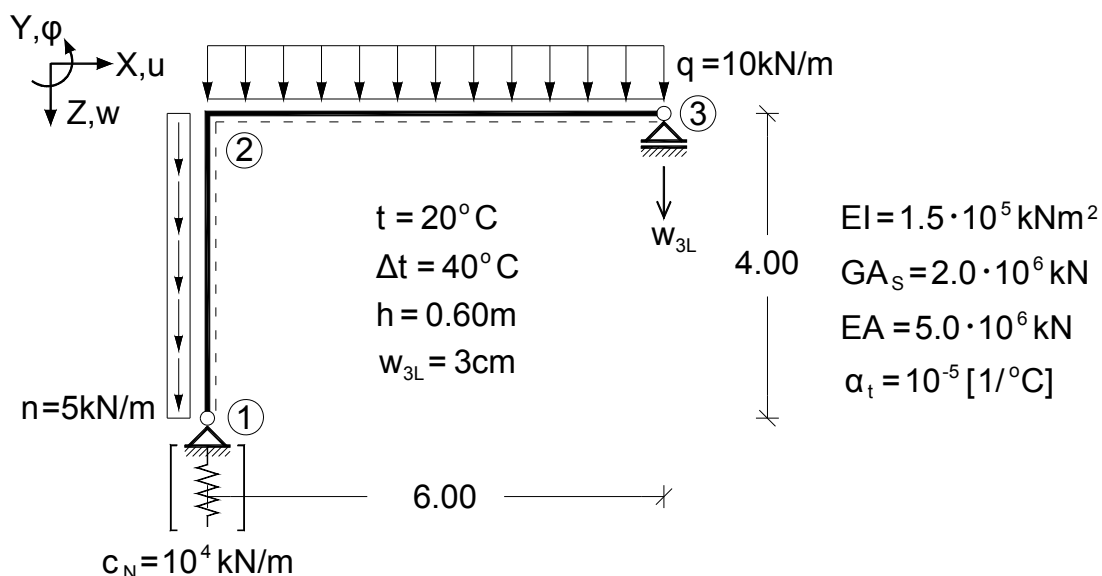
→ B2) Λόγω q και n , αν η στήριξη 1 είναι κατακορύφως ενδόσιμη ελαστικά.

→ B3) Λόγω ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t σε ολόκληρο το φορέα.

→ B4) Λόγω ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης Δt σε ολόκληρο το φορέα.

→ B5) Λόγω της καταναγκασμένης βύθισης w_{3L} της στήριξης 3.

Για τις περιπτώσεις των καταγκασμών t , Δt και w_{3L} να σχεδιαστεί (ποιοτικά) η παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται ο φορέας.



Για την απεικονιζόμενη αρθρωτή δοκό ζητούνται η μετακίνηση w_{G1} και η διαφορά στροφών $\Delta\varphi_{G1}$ στην άρθρωση G1 για τις εξής περιπτώσεις:

A. Για τη γενική περίπτωση ($EI=\text{πεπερ.}, GA_S=\text{πεπερ.}, EA=\text{πεπερ.}$):

→ Λόγω των δεδομένων εξωτερικών φορτίων.

B. Υπό τις παραδοχές της ατμησίας ($GA_S \rightarrow \infty$) και της ατένειας ($EA \rightarrow \infty$):

→ B1) Λόγω των δεδομένων εξωτερικών φορτίων (Να γίνει σύγκριση με τη γενική περίπτωση).

→ B2) Λόγω των εξωτερικών φορτίων, αν η στήριξη 1 είναι κατακορύφως ενδόσιμη ελαστικά.

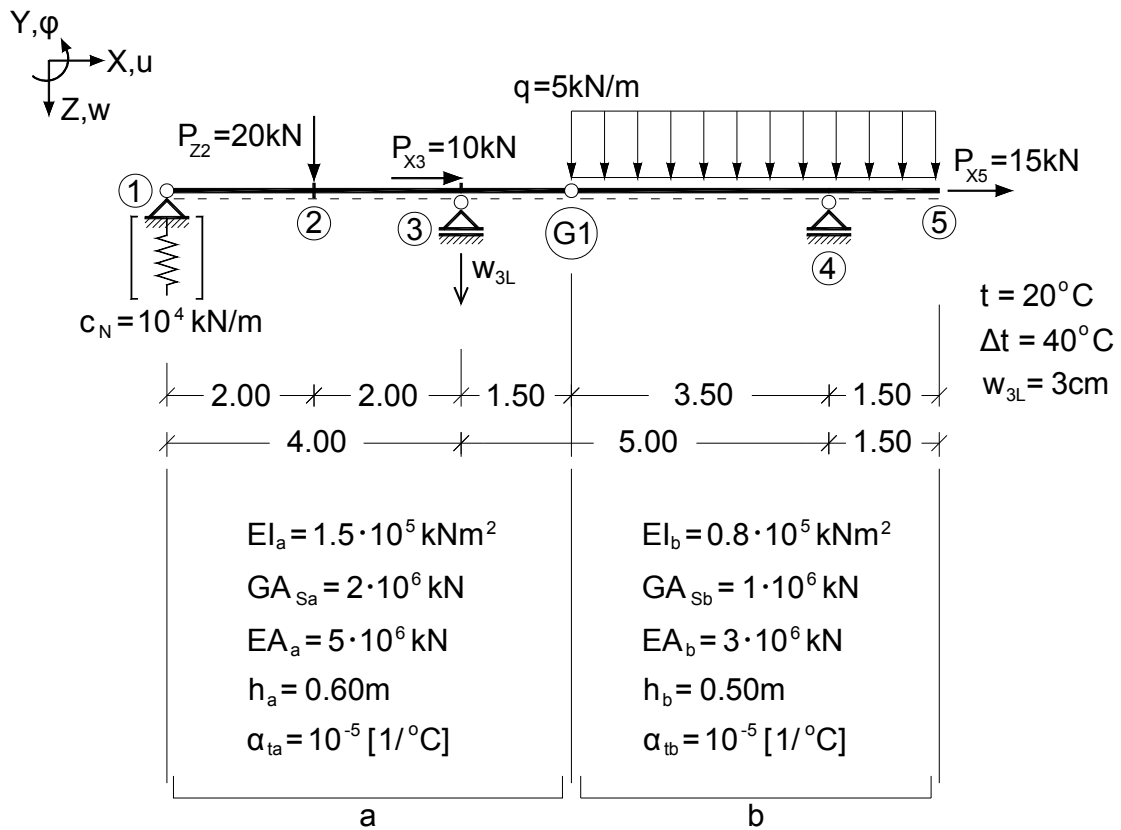
→ B3) Λόγω ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t σε όλο το μήκος της δοκού.

→ B4) Λόγω ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης Δt σε όλο το μήκος της δοκού.

→ B5) Λόγω της καταναγκασμένης βύθισης w_{3L} της στήριξης 3.

Για τις περιπτώσεις των καταγκασμών t , Δt και w_{3L} να σχεδιαστεί (ποιοτικά) η παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται ο φορέας.

12

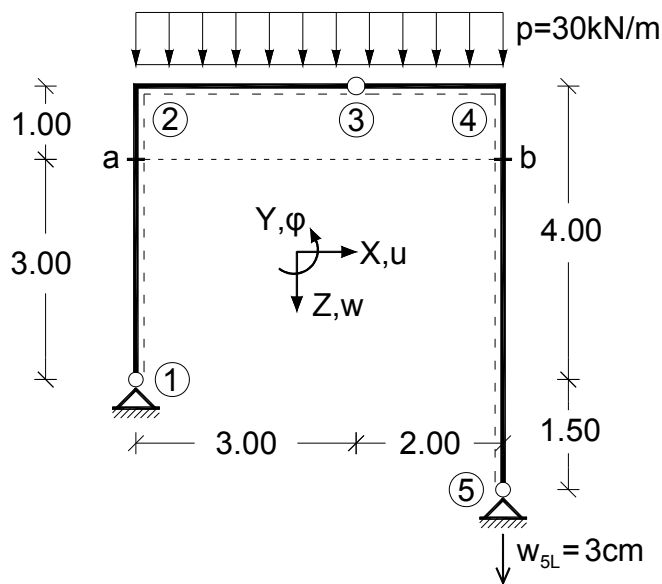


Για το απεικονιζόμενο άτμητο και ατενές τριαρθρωτό πλαίσιο να υπολογιστεί η μεταβολή Δu_{ab} της οριζόντιας απόστασης των σημείων a και b:

- λόγω του φορτίου p ,
- λόγω της ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t_{24} στο ζύγωμα,
- λόγω της ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης Δt_{24} στο ζύγωμα,
- λόγω της καταναγκασμένης βύθισης w_{5L} της στήριξης 5.

Για τις περιπτώσεις των καταγκασμών t_{24} , Δt_{24} και w_{5L} να σχεδιαστεί (ποιοτικά) η παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται το πλαίσιο.

I3



$t_{24} = 20^\circ \text{C}$

$\Delta t_{24} = 40^\circ \text{C}$

Στύλοι:

$EI_z = 1.5 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2$

Ζύγωμα:

$EI_z = 1.2 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2$

$h_z = 0.60 \text{ m}$

$GA_s \rightarrow \infty$

$EA \rightarrow \infty$

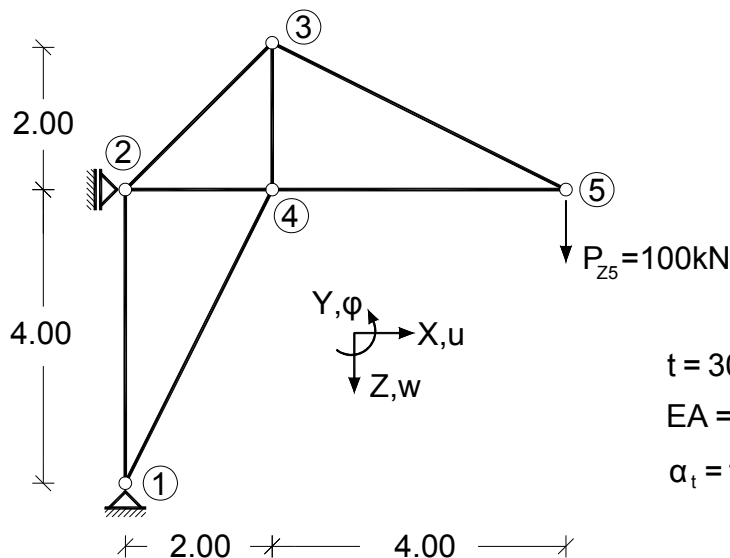
$\alpha_t = 10^{-5} [1/^\circ\text{C}]$

$w_{5L} = 3 \text{ cm}$

I4

Για το απεικονιζόμενο απλό τριγωνικό δικτύωμα ζητούνται η βύθιση w_5 και η στροφή χορδής ψ_{45} :

- λόγω του φορτίου P_{Z5} ,
- λόγω της ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t σε όλες τις ράβδους.



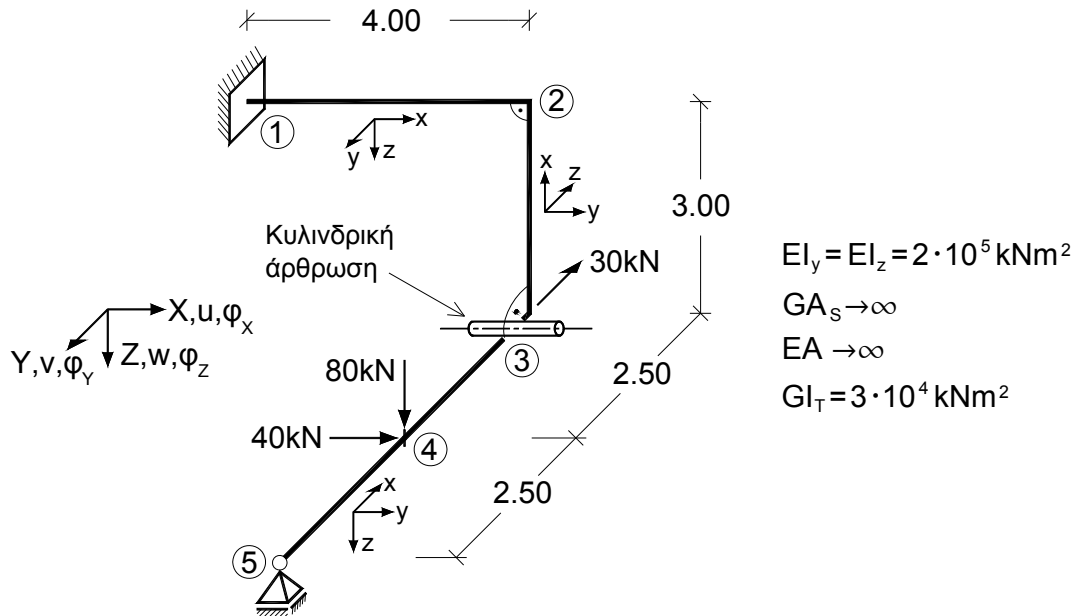
$t = 30^\circ \text{C}$

$EA = 10^6 \text{ kN}$

$\alpha_t = 10^{-5} [1/^\circ\text{C}]$

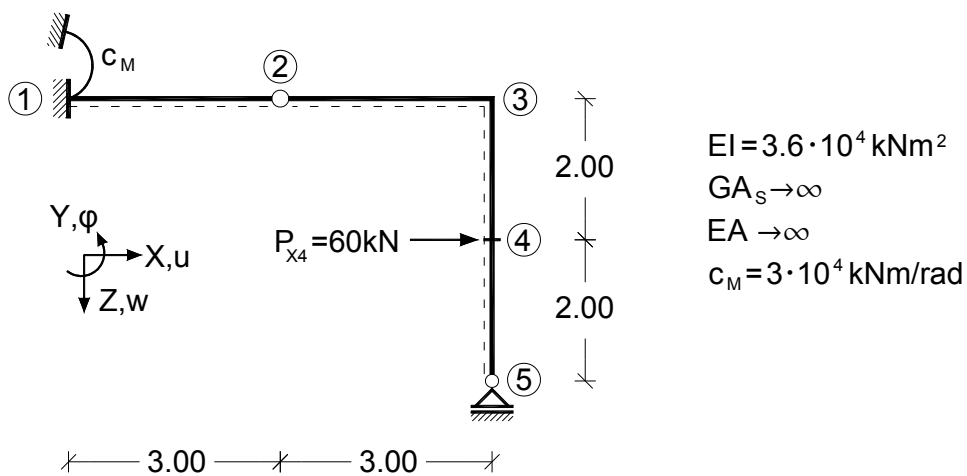
Για τον απεικονιζόμενο ισοστατικό, άτμητο και ατενή χωρικό φορέα υπό τα δεδομένα φορτία να υπολογιστούν η μετατόπιση w_2 του κόμβου 2, η στροφή φ_{x2} του κόμβου 2 και η στροφή χορδής ψ_{x23} (στο επίπεδο Y-Z) του τμήματος 2-3.

15



Για το απεικονιζόμενο ισοστατικό, άτμητο και ατενές ημιπλαίσιο με ελαστική πάκτωση στον κόμβο 1 να υπολογιστεί η βύθιση w_2 της άρθρωσης 2 λόγω του δεδομένου οριζόντιου φορτίου.

16



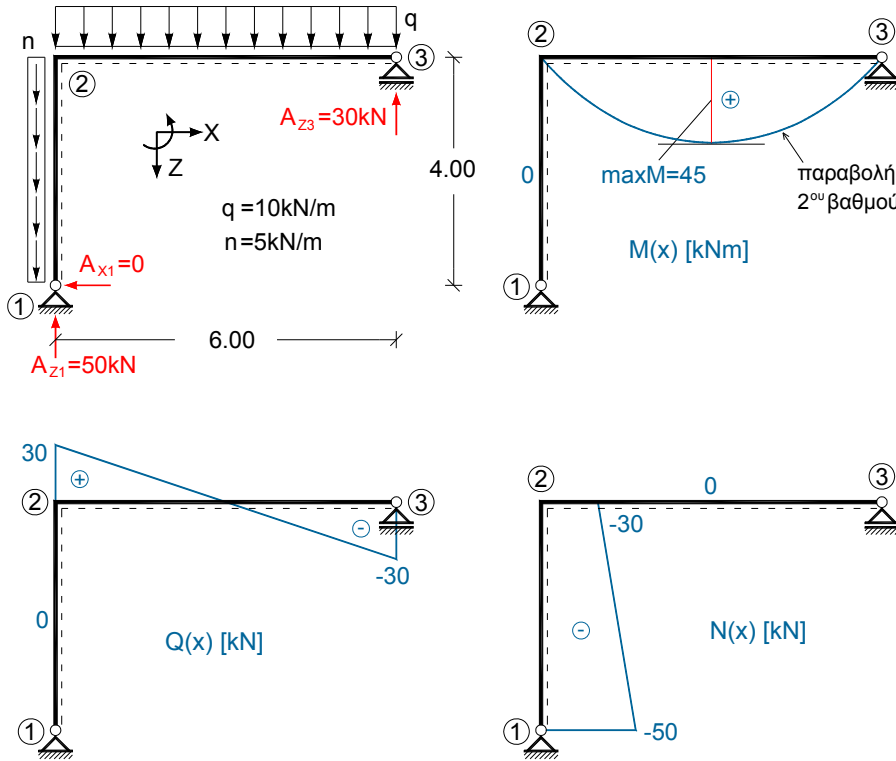
ΛΥΣΕΙΣ

Άσκηση II

Για τον υπολογισμό των ζητούμενων μετακινήσεων εφαρμόζεται η αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων (ΑΣΔΕ, βλ. π.χ. [2], παράγρ. 3.6.5 και 9.4).

(1) Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του φορέα υπό τη δεδομένη φόρτιση

Οι αντιδράσεις στήριξης και τα φορτία διατομής λόγω q και n έχουν ήδη υπολογιστεί στην Άσκηση Η1/6 και δίνονται στο παρακάτω σχήμα:

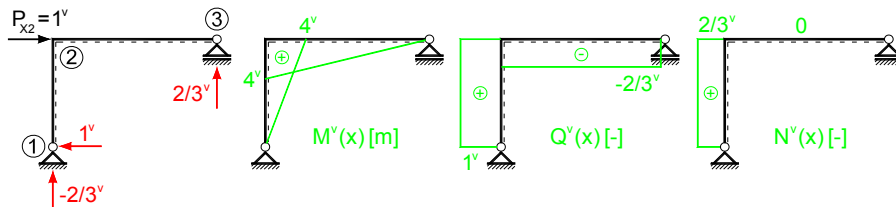


Αντιδράσεις στήριξης και φορτία διατομής λόγω q και n

(2) Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του φορέα υπό την κατάλληλη μοναδιαία δυνατή φόρτιση

I. Μοναδιαίο δυνατό φορτίο $P_{x2}=1^v$ για τον υπολογισμό της u_2

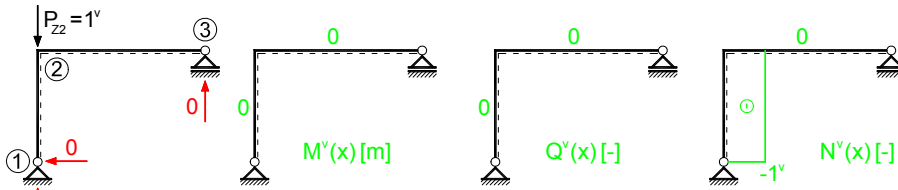
Οι αντιδράσεις στήριξης και τα φορτία διατομής λόγω $P_{x2}=1^v$ δίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



Αντιδράσεις στήριξης και φορτία διατομής λόγω $P_{x2}=1^v$

II. Μοναδιαίο δυνατό φορτίο $P_{z2}=1^v$ για τον υπολογισμό της w_2

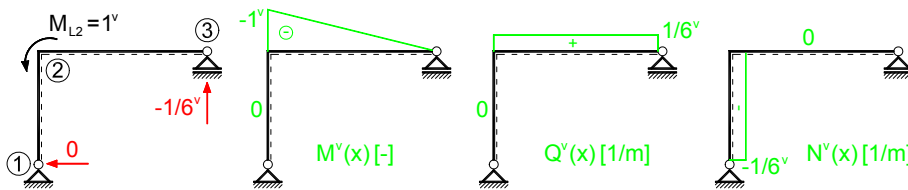
Οι αντιδράσεις στήριξης και τα φορτία διατομής λόγω $P_{z2}=1^v$ δίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



Αντιδράσεις στήριξης και φορτία διατομής λόγω $P_{z2}=1^v$

III. Μοναδιαίο δυνατό φορτίο $M_{L2}=1^v$ για τον υπολογισμό της φ_2

Οι αντιδράσεις στήριξης και τα φορτία διατομής λόγω $M_{L2}=1^v$, δίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



Αντιδράσεις στήριξης και φορτία διατομής λόγω $M_{L2}=1^v$

Ο υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής για τις τρεις παραπάνω δυνατές φορτίσεις έγινε, κατά τα γνωστά, με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας και τη μέθοδο των κυκλικών διαχωριστικών τομών.

(3) Άθροιση όλων των παραγόμενων συμπληρωματικών δυνατών έργων, εξίσωσή τους με το μηδέν και επίλυση ως προς τη ζητούμενη μετακίνηση

I. Υπολογισμός της u_2

A. Γενική περίπτωση (πεπερ. EI, GA_s , EA)

► Λόγω q και n :

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω διαγράμματα των φορτίων διατομής λόγω q και n , αφενός και λόγω $P_{x2}=1^v$ αφετέρου, παίρνουμε βάσει της ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) και με τη βοήθεια του Πίνακα 0 του Παραρτήματος:

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_1^2 (M^v \cdot \underline{M}) dx + \int_2^3 (M^v \cdot \underline{M}) dx \right] \\
 &+ \frac{1}{GA_s} \cdot \left[\int_1^2 (Q^v \cdot \underline{Q}) dx + \int_2^3 (Q^v \cdot \underline{Q}) dx \right] \\
 &+ \frac{1}{EA} \cdot \left[\int_1^2 (N^v \cdot \underline{N}) dx + \int_2^3 (N^v \cdot \underline{N}) dx \right]
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 u_2 &= \frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \left[\begin{array}{c} \text{4}^v \oplus \\ \text{45} \oplus \\ \text{6.00} \end{array} \right] \\
 &+ \frac{1}{2 \cdot 10^6} \cdot \left[\begin{array}{c} \ominus \\ \text{30} \oplus \\ \text{6.00} \end{array} \right] \\
 &+ \frac{1}{5 \cdot 10^6} \cdot \left[\begin{array}{c} \text{2/3}^v \oplus \\ \text{30} \oplus \\ \text{4.00} \\ \text{30} \ominus \\ \text{50} \ominus \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 6.0 \cdot 4 \cdot 45 \right] + \frac{1}{2 \cdot 10^6} \cdot [0] + \frac{1}{5 \cdot 10^6} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 4.0 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-30 - 50) \right]$$

$$= 2.4 \cdot 10^{-3} + 0 + (-0.02133 \cdot 10^{-3})$$

$$= 2.379 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Παρατηρήσεις:

- Η πραγματική και δυνατή ολοκλήρωση αφορά μόνο στα δομικά στοιχεία για τα οποία το εκάστοτε φορτίο διατομής είναι μη μηδενικό για αμφότερες τις θεωρούμενες φορτίσεις.
- Οι αντιδράσεις στήριξης δεν υπεισέρχονται στον υπολογισμό της u_2 , διότι οι στηρίξεις είναι ακλόνητες.
- Στη συγκεκριμένη περίπτωση η συνεισφορά των διατμητικών παραμορφώσεων είναι μηδενική.
- Η συνεισφορά των αξονικών παραμορφώσεων είναι μικρή σε σχέση με εκείνη των καμπτικών παραμορφώσεων.

B. Άτμητος και ατενής φορέας ($EI = \text{πεπερ.}$, $GA_S \rightarrow \infty$, $EA \rightarrow \infty$)

► B1) Λόγω q και n :

Στην περίπτωση του άτμητου και ατενούς φορέα μηδενίζονται όλες οι τυχόν συνεισφορές από διατμητικές και αξονικές παραμορφώσεις, δηλαδή τα δυνατά έργα τεμνουσών και αξονικών δυνάμεων είναι εξ ορισμού μηδενικά. Συνεπώς, σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς παίρνουμε:

$$u_2 = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Η τιμή αυτή είναι κατά $[(2.4 - 2.379) / 2.379] \cdot 100\% = 0.9\%$ μεγαλύτερη έναντι της τιμής της u_2 στην γενική περίπτωση πεπερασμένων ελαστικών ιδιοτήτων.

► B2) Λόγω q και n , αν η στήριξη 1 είναι κατακόρυφως ενδόσιμη ελαστικά:

Στην περίπτωση αυτή παράγεται πρόσθετο συμπληρωματικό δυνατό έργο από τη δυνατή αντίδραση στήριξης $A_{Z1}^V = -(2/3)^V$ στην κατακόρυφη πραγματική μετατόπιση:

$$w_{Z1} = A_{Z1} / c_N = 50 \text{ kN} / (10^4 \text{ kN/m}) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Σύμφωνα με την ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) παίρνουμε:

$$u_2 = 2.4 \cdot 10^{-3} + A_{Z1}^V \cdot (A_{Z1} / c_N) = 2.4 \cdot 10^{-3} + (-2/3)^V \cdot (50 / 10^4)$$

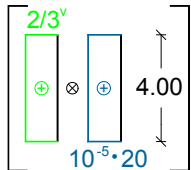
$$= 2.4 \cdot 10^{-3} - 3.33 \cdot 10^{-3} = -9.33 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Παρατηρήσεις:

- Η ενδοσιμότητα της στήριξης 1 επηρεάζει στη συγκεκριμένη περίπτωση σημαντικά την τιμή της οριζόντιας μετατόπισης, έχουμε δηλαδή αλλαγή προσήμου.
- Στην έκφραση των συμπληρωματικών δυνατών έργων χρησιμοποιήθηκε ο όρος $A_{Z1}^V \cdot (A_{Z1} / c_N)$ αντί του όρου $N_{EZ1}^V \cdot (N_{EZ1} / c_N)$, αφού λόγω $N_{EZ} = -A_Z$ μας δίνει ακριβώς την ίδια τιμή.

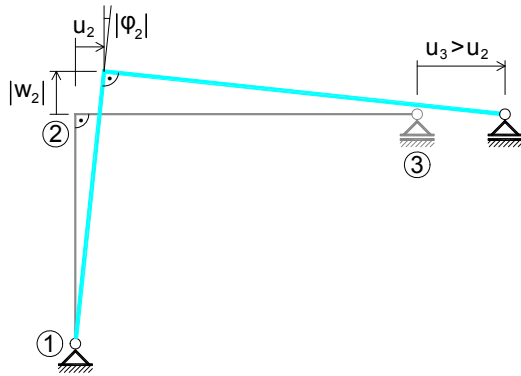
► B3) Λόγω ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t :

Στην περίπτωση αυτή συμπληρωματικό δυνατό έργο παράγει η δυνατή αξονική δύναμη $N^V(x)$ επί των πραγματικών αξονικών παραμορφώσεων $\epsilon_i(x) = \alpha_t \cdot t = 10^{-5} \cdot 20^\circ\text{C}$. Σύμφωνα με την ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) και με τη βοήθεια του Πίνακα 0 του Παραρτήματος παίρνουμε:

$$u_2 = \int_1^2 [N^V(x) \cdot \alpha_t \cdot t] dx + \int_2^3 \underbrace{[N^V(x) \cdot \alpha_t \cdot t]}_{=0} dx =$$


$$= 4.00 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^{-5} \cdot 20 = 0.53 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Λόγω της ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t – όπως και λόγω οποιουδήποτε άλλου καταναγκασμού – ο ισοστατικός φορέας παραμένει άτονος. Συνεπώς, εκτός από τις αξονικές παραμορφώσεις (εδώ επιμηκύνσεις λόγω $t > 0^\circ\text{C}$) τα δομικά στοιχεία δεν εμφανίζουν άλλες παραμορφώσεις και η παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται ο φορέας έχει την εξής μορφή:



Παραμορφωμένη κατάσταση λόγω t

Βιντεοπαρουσίαση αυτής της άσκησης στο YouTube:

https://youtu.be/6hb2dg_1FMk

Ο αναγνώστης καλείται να απαντήσει στις εξής απλές ερωτήσεις:

- Γιατί ο κόμβος 2 μετατοπίζεται προς τα επάνω;
- Γιατί η μετατόπιση u_3 είναι μεγαλύτερη από την u_2 ;
- Γιατί ο κόμβος 2 εμφανίζει αρνητική (δεξιόστροφη) στροφή;

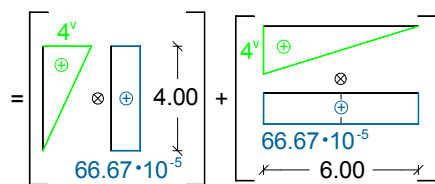
► B4) Λόγω ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης Δt :

Στην περίπτωση αυτή συμπληρωματικό δυνατό έργο παράγει η δυνατή ροπή κάμψης $M^V(x)$ επί των πραγματικών καμπυλοτήτων

$$\kappa_t(x) = \alpha_t \cdot (\Delta t / h) = 10^{-5} \cdot (40 / 0.6) = 66.67 \cdot 10^{-5}$$

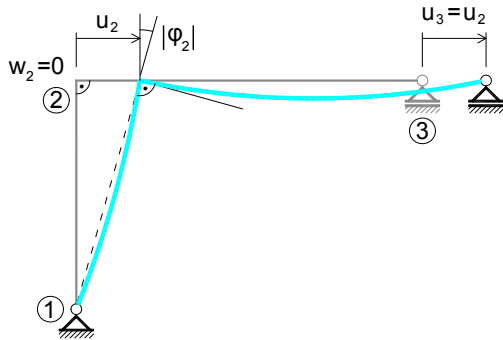
Σύμφωνα με την ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) και με τη βοήθεια του Πίνακα 0 του Παραρτήματος παίρνουμε:

$$u_2 = \int_1^2 \left(M^V(x) \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \right) dx + \int_2^3 \left(M^V(x) \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \right) dx$$



$$= \frac{1}{2} \cdot 4.00 \cdot 4 \cdot 66.67 \cdot 10^{-5} + \frac{1}{2} \cdot 6.00 \cdot 4 \cdot 66.67 \cdot 10^{-5} = 13.33 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Λόγω της ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης Δt – όπως και λόγω οποιουδήποτε άλλου καταναγκασμού – ο ισοστατικός φορέας παραμένει άτονος. Συνεπώς, εκτός από τις θετικές καμπυλότητες (λόγω $\Delta t > 0^\circ\text{C}$) τα δομικά στοιχεία δεν εμφανίζουν άλλες παραμορφώσεις και η παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται ο φορέας έχει την εξής μορφή:



Παραμορφωμένη κατάσταση λόγω Δt

Βιντεοπαρουσίαση αυτής της άσκησης στο YouTube:

https://youtu.be/BW_Ev0WaiG0

Ο αναγνώστης καλείται να απαντήσει στις εξής απλές ερωτήσεις:

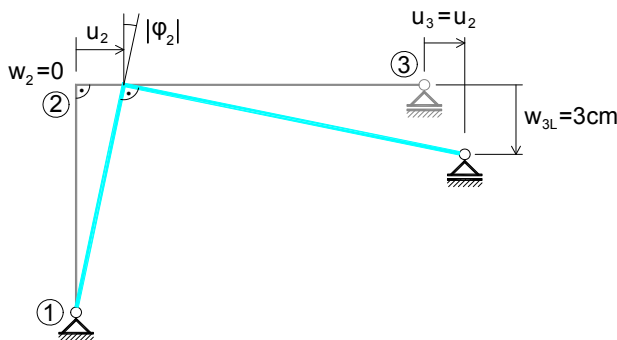
- Γιατί ο κόμβος 2 δεν μετατοπίζεται κατακορύφως;
- Γιατί η οριζόντια μετατόπιση u_2 είναι ίση με την u_3 ;
- Γιατί ο κόμβος 2 εμφανίζει αρνητική δεξιόστροφη στροφή;

► B5) Λόγω της καταναγκασμένης βύθισης w_{3L} της στήριξης 3:

Στην περίπτωση αυτή συμπληρωματικό δυνατό έργο παράγει η δυνατή αντίδραση στήριξης A_{Z3}^V επί της πραγματικής καταναγκασμένης βύθισης $w_{3L}=3\text{cm}$. Σύμφωνα με την ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) παίρνουμε:

$$u_2 = A_{Z3}^V \cdot w_{3L} = \left(\frac{2}{3}\right)^V \cdot 0.03 = 0.02\text{m} = 20\text{mm}$$

Λόγω της καταναγκασμένης βύθισης w_{3L} – όπως και λόγω οποιουδήποτε άλλου καταναγκασμού – ο ισοστατικός φορέας παραμένει άτονος. Συνεπώς, τα δομικά του στοιχεία παραμένουν παντελώς απαραμόρφωτα και η παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέχεται ο φορέας έχει την εξής μορφή:



Παραμορφωμένη κατάσταση λόγω w_{3L}

Ο αναγνώστης καλείται να απαντήσει στις εξής απλές ερωτήσεις:

- Γιατί ο κόμβος 2 δεν μετατοπίζεται κατακορύφως;
- Γιατί η οριζόντια μετατόπιση u_2 είναι ίση με την u_3 ;
- Γιατί ο κόμβος 2 εμφανίζει αρνητική (δεξιόστροφη) στροφή;

II. Υπολογισμός της w_2

A. Γενική περίπτωση (πεπερ. EI, GA_s , EA)

► Λόγω q και n:

Χρησιμοποιώντας τα γνωστά διαγράμματα των φορτίων διατομής λόγω q και n, και λόγω $P_{Z2}=1^V$ παίρνουμε βάσει της ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) και με τη βοήθεια του Πίνακα 0 του Παραρτήματος:

$$w_2 = \frac{1}{EI} \left[\int_1^2 (\underline{M}^v \cdot \underline{M}) dx + \int_2^3 (\underline{M}^v \cdot \underline{M}) dx \right] + \frac{1}{GA_s} \left[\int_1^2 (\underline{Q}^v \cdot \underline{Q}) dx + \int_2^3 (\underline{Q}^v \cdot \underline{Q}) dx \right] +$$

$$+ \frac{1}{EA} \left[\int_1^2 (\underline{N}^v \cdot \underline{N}) dx + \int_2^3 (\underline{N}^v \cdot \underline{N}) dx \right] = \frac{1}{EA} \int_1^2 (\underline{N}^v \cdot \underline{N}) dx =$$

$$= \frac{1}{5 \cdot 10^6} \left[\begin{array}{c} -1^v \\ \text{⊗} \\ \text{⊗} \\ 4.00 \end{array} \otimes \begin{array}{c} -30 \\ \text{⊗} \\ \text{⊗} \\ -50 \\ 4.00 \end{array} \right] = 0.2 \cdot 10^{-6} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 4.00 \cdot (-1) \cdot (-30 - 50) \right] =$$

$$= 3.2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Παρατήρηση:

Η βύθιση w_2 του κόμβου 2 επηρεάζεται αποκλειστικά από την δυστένεια EA.

B. Ατμητος και ατενής φορέας ($EI = πεπερ.$, $GA_s \rightarrow \infty$, $EA \rightarrow \infty$)

► B1) Λόγω q και n:

Στην περίπτωση αυτή ισχύει σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση:

$$w_2 = 0$$

► B2) Λόγω q και n, αν η στήριξη 1 είναι κατακόρυφως ενδόσιμη ελαστικά:

Στην περίπτωση αυτή πρέπει να ληφθεί υπόψη το πρόσθετο συμπληρωματικό δυνατό έργο που παράγεται από τη δυνατή αντίδραση A_{z1}^v στην κατακόρυφη πραγματική μετατόπιση:

$$w_{z1} = A_{z1} / c_N = 50 \text{ kN} / (10^4 \text{ kN/m}) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$w_2 = 0 + A_{z1}^v \cdot (A_{z1} / c_N) = 1^v \cdot (50 / 10^4) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

► B3) Λόγω ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t:

$$w_2 = \int_1^2 [\underline{N}^v(x) \cdot \alpha_t \cdot t] dx + \int_2^3 [\underline{N}^v(x) \cdot \alpha_t \cdot t] dx = \left[\begin{array}{c} -1^v \\ \text{⊗} \\ \text{⊗} \\ 4.00 \\ 10^{-5} \cdot 20 \end{array} \right] =$$

$$= 4.00 \cdot (-1) \cdot 10^{-5} \cdot 20 = -0.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Παραμορφωμένη κατάσταση: βλ. προηγηθέν σχήμα.

► B4) Λόγω ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης Δt :

$$w_2 = \int_1^2 \left(\underline{M}^v(x) \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \right) dx + \int_2^3 \left(\underline{M}^v(x) \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \right) dx = 0$$

Παρατηρούμε ότι η ανομοιόμορφη θερμοκρασιακή φόρτιση Δt δεν επηρεάζει την βύθιση του κόμβου 2: $w_2 = 0$.

Παραμορφωμένη κατάσταση: βλ. προηγηθέν σχήμα.

► B5) Λόγω της καταναγκασμένης βύθισης w_{3L} της στήριξης 3:

$$w_2 = A_{z3}^v \cdot w_{3L} = 0 \cdot 0.03 = 0$$

Παραμορφωμένη κατάσταση: βλ. προηγηθέν σχήμα.

III. Υπολογισμός της φ_2

A. Γενική περίπτωση (πεπερ. EI, GA_S, EA)

► Λόγω q και n:

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω διαγράμματα των φορτίων διατομής λόγω q και n (Σχ. 1) και λόγω M_{L2}=1^v (Σχ. 4) παίρνουμε βάσει της ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) και με τη βοήθεια του Πίνακα 0 του Παραρτήματος:

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_1^2 (\underline{M}^v \cdot \underline{M}) dx + \int_2^3 (\underline{M}^v \cdot \underline{M}) dx \right] + \frac{1}{GA_S} \cdot \left[\int_1^2 (\underline{Q}^v \cdot \underline{Q}) dx + \int_2^3 (\underline{Q}^v \cdot \underline{Q}) dx \right] + \frac{1}{EA} \cdot \left[\int_1^2 (\underline{N}^v \cdot \underline{N}) dx + \int_2^3 (\underline{N}^v \cdot \underline{N}) dx \right]$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \left[\begin{array}{c} \text{Διάγραμμα 1: } \int_1^2 (-1^v \cdot 45) dx \\ \text{Διάγραμμα 2: } \int_2^3 (1/6^v \cdot -30) dx \\ \text{Διάγραμμα 3: } \int_1^2 (-1/6^v \cdot -50) dx \end{array} \right] + \frac{1}{2 \cdot 10^6} \cdot [0] + \frac{1}{5 \cdot 10^6} \cdot \left[\begin{array}{c} \text{Διάγραμμα 4: } \int_1^2 (-1/6^v \cdot -50) dx \\ \text{Διάγραμμα 5: } \int_2^3 (-30 \cdot -50) dx \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (-1) \cdot 45 \right] + \frac{1}{2 \cdot 10^6} \cdot [0] + \frac{1}{5 \cdot 10^6} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^v \cdot (-30 - 50) \right]$$

$$= -0.6 \cdot 10^{-3} + 0 + (5.333 \cdot 10^{-6})$$

$$= -0.59466 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

B. Άτμητος και ατελής φορέας (EI=πεπερ., GA_S→∞, EA→∞)

► B1) Λόγω q και n:

Μηδενίζοντας στον προηγούμενο υπολογισμό της φ_2 τη συνεισφορά των αξονικών παραμορφώσεων παίρνουμε (Σημ.: Η συνεισφορά των διατμητικών παραμορφώσεων ήταν ούτως ή άλλως μηδενική):

$$\varphi_2 = -0.6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

► B2) Λόγω q και n, αν η στήριξη 1 είναι κατακόρυφως ενδόσιμη ελαστικά:

Στην περίπτωση αυτή πρέπει να ληφθεί υπόψη το πρόσθετο συμπληρωματικό δυνατό έργο που παράγεται από τη δυνατή αντίδραση A_{Z1}^v=(1/6)^v στην κατακόρυφη πραγματική μετατόπιση:

$$w_{z1} = A_{z1}/c_N = 50 \text{ kN} / (10^4 \text{ kN/m}) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$\varphi_2 = -0.6 \cdot 10^{-3} + A_{z1}^v \cdot (A_{z1}/c_N) = -0.6 \cdot 10^{-3} + (1/6)^v \cdot (50/10^4) = 2.33 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

► B3) Λόγω ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t:

$$\varphi_2 = \int_1^2 [N^v(x) \cdot \alpha_t \cdot t] dx + \int_2^3 [N^v(x) \cdot \alpha_t \cdot t] dx = \left[\begin{array}{c} \text{Διάγραμμα 6: } \int_1^2 (-1/6^v \cdot 10^{-5} \cdot 20) dx \\ \text{Διάγραμμα 7: } \int_2^3 (-30 \cdot 10^{-5} \cdot 20) dx \end{array} \right] =$$

$$= 4.00 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 10^{-5} \cdot 20 = -0.133 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Παραμορφωμένη κατάσταση: βλ. προηγηθέν σχήμα.

- B4) Λόγω ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης Δt :

$$\varphi_2 = \int_1^2 \left(\underbrace{M^v(x)}_{=0} \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \right) dx + \int_2^3 \left(M^v(x) \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \right) dx$$

$= \frac{1}{2} \cdot 6.00 \cdot (-1)^v \cdot 66.67 \cdot 10^{-5} = -2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

Παραμορφωμένη κατάσταση: βλ. προηγηθέν σχήμα.

- B5) Λόγω της καταναγκασμένης βύθισης w_{3L} της στήριξης 3:

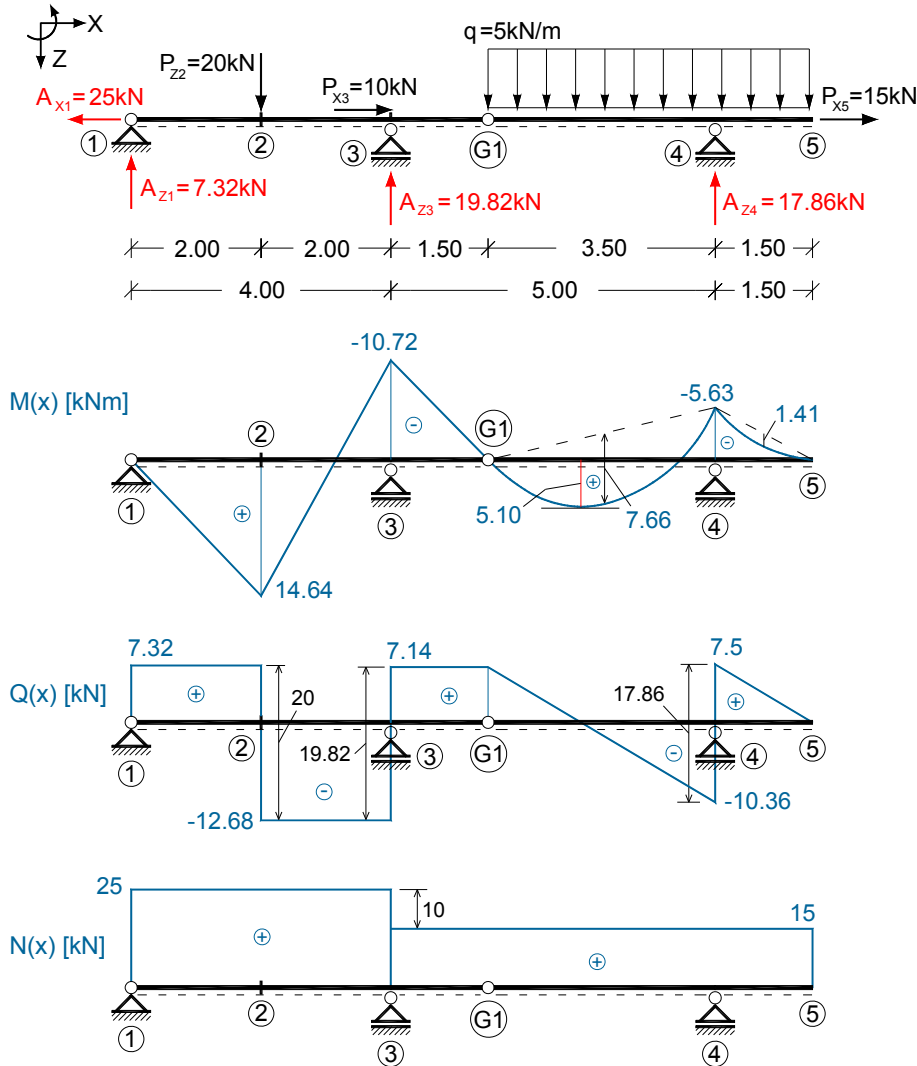
$$\varphi_2 = A_{Z3}^v \cdot w_{3L} = \left(-\frac{1}{6}\right)^v \cdot 0.03 = -5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Παραμορφωμένη κατάσταση: προηγηθέν σχήμα.

Άσκηση Ι2

Για τον υπολογισμό των ζητούμενων μετακινήσεων εφαρμόζεται η αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων (ΑΣΔΕ, βλ. π.χ. [2], παράγρ. 3.6.5 και 9.4).

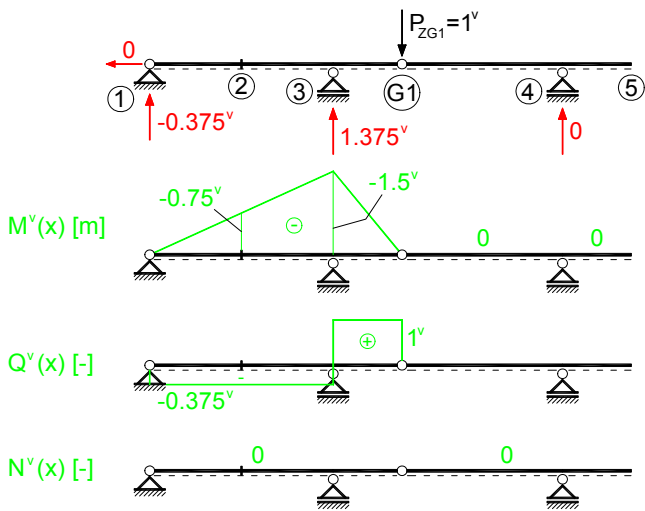
(1) Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του φορέα υπό τη δεδομένη φόρτιση Έχουν ήδη υπολογιστεί στην Άσκηση Η4/1 και παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα:



Αντιδράσεις στήριξης και φορτία διατομής λόγω των δεδομένων εξωτερικών φορτίων

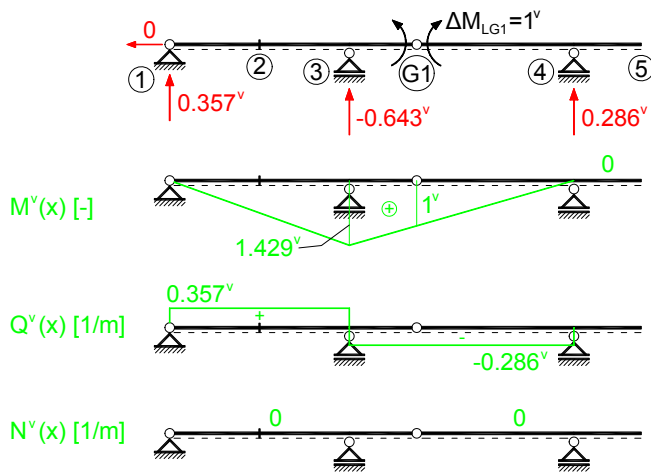
(2) Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του φορέα υπό την κατάλληλη μοναδιαία δυνατή φόρτιση

I. Μοναδιαίο δυνατό φορτίο $P_{zG1} = 1^V$ για τον υπολογισμό της w_{G1}



Αντιδράσεις στήριξης και φορτία διατομής λόγω $P_{ZG1}=1^v$

II. Μοναδιαία δυνατή φόρτιση $\Delta M_{LG1}=1^v$ για τον υπολογισμό της $\Delta \varphi_{G1}$



Αντιδράσεις στήριξης και φορτία διατομής λόγω $\Delta M_{LG1}=1^v$

Ο υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής για τις δύο παραπάνω δυνατές φορτίσεις γίνεται, κατά τα γνωστά, με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας και τη μέθοδο των κυκλικών διαχωριστικών τομών.

(3) Άθροιση όλων των παραγόμενων συμπληρωματικών δυνατών έργων, εξίσωσή τους με το μηδέν και επίλυση ως προς τη ζητούμενη μετακίνηση

I. Υπολογισμός της w_{G1}

A. Γενική περίπτωση (πεπερ. EI, GA_s , EA)

► Λόγω P και q:

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω διαγράμματα των φορτίων διατομής λόγω P και q (Σχ. 1) και λόγω $P_{ZG1}=1^v$ (Σχ. 2) παίρνουμε βάσει της ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) και με τη βοήθεια του Πίνακα 0 του Παραρτήματος:

$$w_{G1} = \int M^v \cdot \frac{M}{EI} dx + \int Q^v \cdot \frac{Q}{GA_s} dx + \int \underset{=0}{N^v} \cdot \frac{N}{EA} dx$$

Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι η αξονική δύναμη $N^v(x)$ είναι παντού μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι οι

αξονικές παραμορφώσεις της δοκού δεν επηρεάζουν την τιμή της ζητούμενης μετατόπισης w_{G1} . Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ροπές $M^V(x)$ και οι τέμνουσες $Q^V(x)$ είναι μηδενικές στο τμήμα G1-5 της δοκού. Αυτό σημαίνει ότι οι παραμορφώσεις του τμήματος G1-4-5 της δοκού δεν επηρεάζουν καθόλου την τιμή της w_{G1} . Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ολοκλήρωση αφορά μόνο ροπές και τέμνουσες των τμημάτων 1-3 και 3-G1:

$$w_{G1} = \frac{1}{EI_a} \cdot \int_1^{G1} (M^V \cdot M) dx + \frac{1}{GA_{Sa}} \cdot \int_1^{G1} (Q^V \cdot Q) dx$$

$$= \frac{1}{EI_a} \left\{ \left[\begin{array}{c} \text{Triangular } M^V \text{ (0 to } -1.5^v) \\ \text{Triangular } M \text{ (0 to } -10.72) \\ \text{Area } 20 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Triangular } M^V \text{ (0 to } -1.5^v) \\ \text{Triangular } M \text{ (0 to } -10.72) \\ \text{Area } 1.50 \end{array} \right] \right\} + \frac{1}{GA_{Sa}} \left\{ \left[\begin{array}{c} \text{Constant } Q^V \text{ (-0.375^v)} \\ \text{Constant } Q \text{ (7.32)} \\ \text{Area } 2.00 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Constant } Q^V \text{ (-0.375^v)} \\ \text{Constant } Q \text{ (-12.68)} \\ \text{Area } 2.00 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Constant } Q^V \text{ (1^v)} \\ \text{Constant } Q \text{ (7.14)} \\ \text{Area } 1.50 \end{array} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{EI_a} \left\{ \left[\begin{array}{c} \text{Triangular } M^V \text{ (0 to } -1.5^v) \\ \text{Triangular } M \text{ (0 to } -10.72) \\ \text{Area } 4.00 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Triangular } M^V \text{ (0 to } -1.5^v) \\ \text{Triangular } M \text{ (0 to } -10.72) \\ \text{Area } 2.00 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Triangular } M^V \text{ (0 to } -1.5^v) \\ \text{Triangular } M \text{ (0 to } -10.72) \\ \text{Area } 1.50 \end{array} \right] \right\} + \frac{1}{GA_{Sa}} \left\{ \left[\begin{array}{c} \text{Constant } Q^V \text{ (-0.375^v)} \\ \text{Constant } Q \text{ (7.32)} \\ \text{Area } 2.00 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Constant } Q^V \text{ (-0.375^v)} \\ \text{Constant } Q \text{ (-12.68)} \\ \text{Area } 2.00 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Constant } Q^V \text{ (1^v)} \\ \text{Constant } Q \text{ (7.14)} \\ \text{Area } 1.50 \end{array} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 4.0 \cdot (-1.5) \cdot (-10.72) + \frac{1}{6} \cdot 4.0 \cdot (-1.5) \cdot (1+0.5) \cdot 20 + \frac{1}{3} \cdot 1.5 \cdot (-1.5) \cdot (-10.72) \right]$$

$$+ \frac{1}{2.0 \cdot 10^6} \cdot \left[2.0 \cdot (-0.375) \cdot (7.32) + 2.0 \cdot (-0.375) \cdot (-12.68) + 1.5 \cdot 1 \cdot (7.14) \right]$$

$$= \frac{-0.52}{1.5 \cdot 10^5} + \frac{14.73}{2.0 \cdot 10^6} = -0.35 \cdot 10^{-5} + 0.736 \cdot 10^{-5} = 0.39 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Παρατηρήσεις:

- Η βύθιση w_{G1} είναι πρακτικά μηδενική: $w_{G1} = 0.39 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0.0039 \text{ mm}$.
- Η συνεισφορά των διατμητικών παραμορφώσεων ($0.736 \cdot 10^{-5}$) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τη συνεισφορά των καμπτικών παραμορφώσεων ($-0.35 \cdot 10^{-5}$).
- Οι αντιδράσεις στήριξης δεν υπεισέρχονται στον υπολογισμό της w_{G1} , διότι οι στηρίξεις είναι ακλόνητες.

B. Άτμητος και ατενής φορέας ($EI = \text{πεπερ.}, GA_S \rightarrow \infty, EA \rightarrow \infty$)

► B1) Λόγω P και q:

Στην περίπτωση του άτμητου και ατενούς φορέα μηδενίζονται όλες οι τυχόν συνεισφορές από διατμητικές και αξονικές παραμορφώσεις, δηλαδή τα δυνατά έργα τεμνουσών και αξονικών

δυνάμεων είναι εξ ορισμού μηδενικά. Συνεπώς, σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς παίρνουμε:

$$w_{G1} = -0.35 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Παρατηρούμε ότι υπό τη δεδομένη φόρτιση η άρθρωση G1 μετατοπίζεται προς τα επάνω.

- B2) Λόγω P και q, αν η στήριξη 1 είναι κατακόρυφως ενδόσιμη ελαστικά:

Στην περίπτωση αυτή παράγεται πρόσθετο συμπληρωματικό δυνατό έργο από τη δυνατή αντίδραση στήριξης $A_{Z1}^V = -0.375^V$ στην κατακόρυφη πραγματική μετατόπιση:

$$w_{Z1} = A_{Z1} / c_N = 7.32 \text{ kN} / (10^4 \text{ kN/m}) = 7.32 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Βάσει της ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} w_{G1} &= -0.35 \cdot 10^{-5} + A_{Z1}^V \cdot (A_{Z1} / c_N) = -0.35 \cdot 10^{-5} + (-0.375)^V \cdot (7.32 \cdot 10^{-4}) \\ &= -0.035 \cdot 10^{-4} - 2.745 \cdot 10^{-4} = -2.78 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η ελαστική έδραση του κόμβου 1 οδηγεί υπό τη δεδομένη φόρτιση σε περαιτέρω ανύψωση (κατά $2.78 \cdot 10^{-4} - 0.35 \cdot 10^{-5} = 2.745 \cdot 10^{-4} \text{ m}$) της άρθρωσης G1. Η περαιτέρω αυτή μετατόπιση είναι κατά μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από την ανύψωση λόγω κάμψης της δοκού ($0.35 \cdot 10^{-5} \text{ m}$). Τέλος, επισημαίνεται ότι στην έκφραση των συμπληρωματικών δυνατών έργων χρησιμοποιήθηκε ο όρος $A_{Z1}^V \cdot (A_{Z1} / c_N)$ αντί του όρου $N_{EZ1}^V \cdot (N_{EZ1} / c_N)$, αφού λόγω $N_{EZ} = -A_Z$ μας δίνει ακριβώς την ίδια τιμή.

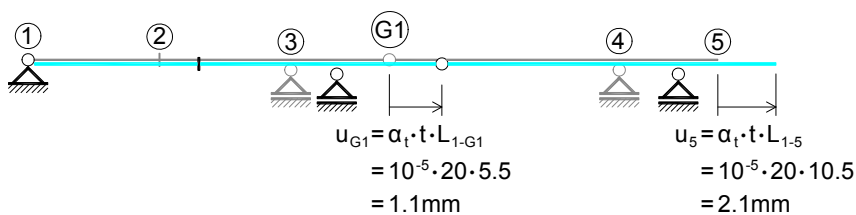
- B3) Λόγω ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t:

Στην περίπτωση αυτή συμπληρωματικό δυνατό έργο παράγει η δυνατή αξονική δύναμη $N^V(x)$ επί των πραγματικών αξονικών παραμορφώσεων $\epsilon_t(x) = \alpha_t \cdot t = 10^{-5} \cdot 20^\circ\text{C}$. Επειδή, όμως, η $N^V(x)$ είναι μηδενική σε όλον το φορέα παίρνουμε:

$$w_{G1} = 0$$

δηλαδή η αυξομείωση της θερμοκρασίας t δεν προκαλεί κατακόρυφη μετατόπιση στο σημείο G1, ούτε σε κανένα άλλο σημείο της αρθρωτής δοκού.

Λόγω της ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t – όπως και λόγω οποιουδήποτε άλλου καταναγκασμού – η ισοστατική αρθρωτή δοκός παραμένει άτονη. Συνεπώς, εκτός από τις αξονικές παραμορφώσεις - επιμηκύνσεις λόγω $t > 0^\circ\text{C}$, τα διάφορα τμήματα της δεν εμφανίζουν άλλες παραμορφώσεις και η παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται η δοκός είναι η εξής:



Παραμορφωμένη κατάσταση λόγω t

- B4) Λόγω ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης Δt:

Στην περίπτωση αυτή συμπληρωματικό δυνατό έργο παράγει η δυνατή ροπή κάμψης $M^V(x)$ επί των πραγματικών καμπυλοτήτων

$$\kappa_{1a}(x) = \alpha_t \cdot (\Delta t / h_a) = 10^{-5} \cdot (40 / 0.6) = 66.67 \cdot 10^{-5} \text{ στο τμήμα 1-G1 και}$$

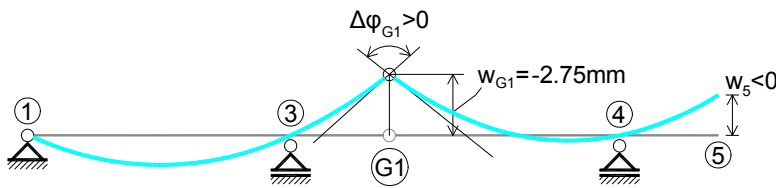
$$\kappa_{1b}(x) = \alpha_t \cdot (\Delta t / h_b) = 10^{-5} \cdot (40 / 0.5) = 80 \cdot 10^{-5} \text{ στο τμήμα G1-5.}$$

Επειδή, όμως, η $M^V(x)$ είναι μηδενική στο τμήμα G1-5 (Σχ. 2), περιοριζόμαστε στο τμήμα 1-G1 και με τη βοήθεια του Πίνακα 0 του Παραρτήματος παίρνουμε:

$$w_{G1} = \int_1^{G1} \left(M^V(x) \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h_a} \right) dx = \int_1^3 \left(M^V(x) \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h_a} \right) dx + \int_3^{G1} \left(M^V(x) \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h_a} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\begin{array}{c} \text{Τριγωνική φόρτιση } -1.5^{\vee} \\ \text{Μέση τιμή } 66.67 \cdot 10^{-5} \\ \text{Πλάτος } 4.00 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Τριγωνική φόρτιση } -1.5^{\vee} \\ \text{Μέση τιμή } 66.67 \cdot 10^{-5} \\ \text{Πλάτος } 1.5 \end{array} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 4.00 \cdot (-1.5) \cdot 66.67 \cdot 10^{-5} + \frac{1}{2} \cdot 1.50 \cdot (-1.5) \cdot 66.67 \cdot 10^{-5} = \\
 &= -2.00 \cdot 10^{-3} - 7.50 \cdot 10^{-4} = -2.75 \cdot 10^{-3} = -2.75\text{mm}
 \end{aligned}$$

Λόγω της ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης Δt – όπως και λόγω οποιουδήποτε άλλου καταναγκασμού – ο ισοστατικός φορέας παραμένει άτονος. Συνεπώς, εκτός από τις θετικές καμπυλότητες, λόγω $\Delta t > 0^{\circ}\text{C}$, τα δομικά στοιχεία δεν εμφανίζουν άλλες παραμορφώσεις και η παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται ο φορέας έχει την εξής μορφή:



Παραμορφωμένη κατάσταση λόγω Δt

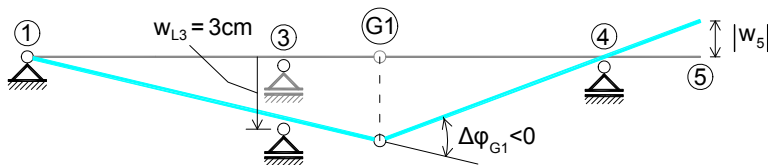
Μικρή άσκηση: (α) Εξηγήστε με εποπτικό τρόπο, γιατί το σημείο G1 μετατοπίζεται προς τα πάνω, και (β) τεκμηριώστε υπολογιστικά ότι το σημείο 5 μετατοπίζεται επίσης προς τα επάνω.

- B5) Λόγω της καταναγκασμένης βύθισης w_{3L} της στήριξης 3:

Στην περίπτωση αυτή συμπληρωματικό δυνατό έργο παράγει η δυνατή αντίδραση στήριξης A_{Z3}^{\vee} επί της πραγματικής καταναγκασμένης βύθισης $w_{3L}=3\text{cm}$. Βάσει της ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) παίρνουμε:

$$w_{G1} = A_{Z3}^{\vee} \cdot w_{3L} = 1.375^{\vee} \cdot 0.03 = 0.041\text{m} = 41\text{mm}$$

Λόγω της καταναγκασμένης βύθισης w_{3L} – όπως και λόγω οποιουδήποτε άλλου καταναγκασμού – ο ισοστατικός φορέας παραμένει άτονος. Συνεπώς, τα δομικά του στοιχεία παραμένουν παντελώς απαραμόρφωτα και η παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται ο φορέας έχει την εξής μορφή:



Παραμορφωμένη κατάσταση λόγω w_{3L}

Ερώτηση: Σε ποια παραδοχή οφείλεται το γεγονός ότι ο κόμβος 5, καθώς και όλοι οι άλλοι κόμβοι της δοκού, εμφανίζουν μηδενική οριζόντια μετατόπιση;

II. Υπολογισμός της διαφοράς στροφών $\Delta\varphi_{G1}$ στην άρθρωση G1

- A. Γενική περίπτωση (πεπερ. EI, GA_s , EA)

- Λόγω P και q:

Χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα των φορτίων διατομής λόγω των δεδομένων εξωτερικών φορτίων (Σχ. 1) και λόγω $M_{LG1}=1^{\vee}$ (Σχ. 3) παίρνουμε βάσει της ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) και με τη βοήθεια του Πίνακα 0 του Παραρτήματος:

$$\Delta\varphi_{G1} = \int M^V \cdot \frac{M}{EI} dx + \int Q^V \cdot \frac{Q}{GA_s} dx + \int_{=0} N^V \cdot \frac{N}{EA} dx$$

Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι η αξονική δύναμη $N^V(x)$ είναι παντού μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι οι αξονικές παραμορφώσεις της δοκού δεν επηρεάζουν την τιμή της ζητούμενης διαφοράς στροφών $\Delta\varphi_{G1}$. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ροπές $M^V(x)$ και οι τέμνουσες $Q^V(x)$ είναι μηδενικές στο τμήμα 4-5 της δοκού. Αυτό σημαίνει ότι οι παραμορφώσεις του τμήματος 4-5 της δοκού δεν επηρεάζουν καθόλου την τιμή της $\Delta\varphi_{G1}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ολοκλήρωση αφορά μόνο ροπές και τέμνουσες των τμημάτων 1-3, 3-G1 και G1-4:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{G1} &= \frac{1}{EI_a} \cdot \left(\int_1^3 (M^V \cdot M) dx + \int_3^{G1} (M^V \cdot M) dx \right) + \frac{1}{EI_b} \cdot \int_{G1}^4 (M^V \cdot M) dx \\ &+ \frac{1}{GA_{Sa}} \cdot \left(\int_1^3 (Q^V \cdot Q) dx + \int_3^{G1} (Q^V \cdot Q) dx \right) + \frac{1}{GA_{Sb}} \cdot \int_{G1}^4 (Q^V \cdot Q) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{EI_a} \cdot \left[\left(\int_1^3 (M^V \cdot M) dx + \int_3^{G1} (M^V \cdot M) dx \right) + \int_{G1}^4 (M^V \cdot M) dx \right] \\ &+ \frac{1}{GA_{Sa}} \cdot \left[\left(\int_1^3 (Q^V \cdot Q) dx + \int_3^{G1} (Q^V \cdot Q) dx \right) + \int_{G1}^4 (Q^V \cdot Q) dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \left[\underbrace{\left(\frac{1}{3} \right) \cdot 4.0 \cdot 1.429 \cdot (-10.72)}_{-20.425} + \underbrace{\left(\frac{1}{6} \right) \cdot 4.0 \cdot 1.429 \cdot 20 \cdot (1+0.5)}_{+28.58} \right] \\ &+ \underbrace{\left(\frac{1}{6} \right) \cdot 1.50 \cdot (-10.72) \cdot (2 \cdot 1.429 + 1)}_{-10.34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{0.8 \cdot 10^5} \cdot \left[\underbrace{\left(\frac{1}{6} \right) \cdot 3.50 \cdot 1 \cdot (-5.63)}_{-3.284} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} \right) \cdot 3.50 \cdot 1 \cdot 7.66}_{8.937} \right] \\ &+ \frac{1}{2 \cdot 10^6} \cdot \left[\underbrace{2 \cdot 0.357 \cdot 7.32}_{5.226} + \underbrace{2 \cdot 0.357 \cdot (-12.68)}_{-9.053} + \underbrace{1.5 \cdot (-0.286) \cdot 7.14}_{-3.063} \right] \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 10^6} \cdot \left[\underbrace{3.5 \cdot (-0.286) \cdot 7.14}_{-7.147} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} \right) \cdot 3.5 \cdot (-0.286) \cdot (-7.14 - 10.36)}_{8.759} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot (-2.1844) + \frac{1}{0.8 \cdot 10^5} \cdot 5.653 + \frac{1}{2 \cdot 10^6} \cdot (-6.89) + \frac{1}{1 \cdot 10^6} \cdot 1.612 \\ &= \underbrace{5.61 \cdot 10^{-5}}_{\text{από κάμψη}} - \underbrace{0.1833 \cdot 10^{-5}}_{\text{από διάτμηση}} = 5.426 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \end{aligned}$$

Παρατήρηση:

- Η συνεισφορά των διατμητικών παραμορφώσεων ($-0.1833 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$) είναι κατ' απόλυτη τιμή πολύ μικρότερη των καμπτικών παραμορφώσεων ($5.61 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$).

B. Άτμητος και ατενής φορέας ($EI = \text{πεπερ.}, GA_S \rightarrow \infty, EA \rightarrow \infty$)

- B1) Λόγω των δεδομένων εξωτερικών φορτίων:

Στην περίπτωση του άτμητου και ατενούς φορέα μηδενίζονται όλες οι τυχόν συνεισφορές από διατμητικές και αξονικές παραμορφώσεις, δηλαδή τα δυνατά έργα τεμνουσών και αξονικών δυνάμεων είναι εξ' ορισμού μηδενικά. Συνεπώς, σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς παίρνουμε:

$$\Delta\varphi_{G1} = 5.61 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά στροφών $\Delta\varphi_{G1}$ είναι θετική και, συνεπώς, το γόνατο που σχηματίζει στο σημείο της άρθρωσης G1 η ελαστική γραμμή δείχνει προς τα επάνω.

- B2) Λόγω των δεδομένων εξωτερικών φορτίων, αν η στήριξη 1 είναι κατακορύφως ενδόσιμη ελαστικά:

Στην περίπτωση αυτή παράγεται πρόσθετο συμπληρωματικό δυνατό έργο από τη δυνατή αντίδραση στήριξης $A_{Z1}^V = 0.357^V$ στην κατακόρυφη πραγματική μετατόπιση:

$$w_{Z1} = A_{Z1} / c_N = 7.32 \text{ kN} / (10^4 \text{ kN/m}) = 7.32 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Βάσει της ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{G1} &= 5.61 \cdot 10^{-5} + A_{Z1}^V \cdot (A_{Z1} / c_N) = 5.61 \cdot 10^{-5} + 0.357^V \cdot (7.32 / 10^4) \\ &= 5.61 \cdot 10^{-5} + 26.132 \cdot 10^{-5} = 31.74 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η ελαστική στήριξη του κόμβου 1 οδηγεί υπό τη δεδομένη φόρτιση σε αύξηση κατά ($26.132 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$) της $\Delta\varphi_{G1}$, η οποία μάλιστα είναι πολλαπλάσια της αρχικής τιμής ($5.61 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$) της $\Delta\varphi_{G1}$. Υπενθυμίζεται, επίσης, ότι στην έκφραση των συμπληρωματικών δυνατών έργων χρησιμοποιήθηκε ο όρος $A_{Z1}^V \cdot (A_{Z1} / c_N)$ αντί του όρου $N_{EZ1}^V \cdot (N_{EZ1} / c_N)$, αφού λόγω $N_{EZ} = -A_Z$ μας δίνει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα.

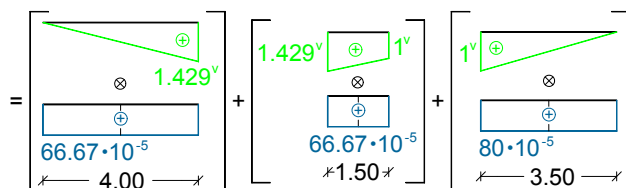
- B3) Λόγω ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t:

$$\Delta\varphi_{G1} = \int_0^L \underbrace{N^V(x)}_{=0} \cdot \alpha_t \cdot t dx = 0$$

Δηλαδή η αυξομείωση της θερμοκρασίας t, δεν προκαλεί διαφορά στροφών στο σημείο G1, όπως άλλωστε δεν προκαλεί στροφές και κατακόρυφες μετατοπίσεις σε κανένα άλλο σημείο της αρθρωτής δοκού.

- B4) Λόγω ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης Δt :

$$\Delta\varphi_{G1} = \int_1^3 \left(M^V(x) \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h_a} \right) dx + \int_3^{G1} \left(M^V(x) \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h_a} \right) dx + \int_{G1}^4 \left(M^V(x) \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h_b} \right) dx$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot 4.00 \cdot 1.429 \cdot 66.67 \cdot 10^{-5} + \frac{1}{2} \cdot 1.50 \cdot (1.429 + 1) \cdot 66.67 \cdot 10^{-5} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot 3.50 \cdot 1.80 \cdot 10^{-5} \\ &= 1.905 \cdot 10^{-3} + 1.215 \cdot 10^{-3} + 1.40 \cdot 10^{-3} = 4.52 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

► B5) Λόγω της καταναγκασμένης βύθισης w_{3L} της στήριξης 3:

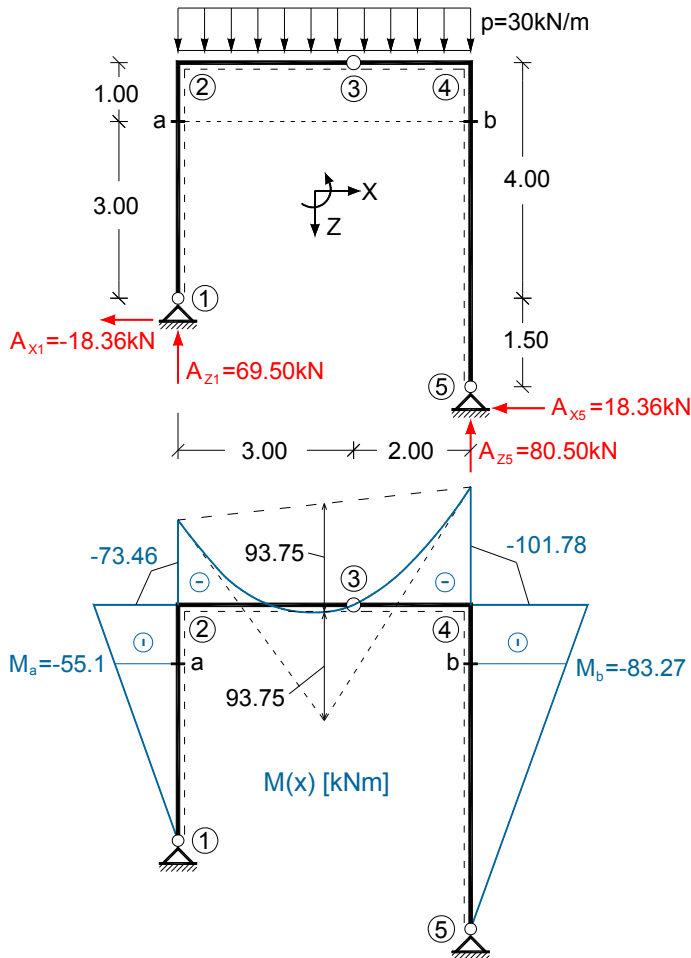
$$\Delta\varphi_{G1} = A_{Z3}^V \cdot w_{3L} = -0.643 \cdot 0.03 = -19.29 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Άσκηση Ι3

Για τον υπολογισμό των ζητούμενων μετακινήσεων εφαρμόζεται η αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων (ΑΣΔΕ, βλ. π.χ. [2], παράγρ. 3.6.5 και 9.4).

(1) Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του φορέα υπό τη δεδομένη φόρτιση

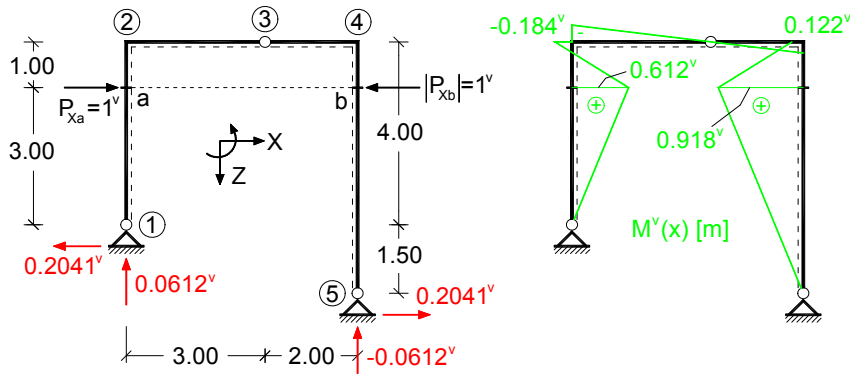
Έχουν ήδη υπολογιστεί στην Άσκηση Η6/4. Εφόσον ο φορέας είναι άτμητος και ατενής, οι μόνες μη μηδενικές ελαστικές παραμορφώσεις είναι οι καμπτικές. Συνεπώς, αρκεί για τον υπολογισμό οποιουδήποτε μεγέθους μετακίνησης λόγω p , η γνώση των ροπών κάμψης $M(x)$ και των αντιστοίχων καμπυλοτήτων $\kappa(x)=M(x)/EI(x)$.



Αντιδράσεις στήριξης και ροπές κάμψης του δεδομένου άτμητου και ατενούς φορέα

(2) Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του φορέα υπό την κατάλληλη μοναδιαία δυνατή φόρτιση

Μοναδιαία δυνατή φόρτιση $P_{Xa} = -P_{Xb} = 1^V$ για τον υπολογισμό της Δu_{ab}



Αντιδράσεις στήριξης και ροπές κάμψης λόγω $P_{xa} = -P_{xb} = 1^v$

Ο υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των ροπών κάμψης γίνεται, κατά τα γνωστά, με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας και τη μέθοδο των κυκλικών διαχωριστικών τομών.

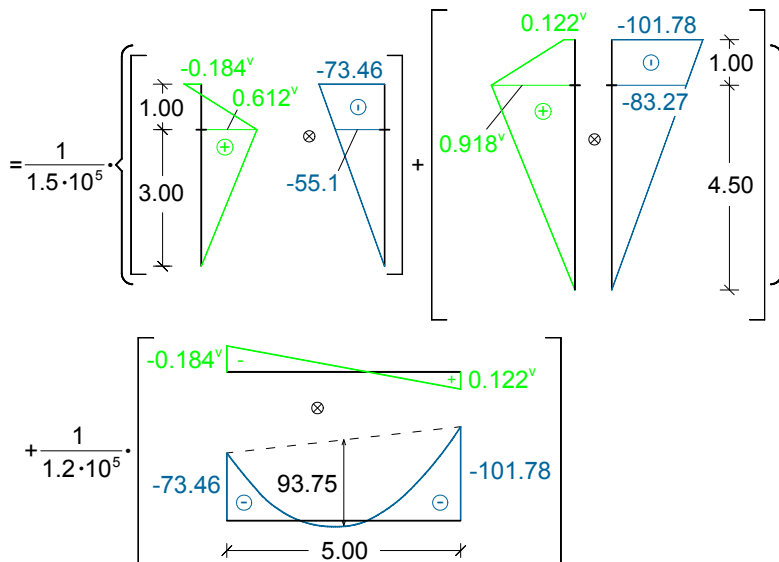
(3) Άθροιση όλων των παραγόμενων συμπληρωματικών δυνατών έργων, εξίσωσή τους με το μηδέν και επίλυση ως προς τη ζητούμενη μετακίνηση

Υπολογισμός της Δu_{ab}

► Λόγω του φορτίου p:

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω διαγράμματα των φορτίων διατομής λόγω p (Σχ. 1) και λόγω $P_{xa} = -P_{xb} = 1^v$ (Σχ. 2), παίρνουμε βάσει της ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) και με τη βοήθεια του Πίνακα 0 του Παραρτήματος:

$$\Delta u_{ab} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left(\int_1^2 M^v \cdot M dx + \int_4^5 M^v \cdot M dx \right) + \frac{1}{EI_z} \cdot \int_2^4 M^v \cdot M dx$$



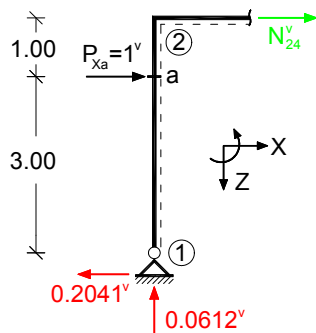
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \{ (1/3) \cdot 3.0 \cdot 0.612 \cdot (-55.1) + (1/6) \cdot 1.0 \cdot [2 \cdot 0.612 \cdot (-55.1) \\
 &\quad + 0.612 \cdot (-73.46) + (-55.1) \cdot (-0.184) + 2 \cdot (-73.46) \cdot (-0.184)] \\
 &\quad + (1/3) \cdot 4.5 \cdot 0.918 \cdot (-83.27) + (1/6) \cdot 1.0 \cdot [2 \cdot 0.918 \cdot (-83.27) + 0.122 \cdot (-83.27) \\
 &\quad + 2 \cdot 0.122 \cdot (-101.78) + 0.918 \cdot (-101.78)] \} \\
 &+ \frac{1}{1.2 \cdot 10^5} \cdot \{ (1/3) \cdot 5.0 \cdot 93.75 \cdot (-0.184 + 0.122) + (1/6) \cdot 5.0 \cdot [0.122 \cdot (-73.46) \\
 &\quad + (-101.78) \cdot (-0.184) + 2 \cdot (-0.184) \cdot (-73.46) + 2 \cdot 0.122 \cdot (-101.78)] \} \\
 &= \frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot [-33.7212 - 12.53804 - 114.663 - 46.885] \\
 &\quad + \frac{1}{1.2 \cdot 10^5} \cdot [-9.6875 + 9.9703] = -1.385 \cdot 10^{-3} + 2.35 \cdot 10^{-6} \\
 &= -1.38 \cdot 10^{-3} \text{ m}
 \end{aligned}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η οριζόντια απόσταση των σημείων a και b αυξάνεται υπό την επήρεια του φορτίου p. Πως εξηγείται αυτό εποπτικά;

Σημειώνεται ότι οι αντιδράσεις στήριξης δεν υπεισέρχονται στον υπολογισμό του Δu_{ab} , διότι οι στηρίξεις είναι ακλόνητες και, συνεπώς, ο υπολογισμός της Δu_{ab} δεν προϋποθέτει τη γνώση τους.

- Λόγω ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t_{24} :

Στην περίπτωση αυτή συμπληρωματικό δυνατό έργο παράγει η δυνατή αξονική δύναμη $N_{24}^V(x)$, που αναπτύσσεται στο ζύγωμα 2-4 λόγω της δυνατής φόρτισης $P_{x_a} = -P_{x_b} = 1^V$, επί των πραγματικών αξονικών παραμορφώσεων $\epsilon_t(x) = \alpha_t \cdot t = 10^{-5} \cdot 20^\circ\text{C}$ του ζυγώματος. Η $N_{24}^V(x)$ είναι, προφανώς, σταθερή σε όλο το μήκος του ζυγώματος και υπολογίζεται εύκολα από την εξής κυκλική διαχωριστική τομή:



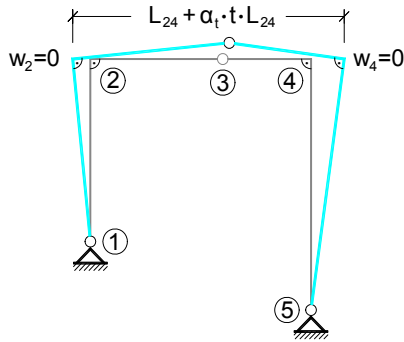
$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{24}^V = A_{x1}^V - P_{x_a} \\
 &= 0.2041 - 1 \\
 &= -0.796
 \end{aligned}$$

Βάσει της ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{ab} &= \int_2^4 \underbrace{(N^V(x) \cdot \alpha_t \cdot t)}_{\text{σταθερές}} dx = N_{24}^V \cdot \alpha_t \cdot t \cdot L_{24} \\
 &= -0.796 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 5.0 = -0.796 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx -0.8 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η θερμοκρασιακή φόρτιση t_{24} προκαλεί αύξηση της οριζόντιας απόστασης των σημείων a και b. Πως εξηγείται αυτό εποπτικά;

Λόγω της ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t_{24} – όπως και λόγω οποιουδήποτε άλλου καταναγκασμού – ο ισοστατικός φορέας παραμένει άτονος. Συνεπώς, εκτός από την αξονική παραμόρφωση – επιμήκυνση, λόγω $t > 0^\circ\text{C}$ του ζυγώματος 2-4, τα δομικά στοιχεία του φορέα δεν εμφανίζουν άλλες παραμορφώσεις και η παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται ο φορέας είναι η εξής:



Παραμορφωμένη κατάσταση λόγω t_{24}

Ο αναγνώστης καλείται να απαντήσει στις εξής απλές ερωτήσεις:

- Βάσει ποιών παραδοχών προκύπτουν μηδενικές κατακόρυφες μετατοπίσεις $w_2=0$, $w_4=0$ των κόμβων 2 και 4;
- Πώς εξηγείται εποπτικά το γεγονός ότι το σημείο 3 μετατοπίζεται προς τα επάνω;

► Λόγω ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης Δt_{24} :

Στην περίπτωση αυτή συμπληρωματικό δυνατό έργο παράγει η δυνατή ροπή κάμψης $M^v(x)$ που αναπτύσσεται στο ζύγωμα 2-4 λόγω της δυνατής φόρτισης $P_{xa}=-P_{xb}=1^v$ επί των πραγματικών καμπυλοτήτων

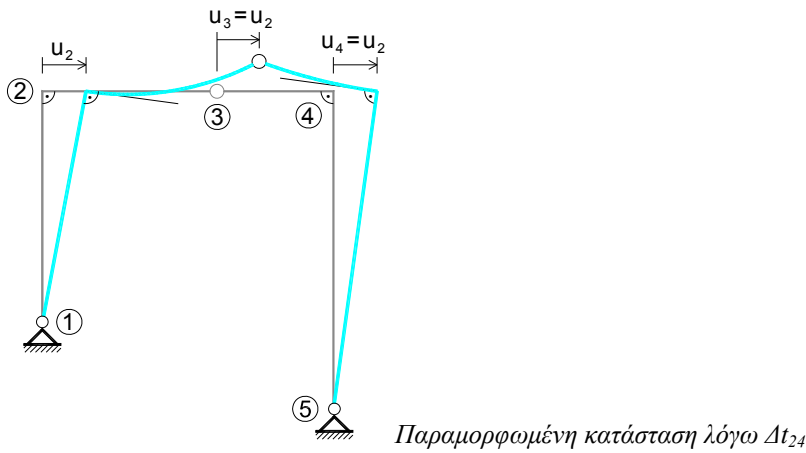
$$k_t(x) = \alpha_t \cdot (\Delta t / h_z) = 10^{-5} \cdot (40 / 0.6) = 66.67 \cdot 10^{-5}$$

Βάσει της ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) και με τη βοήθεια του Πίνακα 0 του Παραρτήματος παίρνουμε:

$$\Delta u_{ab} = \int_2^4 \left(M^v(x) \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h_z} \right) dx = \left[\begin{array}{c} \text{Diagram showing a linear moment distribution from } -0.184^v \text{ at node 2 to } +0.122^v \text{ at node 4. A rectangular area below the diagram is labeled } 66.67 \cdot 10^{-5} \text{ and has a width of } 5.00. \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5.00 \cdot 66.67 \cdot 10^{-5} \cdot (-0.184 + 0.122) = -10.33 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Λόγω της ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης Δt_{24} – όπως και λόγω οποιουδήποτε άλλου καταναγκασμού – το ισοστατικό τριαρθρωτό πλαίσιο παραμένει άτονο. Συνεπώς, εκτός από τις θετικές καμπυλότητες λόγω $\Delta t > 0^\circ\text{C}$, τα δομικά στοιχεία δεν εμφανίζουν άλλες παραμορφώσεις και η παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται ο φορέας είναι η εξής:



Μικρή άσκηση:

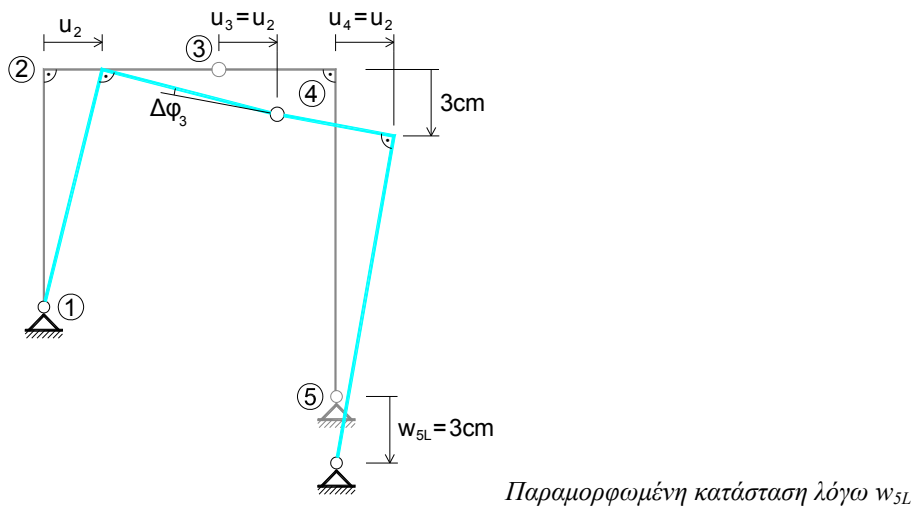
→ Πώς εξηγείται εποπτικά το γεγονός ότι το σημείο 3 μετατοπίζεται προς τα επάνω, και ότι το ζύγωμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά;

- Λόγω της καταναγκασμένης βύθισης w_{5L} της στήριξης 5:

Στην περίπτωση αυτή συμπληρωματικό δυνατό έργο παράγει η δυνατή αντίδραση στήριξης A_{z5}^v επί της πραγματικής καταναγκασμένης βύθισης $w_{5L}=3\text{cm}$. Βάσει της ΑΣΔΕ (βλ. π.χ. [2], εξ. (9.4.4-4)) παίρνουμε:

$$\Delta u_{ab} = A_{z5}^v \cdot w_{5L} = (-0.0612)^v \cdot 0.03 = -0.00184\text{m} = -1.84\text{mm}$$

Λόγω της καταναγκασμένης βύθισης w_{5L} – όπως και λόγω οποιουδήποτε άλλου καταναγκασμού – ο ισοστατικός φορέας παραμένει άτονος. Συνεπώς, τα δομικά του στοιχεία παραμένουν παντελώς απαραμόρφωτα και η παραμορφωμένη κατάσταση στην οποία περιέρχεται ο φορέας έχει την εξής μορφή:



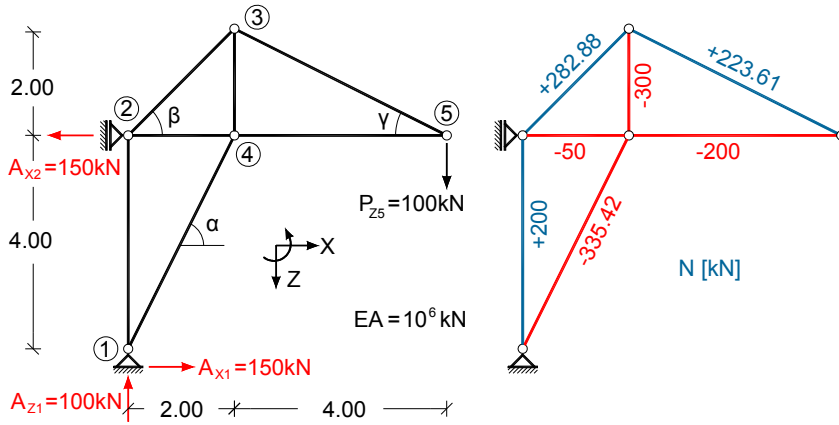
Ο αναγνώστης καλείται να απαντήσει στις εξής απλές ερωτήσεις:

- Γιατί ο κόμβος 2 δεν μετατοπίζεται κατακόρυφως;
- Γιατί η οριζόντια μετατόπιση u_2 είναι ίση με την u_4 ;
- Η διαφορά στρωφών $\Delta\phi_3$ είναι μηδενική ή όχι;

Άσκηση 14

Για τον υπολογισμό των ζητούμενων μετακινήσεων εφαρμόζεται η αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων (ΑΣΔΕ, βλ. π.χ. [2], παράγρ. 3.6.5 και 9.4).

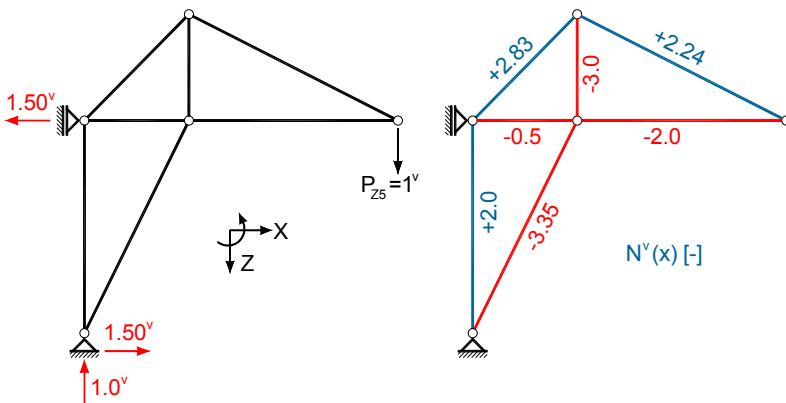
(1) Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του φορέα υπό τη δεδομένη φόρτιση Έχουν ήδη υπολογιστεί στην Άσκηση Η8/2 και παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα:



Αντιδράσεις στήριξης και αξονικές δυνάμεις του δεδομένου δικτυωτού φορέα

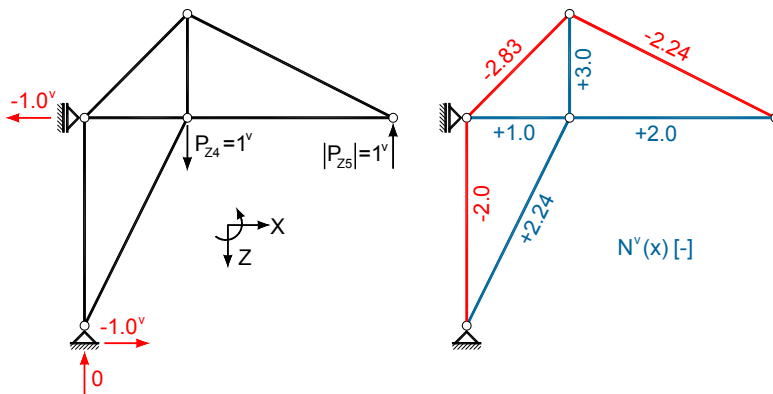
(2) Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του φορέα υπό την κατάλληλη μοναδιαία δυνατή φόρτιση

I. Μοναδιαίο δυνατό φορτίο $P_{Z5}=1^V$ για τον υπολογισμό της w_5



Αντιδράσεις στήριξης και αξονικές δυνάμεις λόγω $P_{Z5}=1^V$

II. Μοναδιαία δυνατή φόρτιση $P_{Z4}=-P_{Z5}=1^V$ για τον υπολογισμό της ψ_{45}



Αντιδράσεις στήριξης και αξονικές δυνάμεις λόγω $P_{Z4}=-P_{Z5}=1^V$

Ο υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των αξονικών δυνάμεων των ράβδων για τις δύο παραπάνω δυνατές φορτίσεις γίνεται, κατά τα γνωστά, με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας και τη μέθοδο των κυκλικών διαχωριστικών τομών.

(3) Άθροιση όλων των παραγόμενων συμπληρωματικών δυνατών έργων, εξίσωσή τους με το μηδέν και επίλυση ως προς τη ζητούμενη μετακίνηση

I. Υπολογισμός της w_5

► Λόγω $P_{Z5}=100\text{kN}$:

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω διαγράμματα των αξονικών δυνάμεων, λόγω $P_{Z5}=100\text{kN}$ (Σχ. 1) και λόγω $P_{Z5}=1^V$ (Σχ. 2), παίρνουμε βάσει του πίνακα 1-4 (τελευταία στήλη):

$$w_5 = \sum \left(N_{ik}^V \cdot \frac{N_{ik}}{EA_{ik}} \cdot L_{ik} \right)$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις ράβδους i-k του δικτυωτού φορέα. Λόγω $EA_{ik}=EA=10^6\text{kN}$ έχουμε:

$$w_5 = \frac{1}{EA} \cdot \left[2 \cdot 200 \cdot 4.0 + 2.83 \cdot 282.88 \cdot \frac{2.0}{\cos\beta} + 2.24 \cdot 223.61 \cdot \frac{4.0}{\cos\gamma} + (-0.50) \cdot (-50) \cdot 2.0 + (-3) \cdot (-300) \cdot 2.0 + (-2) \cdot (-200) \cdot 4.0 + (-3.35) \cdot (-335.42) \cdot \frac{2.0}{\cos\alpha} \right] = \frac{1}{10^6} \cdot [1600 + 2264.64 + 2240.1 + 50 + 1800 + 1600 + 5025.3] = 14.58 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 14.58\text{mm}$$

Παρατηρούμε ότι, όπως διαισθητικά αναμέναμε, ο κόμβος 5 μετατοπίζεται προς τα κάτω. Σημειώνεται ότι οι αντιδράσεις στήριξης δεν υπεισέρχονται στον υπολογισμό της w_5 , διότι οι στηρίξεις είναι ακλόνητες και, συνεπώς, ο υπολογισμός της w_5 δεν προϋποθέτει τη γνώση τους.

► Λόγω ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t:

Βάσει του πίνακα 1.3-3 (τελευταία στήλη) έχουμε:

$$w_5 = \sum (N_{ik}^V \cdot \alpha_t \cdot t_{ik} \cdot L_{ik})$$

όπου και πάλι το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις ράβδους i-k του δικτυωτού φορέα. Λόγω $t_{ik}=t=30^\circ\text{C}$ παίρνουμε:

$$w_5 = \alpha_t \cdot t \cdot \left[2 \cdot 4.0 + 2.83 \cdot \frac{2.0}{\cos\beta} + 2.24 \cdot \frac{4.0}{\cos\gamma} + (-0.50) \cdot 2.0 + (-3) \cdot 2.0 + (-2) \cdot 4.0 + (-3.35) \cdot \frac{2.0}{\cos\alpha} \right] = 10^{-5} \cdot 30 \cdot [8 + 8 + 10 - 1 - 6 - 8 - 15] = -1.2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -1.20\text{mm}$$

Παρατηρούμε ότι η θετική θερμοκρασιακή φόρτιση t συνεπάγεται ανύψωση του κόμβου 5 κατά 1.20mm.

II. Υπολογισμός της ψ_{45}

► Λόγω $P_{Z5}=100\text{kN}$:

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω διαγράμματα των αξονικών δυνάμεων, λόγω $P_{Z5}=100\text{kN}$ (Σχ. 1) και λόγω $P_{Z4}=-P_{Z5}=1^V$ (Σχ. 3), παίρνουμε βάσει του πίνακα 1.3-3 (τελευταία στήλη):

$$\psi_{45} = \frac{1}{L_{45}} \cdot \sum \left(N_{ik}^V \cdot \frac{N_{ik}}{EA_{ik}} \cdot L_{ik} \right)$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις ράβδους i-k του δικτυωτού φορέα:

$$\begin{aligned}\psi_{45} &= \frac{1}{L_{45} \cdot EA} \cdot \left[(-2) \cdot 200 \cdot 4.0 + (-2.83) \cdot 282.9 \cdot \frac{2.0}{\cos\beta} + (-2.24) \cdot 223.61 \cdot \frac{4.0}{\cos\gamma} \right. \\ &\quad \left. + 1 \cdot (-50) \cdot 2.0 + 3 \cdot (-300) \cdot 2.0 + 2 \cdot (-200) \cdot 4.0 + 2.24 \cdot (-335.42) \cdot \frac{2.0}{\cos\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{4.0} \cdot \frac{1}{10^6} \cdot [-1600 - 2264.64 - 2240.1 - 100 - 1800 - 1600 - 3360.2] \\ &= -3.24 \cdot 10^{-3} \text{ rad}\end{aligned}$$

Το αρνητικό πρόσημο της ψ_{45} σημαίνει ότι η ράβδος 4-5 στρέφεται κατά την έννοια των δεικτών του ρολογιού. Γιατί;

► Λόγω ομοιόμορφης θερμοκρασιακής φόρτισης t:

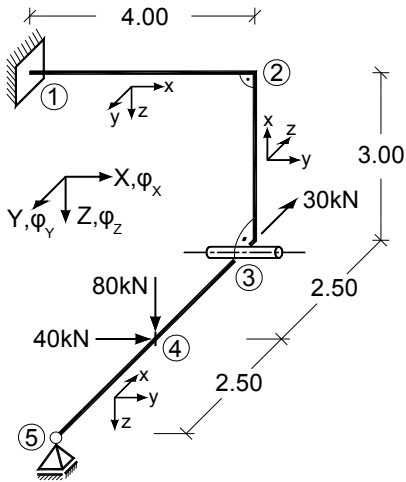
$$\begin{aligned}\psi_{45} &= \frac{1}{L_{45}} \cdot \sum (N_{ik}^v \cdot \alpha_t \cdot t_{ik} \cdot L_{ik}) = \frac{\alpha_t \cdot t}{L_{45}} \cdot \sum (N_{ik}^v \cdot L_{ik}) \\ &= \frac{\alpha_t \cdot t}{L_{45}} \cdot \left[(-2) \cdot 4.0 + (-2.83) \cdot \frac{2.0}{\cos\beta} + (-2.24) \cdot \frac{4.0}{\cos\gamma} + 1 \cdot 2.0 + \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot 2.0 + 2 \cdot 4.0 + 2.24 \cdot \frac{2.0}{\cos\alpha} \right] \\ &= \frac{10^{-5} \cdot 30}{4.0} \cdot [-8 - 8 - 10 + 2 + 6 + 8 + 10] = 0\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η θετική θερμοκρασιακή φόρτιση t δεν προκαλεί στροφή της ράβδου 4-5.

Άσκηση 15

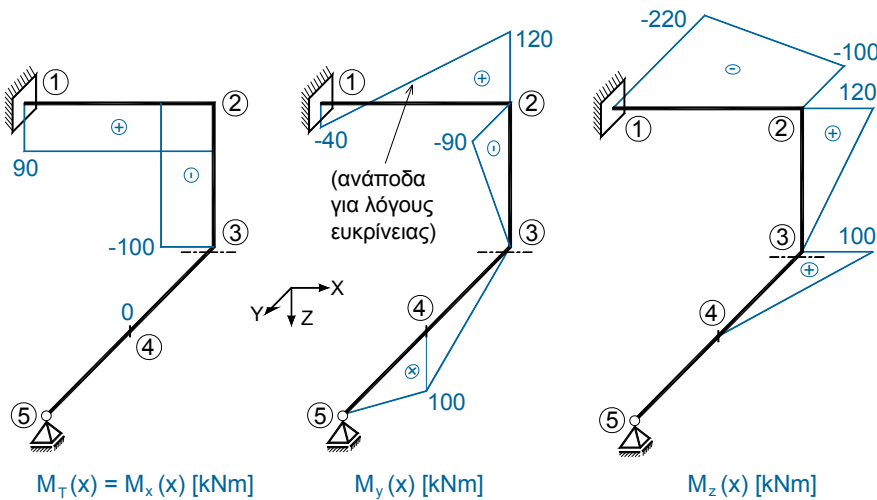
Για τον υπολογισμό των ζητούμενων μετακινήσεων εφαρμόζεται η αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων (ΑΣΔΕ, βλ. π.χ. [2], παράγρ. 3.6.5 και 9.4).

(1) Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του φορέα υπό τη δεδομένη φόρτιση



Δεδομένος φορέας και φόρτιση

Οι αντιδράσεις στήριξης και τα φορτία διατομής έχουν ήδη υπολογιστεί στην Άσκηση Θ1/2 και παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα:



Ροπές στρέψης M_T και κάμψης M_y, M_z του δεδομένου άτμητου και ατενούς χωρικού φορέα

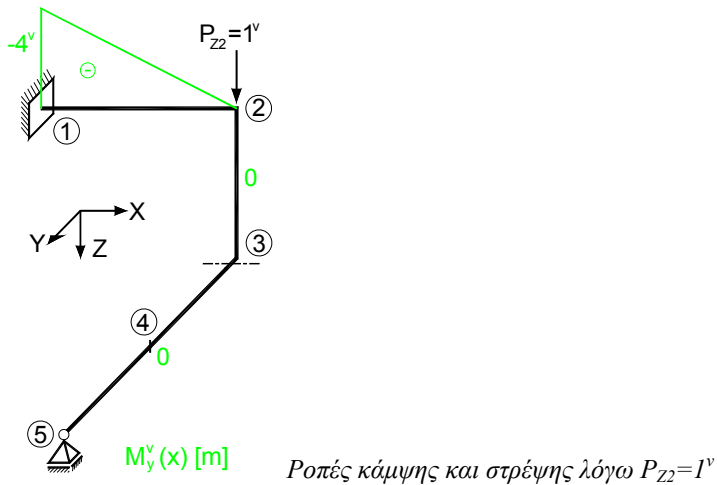
Εφόσον ο φορέας είναι άτμητος και ατενής, οι μόνες μη μηδενικές ελαστικές παραμορφώσεις είναι οι καμπτικές και οι στρεπτικές. Συνεπώς, αρκεί για τον υπολογισμό οποιουδήποτε μεγέθους μετακίνησης, λόγω της δεδομένης φόρτισης, η γνώση των ροπών κάμψης $M_y(x), M_z(x)$ και στρέψης $M_x(x)=M_T(x)$, καθώς βέβαια και των αντιστοίχων καμπυλοτήτων $\kappa_y(x)=M_y(x)/EI_y(x), \kappa_z(x)=M_z(x)/EI_z(x)$ και συστροφών $\zeta(x)=M_T(x)/GI_T(x)$.

Σημείωση: Επειδή όλες οι στήριξεις είναι ακλόνητες και μη ελαστικά ενδόσιμες, οι αντιδράσεις στήριξης δεν υπεισέρχονται στον υπολογισμό των συμπληρωματικών δυνατών έργων και, συνεπώς, η γνώση τους δεν είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό των ζητούμενων μεγεθών μετακίνησης.

(2) Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του φορέα υπό την κατάλληλη μοναδιαία δυνατή φόρτιση

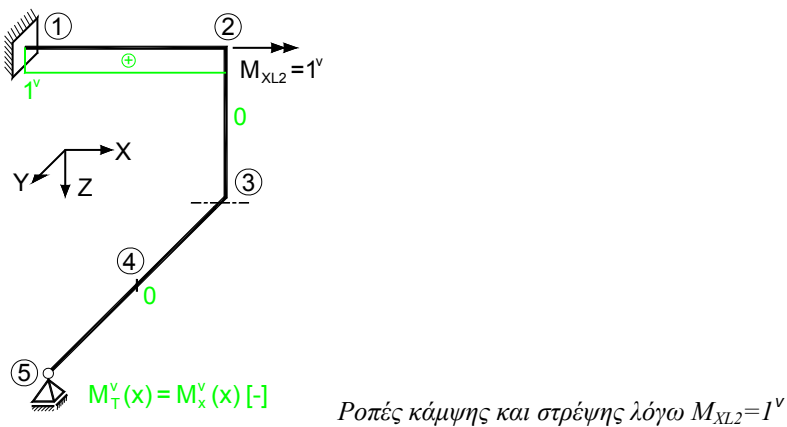
Για τον λόγο που αναφέρθηκε πιο πάνω, οι αντιδράσεις στήριξης δεν χρειάζεται να υπολογιστούν.

I. Μοναδιαίο δυνατό φορτίο $P_{Z2}=1^V$ για τον υπολογισμό της w_{Z2}



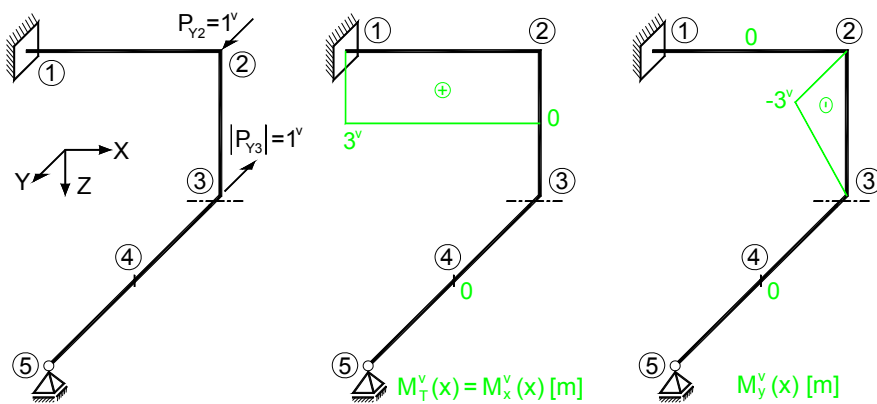
Όλες οι υπόλοιπες ροπές κάμψης $M_z^V(x)$ και στρέψης $M_T^V(x)$ είναι μηδενικές.

II. Μοναδιαίο δυνατό φορτίο $M_{XL2}=1^V$ για τον υπολογισμό της φ_{X2}



Οι ροπές κάμψης $M_y^V(x)$, $M_z^V(x)$ είναι μηδενικές.

III. Μοναδιαία δυνατή φόρτιση για τον υπολογισμό της ψ_{X23}



Ροπές κάμψης και στρέψης λόγω $P_{Y2}=-P_{Y3}=1^V$

Οι ροπές κάμψης $M_z^V(x)$ είναι μηδενικές.

(3) Άθροιση όλων των παραγόμενων συμπληρωματικών δυνατών έργων, εξίσωσή τους με το μηδέν και επίλυση ως προς τη ζητούμενη μετακίνηση

I. Υπολογισμός της w_{z2}

Χρησιμοποιώντας τα προηγηθέντα διαγράμματα ροπών κάμψης και στρέψης λόγω της δεδομένης φόρτισης και λόγω $P_{z2}=1^V$, παίρνουμε βάσει της ΑΣΔΕ (βλ. [2], εξ. (9.4.4-4)) και με τη βοήθεια του Πίνακα 0 του Παραρτήματος:

$$w_{z2} = \frac{1}{EI_y} \cdot \int_1^2 (M_y^v \cdot M_y) dx = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\begin{array}{c} \text{---} -4^v \text{---} \\ \text{---} -40 \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \\ \text{---} \ominus \text{---} \\ \text{---} 120 \text{---} \\ \text{---} 4.00 \text{---} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot \left\{ \frac{1}{6} \cdot 4.00 \cdot (-4) \cdot [2 \cdot (-40) + 120] \right\} = -0.533 \cdot 10^{-3} = -0.533 \text{mm}$$

II. Υπολογισμός της φ_{x2}

Χρησιμοποιώντας προηγηθέντα διαγράμματα ροπών κάμψης και στρέψης λόγω της δεδομένης φόρτισης και λόγω $M_{xL2}=1^V$, παίρνουμε:

$$\varphi_{x2} = \frac{1}{GI_T} \cdot \int_1^2 (M_T^v \cdot M_T) dx = \frac{1}{3 \cdot 10^4} \cdot \left[\begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} 1^v \\ \text{---} \oplus \text{---} 90 \\ \text{---} 4.00 \text{---} \end{array} \right]$$

$$= 1/3 \cdot 10^{-4} \cdot 4.00 \cdot 1 \cdot 90 = 12 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

III. Υπολογισμός της ψ_{x23}

Χρησιμοποιώντας προηγηθέντα διαγράμματα ροπών κάμψης και στρέψης λόγω της δεδομένης φόρτισης και λόγω $P_{y2}=-P_{y3}=1^V$ παίρνουμε:

$$\psi_{x23} = \frac{1}{L_{23}} \cdot \left[\frac{1}{GI_T} \cdot \int_1^2 (M_T^v \cdot M_T) dx + \frac{1}{EI_y} \cdot \int_2^3 (M_y^v \cdot M_y) dx \right]$$

$$= \frac{1}{3.0} \cdot \left\{ \frac{1}{3 \cdot 10^4} \cdot \left[\begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} 3^v \\ \text{---} \oplus \text{---} 90 \\ \text{---} 4.00 \text{---} \end{array} \right] + \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\begin{array}{c} \text{---} -3^v \text{---} \\ \text{---} -90 \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \\ \text{---} \ominus \text{---} \\ \text{---} 3.00 \text{---} \end{array} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{3.0} \cdot \left\{ \frac{1}{3 \cdot 10^4} \cdot (4.0 \cdot 3 \cdot 90) + \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 3.0 \cdot (-3) \cdot (-90) \right] \right\}$$

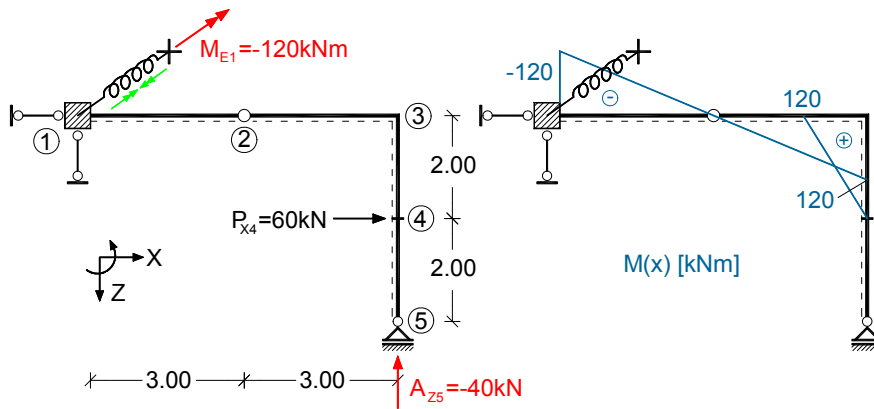
$$= \frac{1}{3.0} \cdot [0.036 + 0.00135] = 0.01245 \text{ rad}$$

Άσκηση Ι6

Για τον υπολογισμό των ζητούμενων μετακινήσεων εφαρμόζεται η αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων (ΑΣΔΕ, βλ. π.χ. [2], παράγρ. 3.6.5 και 9.4).

(1) Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του φορέα υπό τη δεδομένη φόρτιση

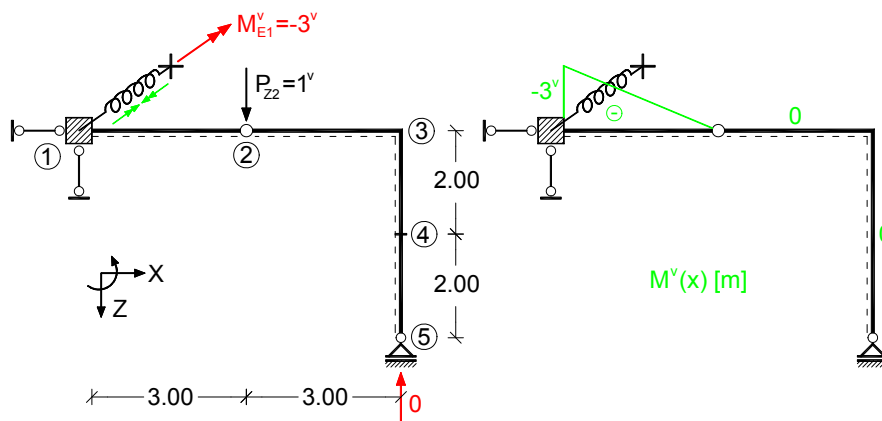
Εδώ αρκεί ο υπολογισμός της ροπής ελαστικής πάκτωσης M_{E1} στο σημείο 1 και του διαγράμματος ροπών κάμψης $M(x)$. Γιατί;



Ροπές κάμψης και ροπή ελαστικής πάκτωσης λόγω της δεδομένης φόρτισης

(2) Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του φορέα υπό την κατάλληλη μοναδιαία δυνατή φόρτιση

Μοναδιαίο δυνατό φορτίο $P_{z2}=1^v$ για τον υπολογισμό της w_2



Ροπές κάμψης και ροπή ελαστικής πάκτωσης λόγω του δυνατού φορτίου $P_{z2}=1^v$

(3) Άθροιση όλων των παραγόμενων συμπληρωματικών δυνατών έργων, εξίσωσή τους με το μηδέν και επίλυση ως προς τη ζητούμενη μετακίνηση

Βάσει της ΑΣΔΕ ([2], εξ. (9.4.4-4)) και με τη βοήθεια του Πίνακα 0 του Παραρτήματος παίρνουμε:

$$w_2 = \frac{1}{EI} \cdot \int (M^v \cdot M) dx + M_{E1}^v \cdot \frac{M_{E1}}{c_M}$$

$$= \frac{1}{3.6 \cdot 10^4} \cdot \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1: } -3^v \text{ to } 0 \text{ over } 3.00 \text{ m} \\ \text{Diagram 2: } -120 \text{ to } 0 \text{ over } 3.00 \text{ m} \end{array} \right] + (-3^v) \cdot \frac{(-120)}{3 \cdot 10^4}$$

$$= \frac{10^{-4}}{3.6} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 3.00 \cdot (-3) \cdot (-120) \right] + 120 \cdot 10^{-4} = 0.01 + 0.012 = 0.022 \text{ m}$$

3.2 Υπολογισμός ελαστικών γραμμών (Ομάδα Κ)

Για τους παρακάτω ισοστατικούς φορείς, να υπολογιστούν οι ζητούμενες ελαστικές γραμμές εφαρμόζοντας τη μέθοδο των συναρτήσεων ω σε συνδυασμό με την αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων (ΑΣΔΕ).

K1

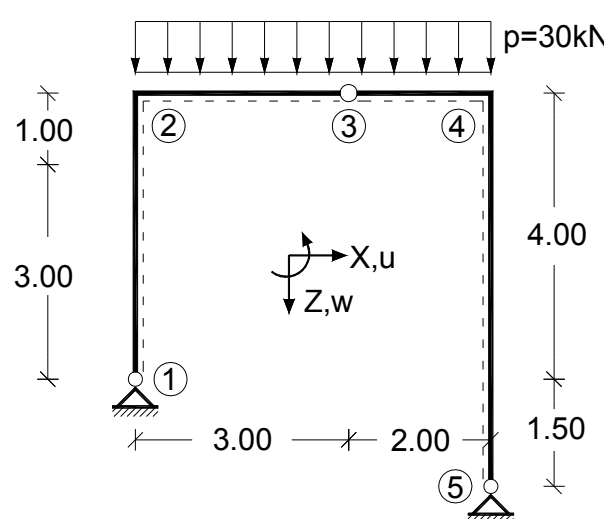
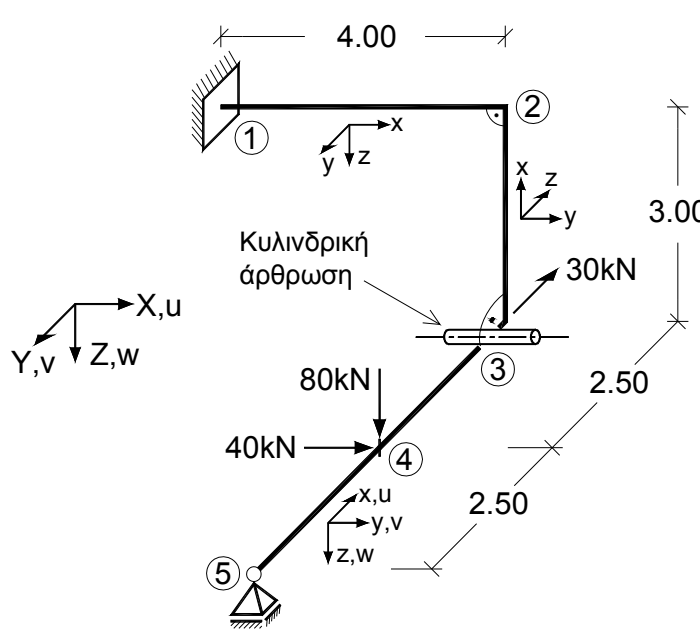
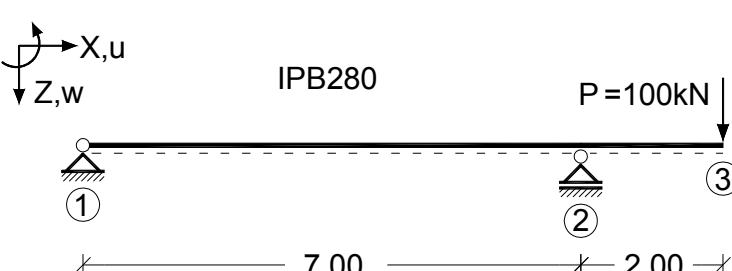
Ζητείται η ελαστική γραμμή $w(x)$ της δοκού 2-3.

Ερώτηση: Πώς μεταβάλλεται η $w(x)$, αν η στήριξη 1 θεωρηθεί κατακορύφως ενδόσιμη ελαστικά;

K2

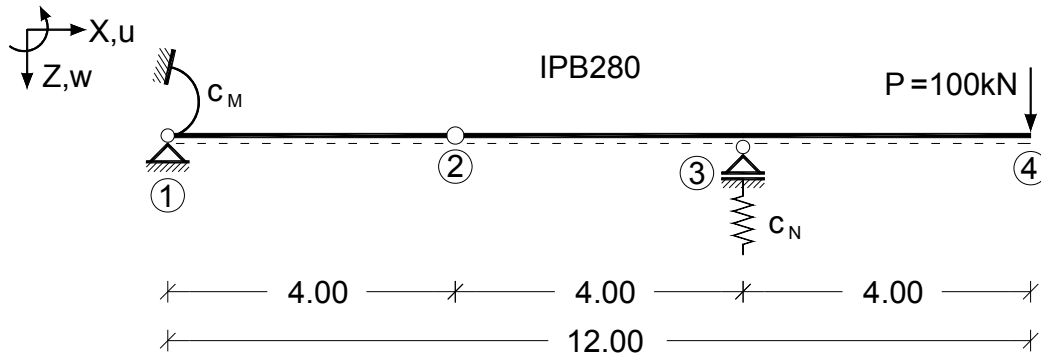
Ζητείται η ελαστική γραμμή $w(x)$ του τμήματος 1-3 της αρθρωτής δοκού.

3-34

<p>K3</p>	<p>Ζητείται η ελαστική γραμμή $w(x)$ του ζυγώματος 2-3-4.</p>  <p>Στύλοι: $EI_z = 1.5 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2$</p> <p>Ζύγωμα: $EI_z = 1.2 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2$</p> <p>$GA_S \rightarrow \infty$ $EA \rightarrow \infty$</p>
<p>K4</p>	<p>Ζητείται η ελαστική γραμμή $w(x)$ του ζυγώματος 5-4-3.</p>  <p>Κυλινδρική άρθρωση</p> <p>$EI_y = EI_z = 2 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2$</p> <p>$GA_S \rightarrow \infty$ $EA \rightarrow \infty$ $GI_T = 3 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$</p>
<p>K5</p>	<p>Η απεικονιζόμενη μονοπροέχουσα χαλύβδινη δοκός IPB280 φορτίζεται με $P=100\text{kN}$ στο άκρο 3. Να υπολογιστεί η ελαστική γραμμή $w(x)$ αγνοώντας τις διατμητικές παραμορφώσεις.</p>  <p>IPB280</p> <p>$P=100\text{kN}$</p> <p>$EI = \text{σταθ.}$ $GA_S \rightarrow \infty$ $EA \rightarrow \infty$</p>

Για τον ελαστικά πακτωμένο στο αριστερό άκρο 1 και ελαστικά εδραζόμενο στο σημείο 3 φορέα του σχήματος (χαλύβδινη δοκός IPB280, St37) να υπολογιστεί η ελαστική γραμμή $w(x)$ αγνοώντας τις διατμητικές παραμορφώσεις.

K6



$$EI = \text{σταθ.} \quad c_N = 10^4 \text{ kN/m}$$

$$GA_S \rightarrow \infty \quad c_M = 10^4 \text{ kNm/rad}$$

$$EA \rightarrow \infty$$

ΛΥΣΕΙΣ

Πριν την παρουσίαση των λύσεων, παρατίθενται χάριν διευκόλυνσης του σπουδαστή τα επί μέρους βήματα που περιλαμβάνει ο υπολογισμός ελαστικών γραμμών με τη βοήθεια των συναρτήσεων ω και της αρχής των συμπληρωματικών έργων (ΑΣΔΕ):

- (1) Προσδιορίζεται το διάγραμμα των ροπών κάμψης $M(x)$ του φορέα υπό τη δεδομένη φόρτιση (φορτία και καταναγκασμοί). Σε ισοστατικούς φορείς οι ροπές, λόγω καταναγκασμών, είναι βέβαια μηδενικές.
- (2) Υποδιαιρείται ο φορέας σε ένα πλήθος κατάλληλα επιλεγμένων στοιχείων α - β , β - γ , γ - δ , ... , τα οποία πρέπει
 - να είναι ευθύγραμμα,
 - να έχει καθένα τους σταθερή δυσκαμψία EI και
 - το διάγραμμα ροπών τους $M(x)$ να μπορεί να συντεθεί από τους βασικούς τύπους διαγραμμάτων που περιλαμβάνονται σε διαθέσιμους πίνακες (βλ. Παράρτημα, Πίν. 3α).
 Αυτό σημαίνει ότι οι κόμβοι α , β , γ , δ , ... που προσδιορίζουν αρχή και τέλος κάθε στοιχείου πρέπει να επιλέγονται με τρόπο τέτοιο, ώστε η μεταξύ αυτών καμπτική παραμόρφωση της δοκού να μπορεί να ταυτιστεί με την ελαστική γραμμή μιας αμφιέρειστης δοκού (α - β , β - γ , γ - δ , ...) που φέρει τα ίδια φορτία.
- (3) Υπολογισμός των βυθίσεων w_α , w_β , w_γ , w_δ , ... των κόμβων α , β , γ , δ , ... κάθετα στον άξονα x , δηλαδή κατά την έννοια της ζητούμενης ελαστικής γραμμής $w(x)$, εφόσον αυτές είναι διάφορες του μηδενός.
- (4) Προσδιορισμός της κλειούσας της ελαστικής γραμμής, η οποία προκύπτει ως η γραμμή που συνδέει ευθύγραμμα τους μετατοπισμένους κόμβους, δηλαδή ως η πολυγωνική γραμμή $w_{κλ}(x)$ με τεταγμένες τις μετατοπίσεις w_α , w_β , w_γ , w_δ στις θέσεις των κόμβων α , β , γ , δ ,
- (5) Κάθε ένα από τα δομικά στοιχεία α - β , β - γ , γ - δ , ... θεωρείται ως αμφιέρειστη δοκός, της οποίας η ελαστική γραμμή $w_{αμφ}(x)$ υπολογίζεται κάνοντας χρήση των αριθμητικών πινάκων των συναρτήσεων ω (βλ. Πίνακες 3α και 3β του Παραρτήματος).
- (6) Επαλληλία, δηλαδή αλγεβρική πρόσθεση, των τιμών των βυθίσεων που υπολογίστηκαν στα προηγούμενα βήματα 4 και 5. Με διαφορετική διατύπωση: Οι ελαστικές γραμμές των αμφιέρειστων δοκών α - β , β - γ , γ - δ , ... του βήματος (5) «κρεμιούνται» στην κλειούσα της ελαστικής γραμμής, συνθέτοντας έτσι τη ζητούμενη τελική ελαστική γραμμή του ισοστατικού φορέα $w(x) = w_{κλ}(x) + w_{αμφ}(x)$.

Σημείωση 1: Γωνίες στροφής

Ο πίνακας 3α του Παραρτήματος περιέχει - εκτός από τις συναρτήσεις ω - και τύπους για τον υπολογισμό των γωνιών στροφής $\tau_\alpha = -\Phi_{αμφ-αριστ}$ και $\tau_\beta = \Phi_{αμφ-δεξ}$ που αναπτύσσονται στα άκρα μιας αμφιέρειστης δοκού α - β . Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τις στροφές ϕ_α , ϕ_β των σημείων α , β , γ , δ , ... ή να ελέγξουμε τις τιμές γωνιών στροφής που υπολογίστηκαν προηγουμένως με άλλον τρόπο. Βέβαια, εκτός από τις στροφές τ_α και τ_β λόγω της ελαστικής παραμόρφωσης του τμήματος α - β , θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και η στροφή $\psi = \psi_{αβ} = (w_\alpha - w_\beta)/L$ της χορδής του. Έτσι, οι τελικές (συνολικές) στροφές ϕ_α , ϕ_β στα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος υπολογίζονται από τους τύπους:

$$\phi_\alpha = \psi - \tau_\alpha, \quad \phi_\beta = \psi + \tau_\beta$$

Σημείωση 2: Χωρικοί φορείς

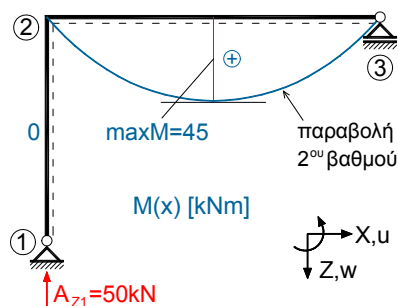
Επειδή χωρικά δομικά στοιχεία που είναι ευθύγραμμα και έχουν σταθερή δυσκαμψία περιγράφονται σε κάθε επίπεδο κάμψης (x - y ή x - z) από διαφορικές εξισώσεις, που είναι ακριβώς ανάλογες με τις διαφορικές εξισώσεις των αντίστοιχων επίπεδων γραμμικών στοιχείων, οι συναρτήσεις ω μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τον υπολογισμό ελαστικών γραμμών χωρικών γραμμικών φορέων ξεχωριστά για κάθε ένα από τα δύο επίπεδα x - y και x - z .

Άσκηση Κ1

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 3.2.

(1) Υπολογισμός του διαγράμματος ροπών κάμψης $M(x)$

Το διάγραμμα ροπών κάμψης του δεδομένου φορέα έχει υπολογιστεί στην Άσκηση Η1/6 και παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα:



Αντιδράσεις στήριξης και ροπές κάμψης του δεδομένου φορέα

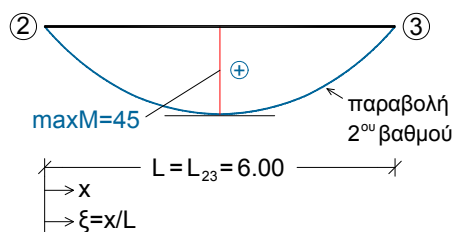
Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα ροπών στη δοκό 2-3, που μας ενδιαφέρει εδώ, ταυτίζεται με το διάγραμμα ροπών μιας αμφιέριστης δοκού υπό το ίδιο φορτίο. Σημειώνεται, επίσης, ότι οι ροπές $M(x)$ του ισοστατικού φορέα δεν επηρεάζονται από την ενδεχόμενη ενδοσιμότητα της στήριξης 1.

(2)+(3)+(4) Υπολογισμός των βυθίσεων στα χαρακτηριστικά σημεία και προσδιορισμός της κλείουσας

Στην περίπτωση μας έχουμε ένα μόνο στοιχείο, δηλαδή την ευθύγραμμη δοκό 2-3 σταθερής δυσκαμψίας, και δύο χαρακτηριστικά σημεία: τους κόμβους 2 και 3. Ο κόμβος 3 είναι ακλόνητα εδραζόμενος και, συνεπώς, $w_3=0$. Ο κόμβος 2 έχει στην εξεταζόμενη περίπτωση του ατενούς φορέα ($EA \rightarrow \infty$) επίσης μηδενική κατακόρυφη μετατόπιση: $w_2=w_1=0$ (βλ. Άσκηση Ι1). Έτσι, η κλείουσα της ελαστικής γραμμής έχει μηδενικές τεταγμένες, δηλαδή ταυτίζεται με τον απαραμόρφωτο άξονα x της δοκού 2-3.

(5)+(6) Υπολογισμός των ελαστικών γραμμών των επιμέρους τμημάτων θεωρούμενων ως αμφιέριστη και επαλληλία

Για το ένα και μοναδικό τμήμα 2-3 του φορέα μας παίρνουμε για την ελαστική γραμμή $w(x)$ βάσει του Πίνακα 3α (σειρά 6) του Παραρτήματος:



$$w(\xi) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L^2}{3} \cdot \omega_p''$$

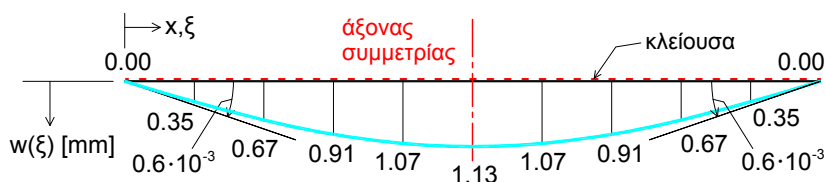
$$= \frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \frac{45 \cdot 6^2}{3} \cdot \omega_p''$$

$$= 3.6 \cdot 10^{-3} \cdot \omega_p'' \text{ [m]}$$

όπου: $\omega_p'' = \xi - 2 \cdot \xi^3 + \xi^4$

Με τη βοήθεια του Πίνακα 3β, ο οποίος περιέχει τις αριθμητικές τιμές της συνάρτησης ω_p'' , υπολογίζουμε τις βυθίσεις w σε επαρκώς πυκνά σημεία της δοκού, π.χ. στα δέκατα σημεία της:

	x [m]	ξ [°]=x/6.00	ω'' _p	w(ξ)=3.6ω'' _p [mm]
Κόμβος 2:	0	0	0	0.00
	0.6	0.1	0.0981	0.35
	1.2	0.2	0.1856	0.67
	1.8	0.3	0.2541	0.91
	2.4	0.4	0.2976	1.07
	3.0	0.5	0.3125	1.13
	3.6	0.6	0.2976	1.07
	4.2	0.7	0.2541	0.91
	4.8	0.8	0.1856	0.67
	5.4	0.9	0.0981	0.35
Κόμβος 3:	6	1	0	0.00



Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία (βλ. π.χ. [2], παράγρ. 9.5.5), ο Πίνακας 3α μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε και τις γωνίες στροφής φ_{ap} και $\varphi_{δεξ}$ στα άκρα του εκάστοτε θεωρούμενου αμφιέριστου τμήματος i-k. Για την περίπτωση μας έχουμε:

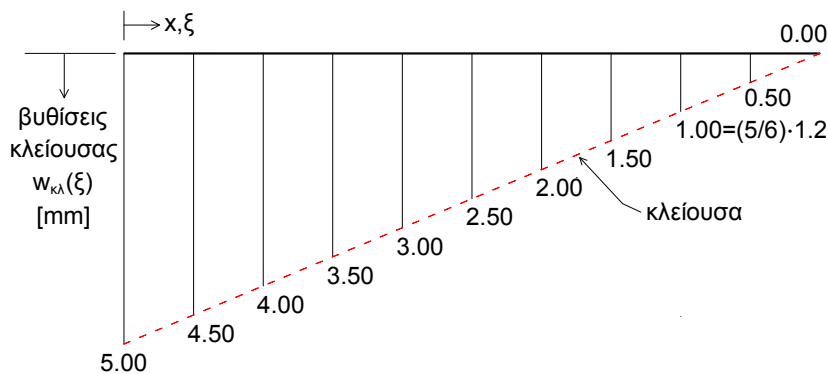
$$\varphi_2 = \psi_{23} - \tau_i = 0 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{3} = -\frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \frac{45 \cdot 6}{3} = -0.6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Σημ.: Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι ο κόμβος 2 στρέφεται κατά την έννοια των δεικτών του ρολογιού.

Διαπιστώνουμε ότι η τιμή αυτή συμπίπτει πράγματι με την τιμή της στροφής φ_2 που υπολογίσαμε στην Άσκηση ΙΙ, για τον άτμητο και ατενή φορέα. Επίσης, λόγω της συμμετρίας της ελαστικής γραμμής ισχύει $\varphi_3 = -\varphi_2$, με πρόσημο βάσει συστήματος αναφοράς. Τέλος, σημειώνεται ότι αν η στήριξη 1 θεωρηθεί κατακόρυφως ενδόσιμη ελαστικά, οι μεν ροπές $M(x)$ του τμήματος 2-3 παραμένουν αμετάβλητες, αφού οι ελαστικές ιδιότητες δεν επηρεάζουν τα εντασιακά μεγέθη ισοστατικών φορέων, η δε κατακόρυφη μετατόπιση του κόμβου 2 παύει να είναι μηδενική και παίρνει την τιμή (βλ. Άσκηση ΙΙ):

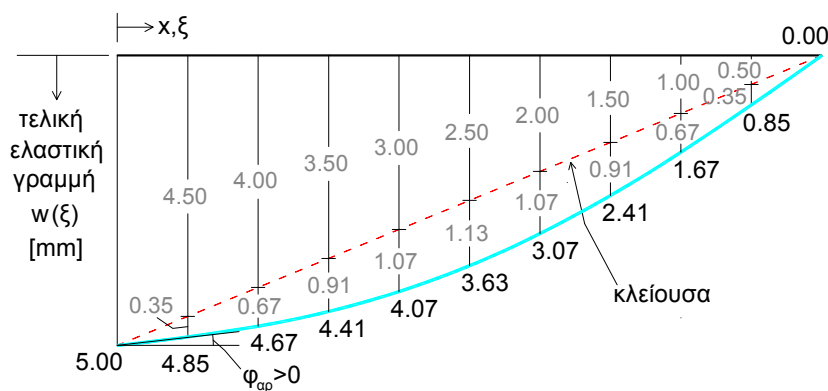
$$w_2 = A_{z1}/c_N = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Συνεπώς, η κλείουσα της ελαστικής γραμμής δεν έχει πλέον μηδενικές τεταγμένες, αλλά τη μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Κλείουσα της ελαστικής γραμμής

Η τελική ελαστική γραμμή προκύπτει με επαλληλία, δηλαδή αλγεβρική άθροιση, των βυθίσεων λόγω κλείουσας w και έχει την ακόλουθη μορφή:



Ελαστική γραμμή

Στην περίπτωση αυτή η στροφή στο αριστερό άκρο ισούται με:

$$\varphi_{αρ} = \psi_{23} - \tau_i = \frac{w_2 - w_3}{L_{23}} - \tau_i = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{6.00} - 0.6 \cdot 10^{-3} = +0.233 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

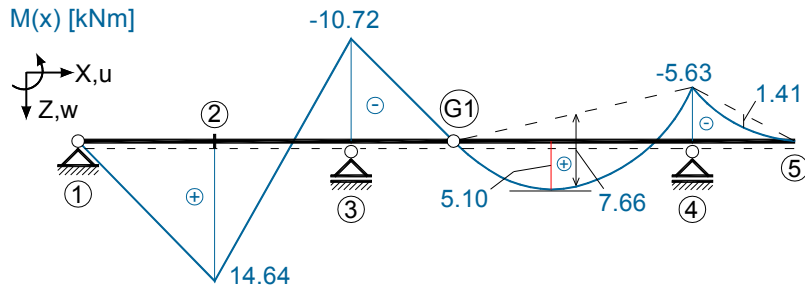
δηλαδή ο κόμβος 2 στρέφεται ενάντια στη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Άσκηση Κ2

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 3.2.

(1) Υπολογισμός του διαγράμματος ροπών κάμψης $M(x)$

Το διάγραμμα ροπών κάμψης του δεδομένου φορέα έχει ήδη υπολογιστεί στην Άσκηση Η4/1 και παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα:

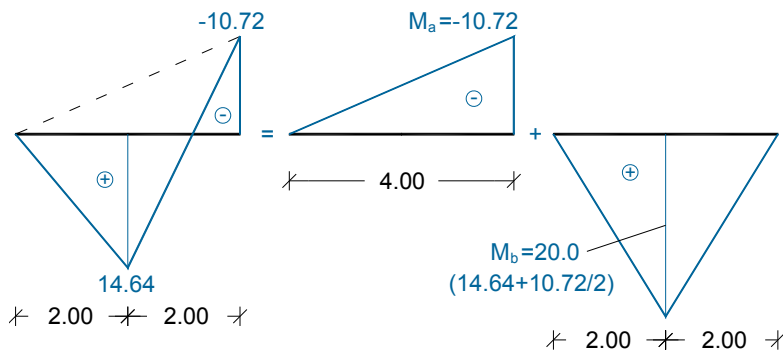


Ροπές κάμψης του δεδομένου φορέα

Εδώ ενδιαφέρει μόνο το τμήμα 1-2-3 του διαγράμματος $M(x)$, αφού για το τμήμα αυτό ζητείται η ελαστική γραμμή.

(2)+(3)+(4) Υπολογισμός των βυθίσεων στα χαρακτηριστικά σημεία και προσδιορισμός της κλείουσας

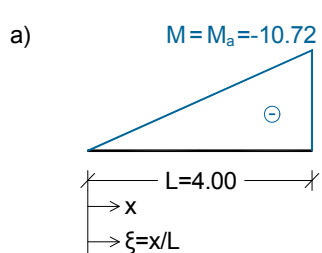
Το τμήμα 1-2-3 θεωρείται για τις ανάγκες του υπολογισμού της ελαστικής του γραμμής ως ένα στοιχείο, διότι όχι μόνο είναι ευθύγραμμο και σταθερής δυσκαμψίας EI αλλά το διάγραμμα ροπών του μπορεί να συντεθεί από τους βασικούς τύπους διαγραμμάτων που περιλαμβάνονται στον πίνακα 3α του Παραρτήματος ως εξής:



Δεδομένου ότι τα σημεία 1 και 3 εδράζονται ακλόνητα, και συνεπώς $w_1=w_3=0$, η κλείουσα της ελαστικής γραμμής έχει μηδενικές τεταγμένες, δηλαδή ταυτίζεται με τον απαραμόρφωτο άξονα της δοκού 1-3.

(5)+(6) Υπολογισμός των ελαστικών γραμμών των επιμέρους τμημάτων θεωρούμενων ως αμφιέρειστων και επαλληλία

Για το ένα και μοναδικό τμήμα 1-3 του φορέα μας, παίρνουμε για την ελαστική γραμμή $w(x)$ βάσει του Πίνακα 3α (σειρές 2 και 5) του Παραρτήματος:

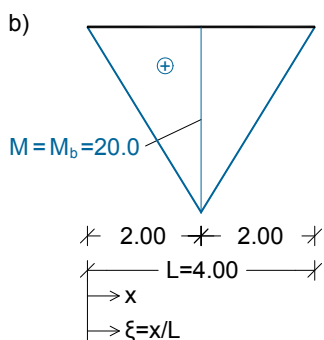


$$w_a(\xi) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L^2}{6} \cdot \omega_D$$

$$= \frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \frac{(-10.72) \cdot 4^2}{6} \cdot \omega_D$$

$$= -19.06 \cdot 10^{-5} \cdot \omega_D \text{ [m]}$$

όπου: $\omega_D = \xi - \xi^3$



$$w_b(\xi) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L^2}{12} \cdot \omega_\Delta$$

$$= \frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{12} \cdot \omega_\Delta$$

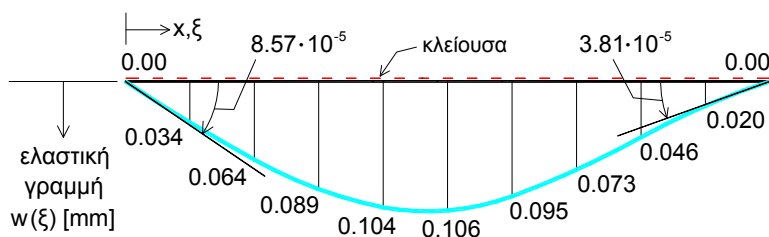
$$= 17.78 \cdot 10^{-5} \cdot \omega_\Delta \text{ [m]}$$

όπου: $\omega_\Delta = 3 \cdot \xi - 4 \cdot \xi^3$

και $w(\xi) = w_a(\xi) + w_b(\xi)$
 συνολικά: $= -19.06 \cdot 10^{-5} \cdot \omega_D + 17.78 \cdot 10^{-5} \cdot \omega_\Delta$

Με τη βοήθεια του Πίνακα 3β του Παραρτήματος, ο οποίος περιέχει τις αριθμητικές τιμές των συναρτήσεων ω_D και ω_Δ , υπολογίζουμε τις βυθίσεις w σε επαρκώς πυκνά σημεία της δοκού, π.χ. στα δέκατα σημεία της:

	x [m]	ξ=x/4.0	ω_D	ω_Δ	$w_a = -19.06 \cdot 10^{-5} \omega_D$	$w_b = 17.78 \cdot 10^{-5} \omega_\Delta$	$w = w_a + w_b$ [mm]
Κόμβος 1:	0	0	0	0	0	0	0.000
	0.4	0.1	0.099	0.296	-0.0000189	0.0000526	0.034
	0.8	0.2	0.192	0.568	-0.0000366	0.0001010	0.064
	1.2	0.3	0.273	0.792	-0.0000520	0.0001408	0.089
	1.6	0.4	0.336	0.944	-0.0000640	0.0001678	0.104
Κόμβος 2:	2	0.5	0.375	1	-0.0000715	0.0001778	0.106
	2.4	0.6	0.384	0.944	-0.0000732	0.0001678	0.095
	2.8	0.7	0.357	0.792	-0.0000680	0.0001408	0.073
	3.2	0.8	0.288	0.568	-0.0000549	0.0001010	0.046
	3.6	0.9	0.171	0.296	-0.0000326	0.0000526	0.020
Κόμβος 3:	4	1	0	0	0	0	0.000



Ελαστική γραμμή

Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία (βλ. π.χ. [2], παράγρ. 9.5.5), ο Πίνακας 3α μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε και τις γωνίες στροφής $\varphi_{αρ}$ και $\varphi_{δεξ}$ στα άκρα του εκάστοτε θεωρούμενου

αμφιέριστου τμήματος i-k. Για την περίπτωση μας, όπου η κλείουσα είναι μηδενική ($\psi_{13}=0$) παίρνουμε (βλ. σειρές 2 και 5 του Πίνακα 3α):

Κόμβος
1:

$$\begin{aligned} \text{a) } \varphi_{1a} &= \psi_{13} - \tau_{ia} = -\tau_{ia} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{6} \\ &= -\frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \frac{(-10.72) \cdot 4.0}{6} = 4.76 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \varphi_{1b} &= \psi_{13} - \tau_{ib} = -\tau_{ib} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{4} \\ &= -\frac{1}{1.5 \cdot 10^5} \cdot \frac{20 \cdot 4.0}{4} = -13.33 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \end{aligned}$$

και συνολικά: $\varphi_1 = 4.76 \cdot 10^{-5} - 13.33 \cdot 10^{-5} = -8.57 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$

Κόμβος
3:

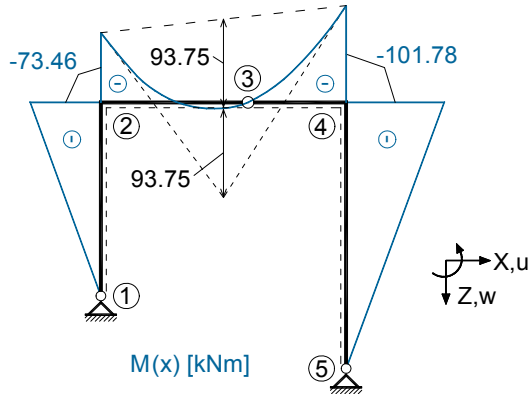
$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \varphi_{3a} &= \psi_{13} + \tau_{ka} = \tau_{ka} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{3} = -9.52 \cdot 10^{-5} \\ \text{b) } \varphi_{3b} &= \psi_{13} + \tau_{kb} = \tau_{kb} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{4} = 13.33 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \right\} \rightarrow \varphi_3 = 3.81 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

Άσκηση Κ3

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 3.2.

(1) Υπολογισμός του διαγράμματος ροπών κάμψης $M(x)$

Το διάγραμμα ροπών κάμψης του δεδομένου φορέα έχει ήδη υπολογιστεί στην Άσκηση Η6/4:

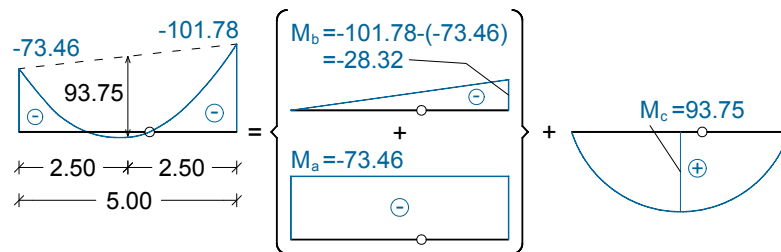


Αντιδράσεις στήριξης και ροπές κάμψης του δεδομένου φορέα

Εδώ ενδιαφέρει μόνο το τμήμα 2-3-4 του διαγράμματος $M(x)$, αφού για το τμήμα αυτό ζητείται η ελαστική γραμμή.

(2)+(3)+(4) Υπολογισμός των βυθίσεων στα χαρακτηριστικά σημεία και προσδιορισμός της κλείουσας

Το τμήμα 2-3-4 θεωρείται για τις ανάγκες του υπολογισμού της ελαστικής του γραμμής ως ένα στοιχείο, διότι όχι μόνο είναι ευθύγραμμο και σταθερής δυσκαμψίας EI αλλά το διάγραμμα ροπών του μπορεί να συντεθεί από τους βασικούς τύπους διαγραμμάτων που περιλαμβάνονται στον πίνακα 3α του Παραρτήματος ως εξής:

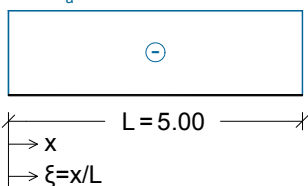


Λόγω της παραδοχής της ατένειας, οι βυθίσεις των άκρων του στοιχείου 2-4 είναι μηδενικές: $w_2=w_4=0$ και συνεπώς η κλείουσα της ελαστικής γραμμής έχει μηδενικές τεταγμένες, δηλαδή ταυτίζεται με τον απαραμόρφωτο άξονα της δοκού 2-4.

(5)+(6) Υπολογισμός των ελαστικών γραμμών των επιμέρους τμημάτων θεωρούμενων ως αμφιέριστων και επαλληλία

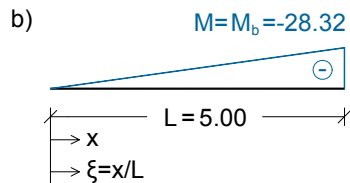
Για το ένα και μοναδικό τμήμα 2-4 του φορέα μας, παίρνουμε για την EI -πλάσια ελαστική γραμμή $w(x)$ βάσει του Πίνακα 3α (σειρές 1, 2 και 6) του Παραρτήματος:

a) $M=M_a=-73.46$



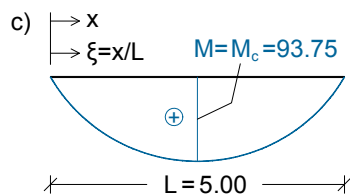
$$EI \cdot w_a(\xi) = \frac{M \cdot L^2}{2} \cdot \omega_R = -918.25 \cdot \omega_R$$

όπου: $\omega_R = \xi - \xi^2$



$$EI \cdot w_b(\xi) = \frac{M \cdot L^2}{6} \cdot \omega_D = -118.0 \cdot \omega_D$$

όπου: $\omega_D = \xi - \xi^3$



$$EI \cdot w_c(\xi) = \frac{M \cdot L^2}{3} \cdot \omega_p'' = 781.25 \cdot \omega_p''$$

όπου: $\omega_p'' = \xi - 2 \cdot \xi^3 + \xi^4$

και

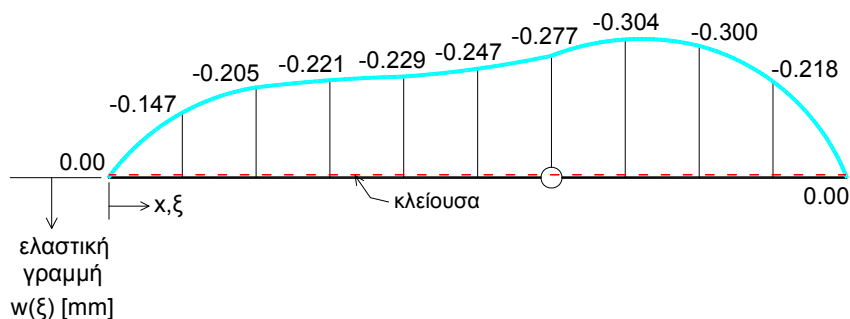
$$EI \cdot w(\xi) = EI \cdot [w_a(\xi) + w_b(\xi) + w_c(\xi)]$$

συνολικά:

$$= -918.25 \cdot \omega_R - 118.0 \cdot \omega_D + 781.25 \cdot \omega_p''$$

Με τη βοήθεια του Πίνακα 3β του Παραρτήματος, ο οποίος περιέχει τις αριθμητικές τιμές των συναρτήσεων ω_R , ω_D και ω_p'' , υπολογίζουμε τις βυθίσεις w σε επαρκώς πυκνά σημεία της δοκού, π.χ. στα δέκατα σημεία της, και σχεδιάζουμε την ελαστική γραμμή:

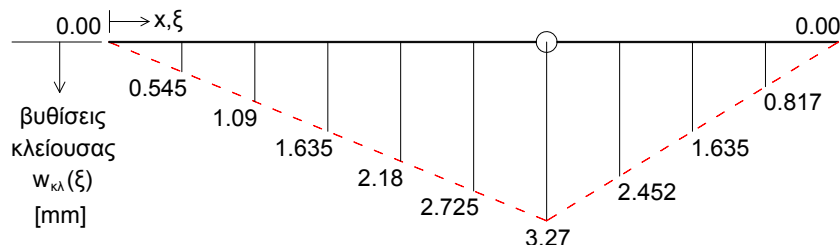
	x [m]	$\xi =$ x/5.0	ω_R	ω_D	ω_p''	$EIw(\xi) = -918.25\omega_R -$ $-118\omega_D + 781.25\omega_p''$
Κόμβος 2:	0	0	0.00	0.00	0.00	0.000
	0.5	0.1	0.09	0.099	0.0981	-17.684
	1	0.2	0.16	0.192	0.1856	-24.576
	1.5	0.3	0.21	0.273	0.2541	-26.531
	2	0.4	0.24	0.336	0.2976	-27.528
	2.5	0.5	0.25	0.375	0.3125	-29.672
	3	0.6	0.24	0.384	0.2976	-33.192
	3.5	0.7	0.21	0.357	0.2541	-36.443
	4	0.8	0.16	0.288	0.1856	-35.904
	4.5	0.9	0.09	0.171	0.0981	-26.180
Κόμβος 4:	5	1	0.00	0.00	0.00	0.000



Όπως άμεσα γίνεται αντιληπτό, η παραπάνω ελαστική γραμμή δεν μπορεί παρά να είναι λανθασμένη, διότι το κατακόρυφο συνεχές φορτίο p , το οποίο φορτίζει το ζύγωμα του πλαισίου κατά την έννοια του άξονα Z , δεν είναι δυνατόν να προκαλεί αντίθετες, αρνητικές μετατοπίσεις. Μια προσεκτική ματιά στη διαδικασία υπολογισμού που ακολουθήθηκε, αποκαλύπτει ότι το λάθος

οφείλεται στη θεώρηση ολόκληρου του ζυγώματος 2-3-4 ως ενός ενιαίου στοιχείου, παρά το γεγονός ότι στο σημείο 2 παρεμβάλλεται μία άρθρωση. Προκειμένου να υπολογιστεί σωστά η ζητούμενη ελαστική γραμμή του ζυγώματος 2-3-4, θα πρέπει: (α) να χωριστεί το ζύγωμα στα δύο επί μέρους τμήματα 2-3 και 3-4, (β) να υπολογιστεί η βύθιση του σημείου 3 προκειμένου να προσδιοριστούν οι κλείουσες των τμημάτων αυτών, (γ) για κάθε ένα από τμήματα 2-3 και 3-4 να γίνει ο υπολογισμός της ελαστικής τους γραμμής θεωρώντας τα ως αμφιέρειστα και, τέλος, (δ) να «κρεμαστούν» οι δύο επί μέρους ελαστικές γραμμές στην υπολογισθείσα κλείουσα.

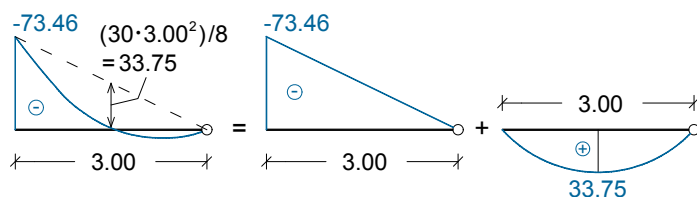
- Για τις κλείουσες των τμημάτων 2-3 και 3-4 παίρνουμε:



Κλείουσα της ελαστικής γραμμής

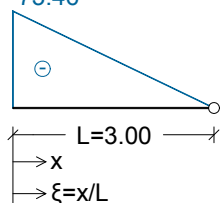
- Τμήμα 2-3:

Για το τμήμα 2-3 του φορέα μας το διάγραμμα ροπών του μπορεί να συντεθεί από τους βασικούς τύπους διαγραμμάτων που περιλαμβάνονται στον Πίνακα 3α του Παραρτήματος ως εξής:



Έτσι, βάσει του Πίνακα 3α του Παραρτήματος παίρνουμε:

- a) -73.46

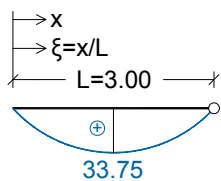


$$w_a(\xi) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L^2}{6} \cdot \omega'_D = -0.9182 \cdot \omega'_D \text{ [mm]}$$

όπου: $\omega'_D = 2 \cdot \xi - 3 \cdot \xi^2 + \xi^3$

$$\tau_{ia} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{3} = -6.122 \cdot 10^{-4}, \tau_{ka} = -3.061 \cdot 10^{-4}$$

- b)



$$w_b(\xi) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L^2}{3} \cdot \omega''_P = 0.8437 \cdot \omega''_P \text{ [mm]}$$

όπου: $\omega''_P = \xi - 2 \cdot \xi^3 + \xi^4$

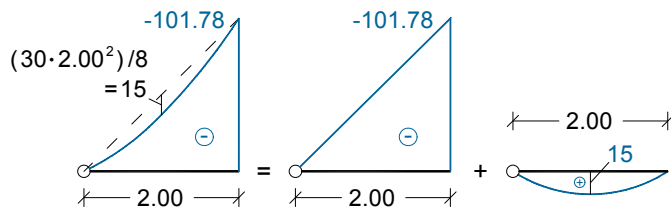
$$\tau_{ib} = \tau_{kb} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{3} = 2.8125 \cdot 10^{-4}$$

και συνολικά:

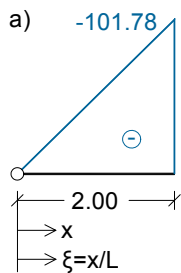
$$w(\xi) = w_a(\xi) + w_b(\xi) = -0.9182 \cdot \omega'_D + 0.8437 \cdot \omega''_P$$

• Τμήμα 3-4:

Για το τμήμα 3-4 του φορέα μας το διάγραμμα ροπών του μπορεί να συντεθεί από τους βασικούς τύπους διαγραμμάτων που περιλαμβάνονται στον Πίνακα 3α του Παραρτήματος ως εξής:



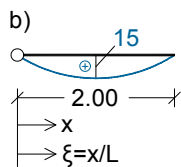
Έτσι, βάσει του Πίνακα 3α του Παραρτήματος παίρνουμε:



$$w_a(\xi) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L^2}{6} \cdot \omega_D = -0.565 \cdot \omega_D \text{ [mm]}$$

όπου: $\omega_D = \xi - \xi^3$

$$\tau_{ia} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{6} = -2.827 \cdot 10^{-4}, \tau_{ka} = -5.654 \cdot 10^{-4}$$



$$w_b(\xi) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L^2}{3} \cdot \omega_p'' = 0.1667 \cdot \omega_p'' \text{ [mm]}$$

όπου: $\omega_p'' = \xi - 2 \cdot \xi^3 + \xi^4$

$$\tau_{ib} = \tau_{kb} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{3} = 8.333 \cdot 10^{-5}$$

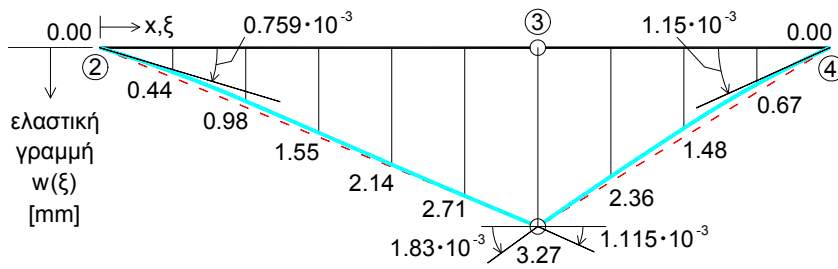
και συνολικά: $w(\xi) = w_a(\xi) + w_b(\xi) = -0.565 \cdot \omega_D + 0.1667 \cdot \omega_p''$

Με τη βοήθεια του Πίνακα 3β, ο οποίος περιέχει τις αριθμητικές τιμές των συναρτήσεων ω_D , ω_D' και ω_p'' , υπολογίζουμε τις βυθίσεις w σε επαρκώς πυκνά σημεία της δοκού, π.χ. στα έκτα σημεία του τμήματος 2-3 και στα τέταρτα σημεία του τμήματος 3-4:

	x [m]	$\xi=x/3.0$	ω_D'	ω_p''	$w(\xi)=-0.9182\omega_D'+0.8437\omega_p''$
Κόμβος 2:	0	0	0.00	0.00	0.0000
	0.5	0.167	0.25	0.1582	-0.1004
	1	0.333	0.37	0.2716	-0.1109
	1.5	0.5	0.38	0.3125	-0.0807
	2	0.667	0.30	0.2716	-0.0429
	2.5	0.833	0.16	0.1582	-0.0153
Αρθρωση 3:	3	1	0.00	0	0.0000

	x [m]	$\xi=x/2.0$	ω_D	ω_p''	$w(\xi)=-0.565\omega_D+0.1667\omega_p''$
Αρθρωση 3:	0	0	0.000	0.00	0.0000
	0.5	0.25	0.234	0.223	-0.0954
	1	0.5	0.375	0.313	-0.1600
	1.5	0.75	0.328	0.223	-0.1484
Κόμβος 4:	2	1	0.000	0	0.0000

Η τελική ελαστική γραμμή προκύπτει με επαλληλία, δηλαδή αλγεβρική άθροιση, των βυθίσεων λόγω κλείουσας w :



Ελαστική γραμμή

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \psi_{23} - (\tau_{ia} + \tau_{ib}) = \frac{w_2 - w_3}{L_{23}} - (\tau_{ia} + \tau_{ib}) = \frac{0 - 3.27 \cdot 10^{-3}}{3} + 0.331 \cdot 10^{-3} \\ &= -0.759 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3^{ap.} &= \psi_{34} - (\tau_{ia} + \tau_{ib}) = \frac{w_3 - w_4}{L_{34}} + (\tau_{ia} + \tau_{ib}) = \frac{3.27 \cdot 10^{-3} - 0}{2} - (-0.2 \cdot 10^{-3}) \\ &= 1.83 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3^{\delta\epsilon\delta.} &= \psi_{23} + (\tau_{ka} + \tau_{kb}) = \frac{w_2 - w_3}{L_{23}} - (\tau_{ka} + \tau_{kb}) = -1.09 \cdot 10^{-3} + (-0.025 \cdot 10^{-3}) \\ &= -1.115 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

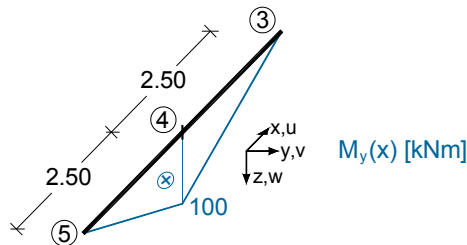
$$\begin{aligned} \varphi_4 &= \psi_{34} + (\tau_{ka} + \tau_{kb}) = \frac{w_3 - w_4}{L_{34}} - (\tau_{ka} + \tau_{kb}) = 1.64 \cdot 10^{-3} + (-0.48 \cdot 10^{-3}) \\ &= 1.15 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

Άσκηση Κ4

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 3.2.

(1) Υπολογισμός του διαγράμματος ροπών κάμψης $M(x)$

Το διάγραμμα ροπών κάμψης $M_y(x)$ ως προς τους τοπικούς άξονες y των στοιχείων του φορέα έχει ήδη υπολογιστεί στην Άσκηση Θ1/2. Εδώ ζητείται μόνο η ελαστική γραμμή $w(x)$ του στοιχείου 5-3, του οποίου το διάγραμμα ροπών κάμψης δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Ροπές κάμψης του στοιχείου 5-3 του δεδομένου φορέα

(2) Υποδιαίρεση του φορέα σε κατάλληλα επιλεγμένα τμήματα

Το στοιχείο 5-3 θεωρείται για τις ανάγκες υπολογισμού της ελαστικής γραμμής ως ένα τμήμα, διότι όχι μόνο είναι ευθύγραμμο και σταθερής δυσκαμψίας EI αλλά η μορφή του διαγράμματος ροπών του περιλαμβάνεται στον Πίνακα 3α του Παραρτήματος (βλ. σειρά 5).

(3) Υπολογισμός των βυθίσεων των χαρακτηριστικών σημείων

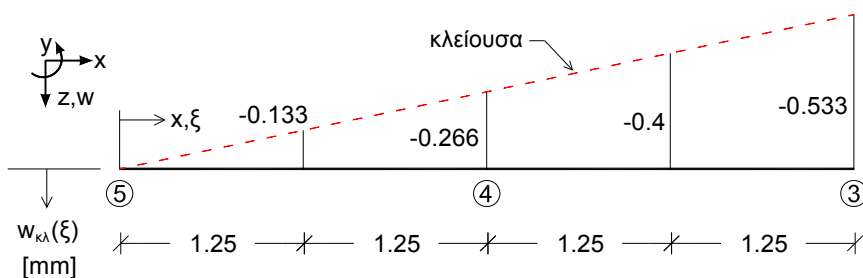
Η στήριξη του κόμβου 5, κατά την έννοια του άξονα Z , είναι ακλόνητη και, συνεπώς, $w_5=0$. Αντίθετα, ο κόμβος 3 έχει μία μη μηδενική βύθιση η οποία πρέπει να υπολογιστεί: Η τιμή της είναι λόγω ατένειας του φορέα, ίση με εκείνη του κόμβου 2:

$$w_{z3} = w_{z2} = -0.533 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -0.533 \text{ mm}$$

η οποία έχει ήδη υπολογιστεί στην Άσκηση Ι5:

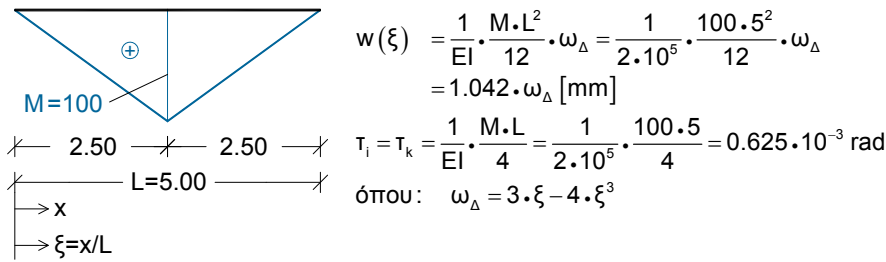
(4) Προσδιορισμός της κλείουσας της ελαστικής γραμμής

Σύμφωνα με την παραπάνω υποπαράγραφο (3) παίρνουμε:



Κλείουσα στις ελαστικής γραμμής

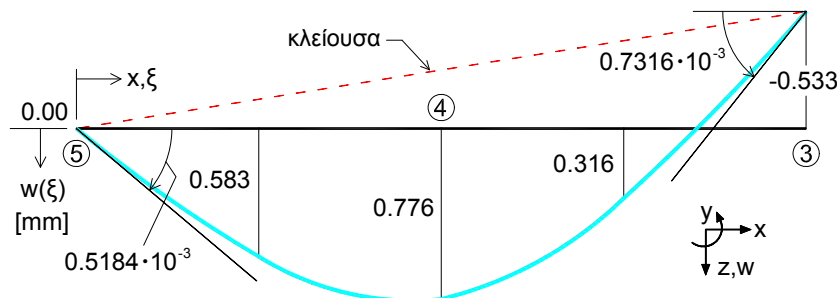
(5) Υπολογισμός της ελαστικής γραμμής του τμήματος 5-3 θεωρούμενου ως αμφιέρειστο



Με τη βοήθεια του Πίνακα 3β, ο οποίος περιέχει τις αριθμητικές τιμές της συναρτήσεως ω_{Δ} , υπολογίζουμε τις βυθίσεις σε επαρκώς πυκνά σημεία του τμήματος 5-3, π.χ. στα τέταρτα σημεία του: βλ. παρακάτω πίνακα, στήλη (4).

(6) Υπολογισμός βυθίσεων

	x [m]	$\xi=x/5.0$	ω_{Δ}	$1.042\omega_{\Delta}$	$w_{κλ}(x)$	w(ξ) [mm] (4)+(5)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Κόμβος 5:	0	0	0	0	0	0.000
	1.25	0.25	0.6875	0.7164	-0.133	0.583
Κόμβος 4:	2.5	0.5	1	1.0420	-0.266	0.776
	3.75	0.75	0.6875	0.7164	-0.4	0.316
Κόμβος 3:	5	1	0	0	-0.533	-0.533



Ελαστική γραμμή

$$\varphi_5 = \psi_{53} - \tau_i = \frac{w_5 - w_3}{L_{53}} - \tau_i = \frac{0 - (-0.533 \cdot 10^{-3})}{5} - 0.625 \cdot 10^{-3} = -0.5184 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

(Σημ.: Το αρνητικό πρόσημο αναφέρεται στο σύστημα αναφοράς x-y-z)

$$\varphi_3 = \psi_{53} + \tau_k = 1.066 \cdot 10^{-4} + 0.625 \cdot 10^{-3} = 0.7316 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

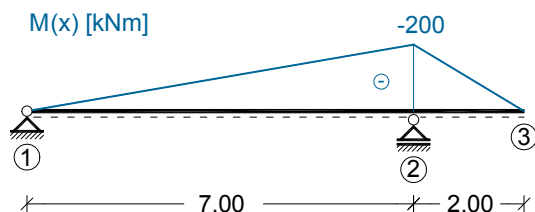
Σημ.: Η στροφή φ_3 είναι η στροφή του άκρου 3 της δοκού 5-4-3, δηλαδή η στροφή του ακραίου σημείου της ακριβώς πριν την κυλινδρική άρθρωση.

Άσκηση Κ5

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 3.2.

(1) Υπολογισμός του διαγράμματος ροπών κάμψης $M(x)$

Το διάγραμμα ροπών κάμψης $M(x)$ προκύπτει εύκολα, κατά τα γνωστά, και δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



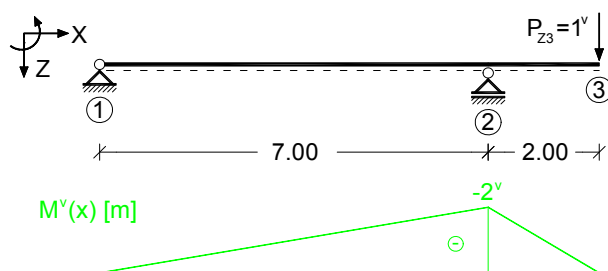
Ροπές κάμψης λόγω του δεδομένου φορτίου

(2) Υποδιαίρεση του φορέα σε κατάλληλα επιλεγμένα τμήματα

Εδώ έχουμε τα δύο ευθύγραμμα και σταθερής δυσκαμψίας EI τμήματα 1-2 και 2-3, για κάθε ένα από τα οποία η μορφή του διαγράμματος των ροπών περιλαμβάνεται στον Πίνακα 3α του Παραρτήματος (σειρές 2 και 3 αντίστοιχα).

(3) Υπολογισμός των βυθίσεων των χαρακτηριστικών σημείων

Λόγω των ακλόνητων στηρίξεων ισχύει: $w_1=w_2=0$. Αντίθετα, η w_3 είναι μη μηδενική και πρέπει να υπολογιστεί. Με το βοηθητικό μοναδιαίο φορτίο $P_{z3}=1^y$:



Ροπές κάμψης λόγω $P_{z3}=1^y$

και αγνοώντας τις διατμητικές παραμορφώσεις, παίρνουμε εφαρμόζοντας την ΑΣΔΕ:

$$w_3 = \frac{1}{EI} \cdot \int (M^y \cdot M) dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (7.00 + 2.00) \cdot (-2) \cdot (-200) \right] = \frac{1200}{EI}$$

Υπολογισμός της δυσκαμψίας EI της χαλύβδινης δοκού IPB280:

Από πίνακες: Ροπή αδράνειας $I_y=19270\text{cm}^4$

Μέτρο ελαστικότητας χάλυβα: $E=210 \cdot 10^3 \text{MN/m}^2$

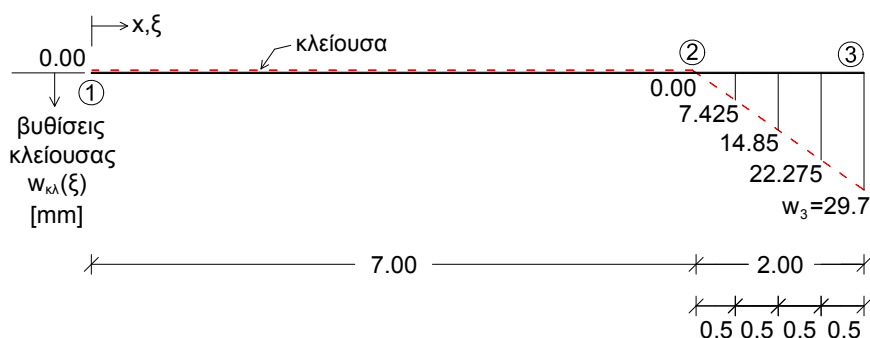
$\Rightarrow EI=40467\text{kNm}^2$

Συνεπώς:

$$w_3 = \frac{1200}{EI} = \frac{1200}{40467} = 0.0297\text{m} = 29.7\text{mm}$$

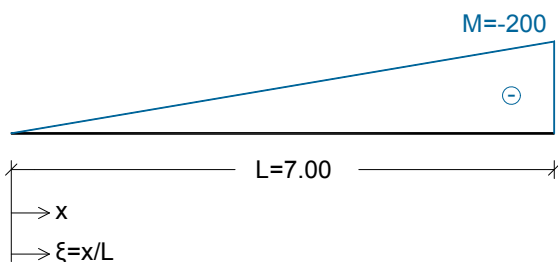
(4) Προσδιορισμός της κλείουσας της ελαστικής γραμμής

Σύμφωνα με την παραπάνω υποπαράγραφο (3) έχουμε:

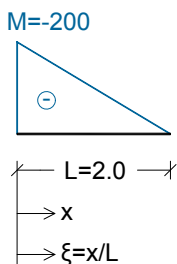


Κλείουσα στις ελαστικής γραμμής

(5) Υπολογισμός των ελαστικών γραμμών των επί μέρους τμημάτων θεωρούμενων ως αμφιέριστα και επαλληλία



$$w(\xi) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L^2}{6} \cdot \omega_D = \frac{1}{40467} \cdot \frac{(-200) \cdot 7.00^2}{6} \cdot \omega_D = -40.36 \cdot \omega_D \text{ [mm]}$$



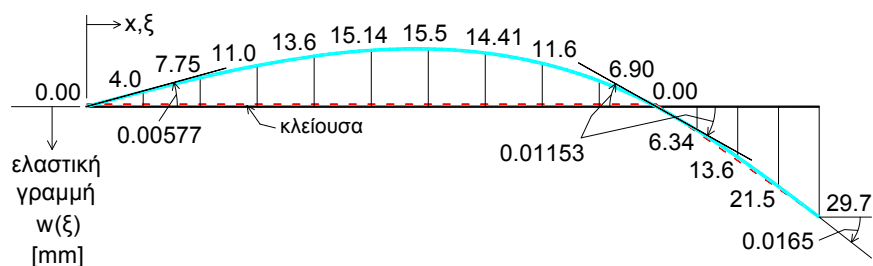
$$w(\xi) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L^2}{6} \cdot \omega'_D = \frac{1}{40467} \cdot \frac{(-200) \cdot 2.00^2}{6} \cdot \omega'_D = -3.29 \cdot \omega'_D \text{ mm}$$

Με τη βοήθεια του Πίνακα 3β, που περιέχει τις αριθμητικές τιμές των συναρτήσεων ω_D και ω'_D υπολογίζουμε τις βυθίσεις σε επαρκώς πυκνά σημεία των δύο τμημάτων, εδώ: στα δέκατα σημεία του τμήματος 1-2 και στα τέταρτα σημεία του τμήματος 2-3 (βλ. παρακάτω πίνακα, στήλες 5 και 6).

Βιντεοπαρουσίαση της άσκησης αυτής στο YouTube:

<https://youtu.be/6rMj9d-n1z4>

	x [m]	ξ=x/L	ω _D	ω' _D	-40.36ω _D	-3.29ω' _D	w _{κλ} (x) [mm]	w(ξ) [mm]
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Κόμβος 1:	0	0	0		0		0	0.00
	0.7	0.1	0.099		-3.996		0	-4.00
	1.4	0.2	0.192		-7.749		0	-7.75
	2.1	0.3	0.273		-11.018		0	-11.02
	2.8	0.4	0.336		-13.561		0	-13.56
	3.5	0.5	0.375		-15.135		0	-15.14
	4.2	0.6	0.384		-15.498		0	-15.50
	4.9	0.7	0.357		-14.409		0	-14.41
	5.6	0.8	0.288		-11.624		0	-11.62
	6.3	0.9	0.171		-6.902		0	-6.90
Κόμβος 2:	7	1	0		0		0	0.00
Κόμβος 3:	0	0		0		0	0.00	0.00
	0.5	0.25		0.328		-1.081	7.425	6.34
	1	0.5		0.375		-1.236	14.850	13.61
	1.5	0.75		0.234		-0.772	22.275	21.50
	2	1		0		0	29.700	29.70



Ελαστική γραμμή

Γωνίες στροφής στους κόμβους 1, 2, 3 (βλ. Πίνακα 3α Παραρτήματος):

$$\varphi_1 = \psi_{12} - T_i = -T_i = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{6} = -\frac{1}{40467} \cdot \frac{(-200) \cdot 7.00}{6} = 0.00577 \text{ rad}$$

$$\varphi_2 = \psi_{12} + T_k = T_k = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{3} = \frac{1}{40467} \cdot \frac{(-200) \cdot 7.00}{3} = -0.01153 \text{ rad}$$

ή

$$\varphi_2 = \psi_{23} - T_i = \frac{w_2 - w_3}{L_{23}} - \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{3} = \frac{-29.7 \cdot 10^{-3}}{2.00} - \frac{(-200) \cdot 2.00}{40467 \cdot 3} = -0.01153 \text{ rad}$$

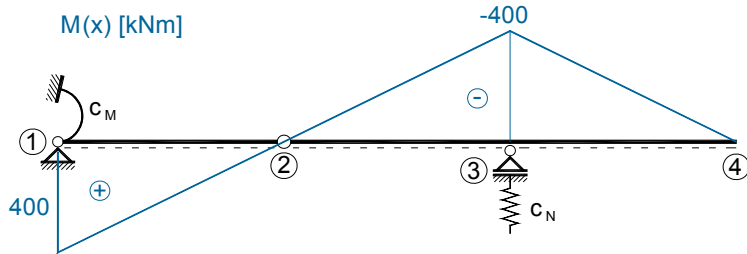
$$\varphi_3 = \psi_{23} + T_k = \frac{w_2 - w_3}{L_{23}} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{6} = \frac{-29.7 \cdot 10^{-3}}{2.00} + \frac{(-200) \cdot 2.00}{40467 \cdot 6} = -0.0165 \text{ rad}$$

Άσκηση Κ6

Ακολουθούνται τα βήματα υπολογισμού που περιγράφηκαν στην αρχή της παραγράφου 3.2.

(1) Υπολογισμός του διαγράμματος ροπών κάμψης $M(x)$

Το διάγραμμα ροπών κάμψης $M(x)$ προκύπτει εύκολα κατά τα γνωστά:



(2) Υποδιαίρεση του φορέα σε κατάλληλα επιλεγμένα τμήματα

Εδώ έχουμε τα τρία τμήματα 1-2, 2-3 και 3-4 που καθένα τους είναι όχι μόνο ευθύγραμμο και σταθερής δυσκαμψίας $EI=40467\text{kNm}^2$ (χαλύβδινη δοκός IPB280). Αλλά, επιπλέον, η μορφή του διαγράμματος ροπών του περιλαμβάνεται στον Πίνακα 3α του Παραρτήματος (σειρές 3, 2 και 3 αντίστοιχα).

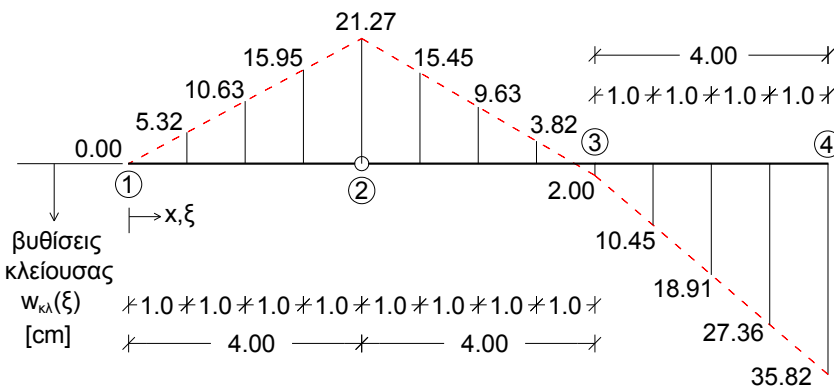
(3) Υπολογισμός των βυθίσεων των χαρακτηριστικών σημείων

Λόγω της ακλόνητης στήριξης στο σημείο 1, ισχύει $w_1=0$. Αντίθετα, οι βυθίσεις w_2, w_3 και w_4 είναι μη μηδενικές και πρέπει να υπολογιστούν. Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει με εφαρμογή της ΑΣΔΕ όπως παρουσιάστηκε αναλυτικά στην σειρά Ασκήσεων Ι. Έτσι προκύπτουν οι εξής τιμές : η επαλήθευση τους επαφίεται στον αναγνώστη ως εξάσκηση:

$$w_2 = -21.27\text{cm} \quad w_3 = 2.00\text{cm} \quad w_4 = 35.82\text{cm}$$

(4) Προσδιορισμός της κλείουσας της ελαστικής γραμμής

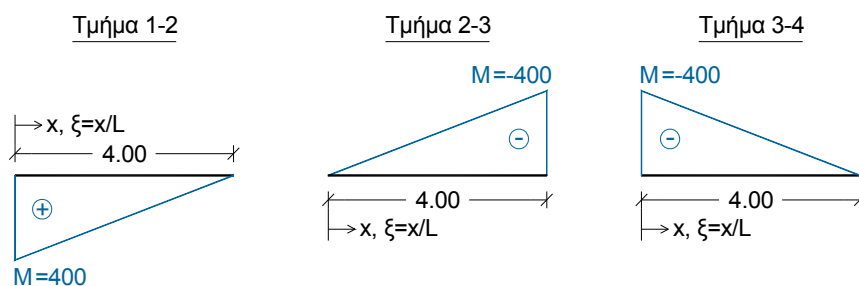
Σύμφωνα με την παραπάνω υποπαράγραφο (3) έχουμε:



Κλείουσα στις ελαστικής γραμμής

(5) Υπολογισμός των ελαστικών γραμμών των επί μέρους τμημάτων θεωρούμενων ως αμφιέρειστων

Διαγράμματα ροπών κάμψης M [kNm]



Για τα αντίστοιχα τμήματα της ελαστικής γραμμής παίρνουμε:

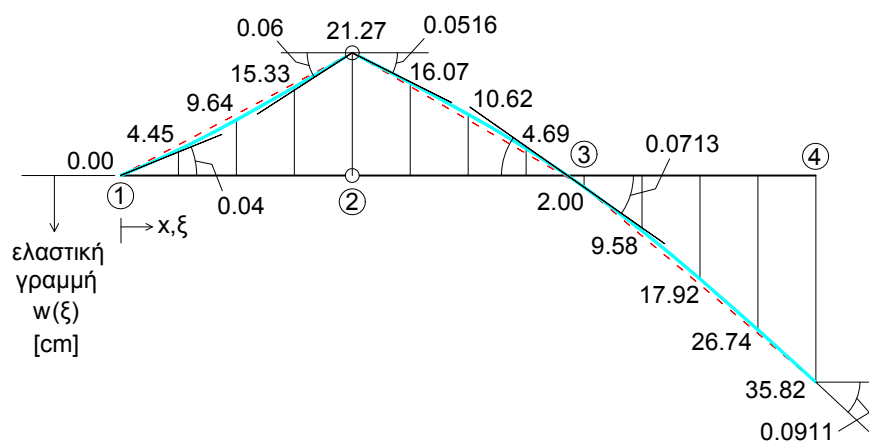
$$w(\xi) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L^2}{6} \cdot \omega'_D = 2.64 \cdot \omega'_D \text{ cm}$$

$$w(\xi) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L^2}{6} \cdot \omega_D = -2.64 \cdot \omega_D \text{ cm}$$

$$w(\xi) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L^2}{6} \cdot \omega'_D = -2.64 \cdot \omega'_D \text{ cm}$$

Με τη βοήθεια του Πίνακα 3β, που περιέχει τις αριθμητικές τιμές των συναρτήσεων ω_D και ω'_D υπολογίζουμε τις βυθίσεις σε επαρκώς πυκνά σημεία των τριών τμημάτων, εδώ: στα τέταρτα σημεία τους (βλ. παρακάτω πίνακα, στήλες 5, 6, 7).

	x [m]	$\xi=x/L$	ω_D	ω'_D	$2.64\omega'_D$	$-2.64\omega_D$	$-2.64\omega'_D$	$w_{κλ}(x)$ [cm]	$w(\xi)$ [cm]
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Τμήμα 1-2	0.0	0		0	0			0.00	0.00
	1.0	0.25		0.328	0.866			-5.32	-4.45
	2.0	0.5		0.375	0.990			-10.63	-9.64
	3.0	0.75		0.234	0.619			-15.95	-15.33
	4.0	1		0	0			-21.27	-21.27
Τμήμα 2-3	0.0	0	0			0		-21.27	-21.27
	1.0	0.25	0.234			-0.619		-15.45	-16.07
	2.0	0.5	0.375			-0.990		-9.63	-10.62
	3.0	0.75	0.328			-0.866		-3.82	-4.69
	4.0	1	0			0		2.00	2.00
Τμήμα 3-4	0	0		0			0	2.00	2.00
	1	0.25		0.328			-0.866	10.450	9.58
	2	0.5		0.375			-0.990	18.910	17.92
	3	0.75		0.234			-0.619	27.360	26.74
	4	1		0			0	35.820	35.82



Ελαστική γραμμή

Γωνίες στροφής στους κόμβους 1, 2, 3, 4 (βλ. Πίνακα 3α Παραρτήματος):

$$\varphi_1 = \psi_{12} - \tau_i = \frac{w_1 - w_2}{L_{12}} - \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{3} = \frac{21.27 \cdot 10^{-2}}{4.00} - \frac{400 \cdot 4.00}{40467.3} = 0.04 \text{ rad}$$

$$\varphi_2^{\text{αρ}} = \psi_{12} + \tau_k = \frac{w_1 - w_2}{L_{12}} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{6} = \frac{21.27 \cdot 10^{-2}}{4.00} + \frac{400 \cdot 4.00}{40467.6} = 0.06 \text{ rad}$$

$$\varphi_2^{\text{δεξ}} = \psi_{23} - \tau_i = \frac{w_2 - w_3}{L_{23}} - \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{6} = \frac{-23.27 \cdot 10^{-2}}{4.00} - \frac{(-400) \cdot 4.00}{40467.6} = -0.0516 \text{ rad}$$

$$\varphi_3 = \psi_{23} + \tau_k = \frac{w_2 - w_3}{L_{23}} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{3} = \frac{-23.27 \cdot 10^{-2}}{4.00} + \frac{(-400) \cdot 4.00}{40467.3} = -0.0713 \text{ rad}$$

$$\varphi_4 = \psi_{34} + \tau_k = \frac{w_3 - w_4}{L_{34}} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{M \cdot L}{6} = \frac{-33.82 \cdot 10^{-2}}{4.00} + \frac{(-400) \cdot 4.00}{40467.6} = -0.0911 \text{ rad}$$

Βιβλιογραφία κεφαλαίου 3

[1] Αβραμίδης, Ι.Ε. και Μορφίδης, Κ.Ε. (2008). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ια: Ισοστατικοί φορείς - Σύνοψη Θεωρίας και Ασκήσεις*. Θεσσαλονίκη: Σοφία.

[2] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ι: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

Προτεινόμενα συγγράμματα για περαιτέρω μελέτη: βλ. **Βιβλιογραφία** στις αρχικές σελίδες του βιβλίου.